

## Un modèle élément fini avec cisaillement pour la vibration des poutres à structures matérielles variables (FGM)

Koutoati Kouami, Foudil Mohri, El Mostafa Daya

*Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux, Arts et Métiers Paris Tech  
CNRS UMR 7239. Université de Lorraine 7 rue Félix Savart, BP 15082, 57073 METZ Cedex 03  
(France)*

---

### Résumé :

Un modèle élément fini est proposé dans ce travail pour l'étude du comportement statique et vibratoire des structures de poutres multicouches constituées de matériaux à gradient de propriétés (FGM). Les propriétés matérielles des FGM sont supposées varier en fonction de la fraction volumique de ses constituants. Le modèle est basé sur la théorie classique de poutre (CBT) et de cisaillement de Timoshenko du 1<sup>er</sup> ordre (FOBT) et d'ordre élevé (HOBT). Le couplage flexion membrane est pris en compte. Les différents modèles implémentés sont validés par des résultats de la littérature et des simulations numériques sur Abaqus.

**Mots clés : poutre, FGM, éléments finis, vibration, cisaillement.**

---

### 1. Introduction

Les structures en matériaux composites sont très souvent utilisées dans les domaines d'ingénierie pour leur qualité et leur haute performance à résister aux diverses sollicitations. La demande en qualité sans cesse croissante de ces composites donne naissance à un nouveau type de matériaux dont les propriétés varient de façon graduelle et continue suivant une ou deux directions de la structure. Ces matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials FGM) sont l'objet de recherche intensive. Leur utilisation est appelée à se développer avec l'utilisation des composites et les récents développements des techniques d'impression 3D. Ces structures sont très sensibles à l'effet du cisaillement aussi bien en statique qu'en dynamique. En dynamique l'effet amortissant joue un rôle important en présence des structures sandwich avec une couche viscoélastique. Les modèles de cisaillement de premier ordre (FOBT) et d'ordre élevés (HOBT) les plus adaptés sont décrits dans les travaux de Reddy, Onate et Touratier [1–3]. L'application de ces modèles en vibration libre est faite par Lee [4] où la méthode de matrice de transfert y est appliquée. Aydogdu [5] étudie la vibration libre des poutres FGM en se basant sur la méthode de résolution de Navier. Récemment Nguyen & al [6] ont développé un modèle élément fini pour la flexion des poutres FGM où le cisaillement est pris en compte. Le comportement des poutres sandwich 3D est étudié par Kim & al [7]. Les précédents travaux ont certainement contribué à une bonne compréhension du comportement des structures FGM, mais il est important à noter que la plupart de ces travaux sont limités à la flexion pure. Les effets du déplacement axial et le couplage flexion-membrane restent très peu abordés. Dans ce travail, un modèle élément fini est proposé pour l'étude statique et dynamique des structures de poutres FGM avec une attention particulière aux phénomènes de couplage membrane flexion qui apparaissent dans le cas des sections non symétriques de poutre très peu discutés dans la littérature des structures composites. L'effet des conditions aux limites et la disposition matérielle non symétrique des couches sur le comportement sont étudiés.

## 2. Formulation théorique et numérique

### 2.1 Cinématique et loi de comportement

On considère une poutre FGM de longueur  $L$  d'épaisseur  $b$  et de hauteur  $h$  (Fig. 1). Le matériau FGM utilisé dans ce travail est constitué de métal et de la céramique. Les propriétés effectives  $P(z)$  de ce matériau composite dans la section varient en fonction de la fraction volumique de la céramique suivant la relation de la loi de puissance donnée dans [4] par :

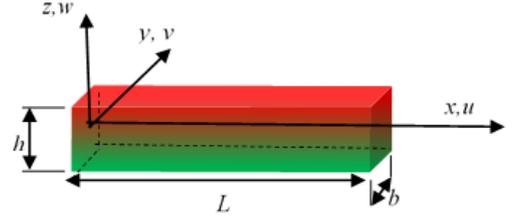


Figure 1: Poutre FGM

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c(z) - P_m ; \quad V_c(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)^k \quad (1)$$

Où  $P_c$  et  $P_m$  représentent les propriétés matérielles respectives de la céramique et du métal.  $V_c(z)$  est la fraction volumique de la céramique et  $k$  un indice réel positif de la loi de puissance. Cette fraction volumique dépend du type de section considéré. Trois types de sections sont étudiés dans ce travail (Fig. 2a-c).

**Section A :** FGM pur

$$V_c(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)^k \quad (2)$$

**Section B :** Section sandwich (FGM-Céramique-FGM)

$$FGM : V_c(z) = \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)^k ; \quad z_1 \leq z \leq z_2$$

$$Céramique : V_c(z) = 1 ; \quad z_2 \leq z \leq z_3$$

$$FGM : V_c(z) = \left(\frac{z - z_4}{z_3 - z_4}\right)^k \text{ pour } z_3 \leq z \leq z_4$$

(3a-c)

**Section C :** Section sandwich (Métal-FGM-Céramique)

$$Ceramic : V_c(z) = 1 ; \quad z_1 \leq z \leq z_2$$

$$FGM : V_c(z) = \left(\frac{z - z_3}{z_2 - z_3}\right)^k ; \quad z_2 \leq z \leq z_3$$

$$Métal : V_c(z) = 0 ; \quad z_3 \leq z \leq z_4$$

(4a-c)

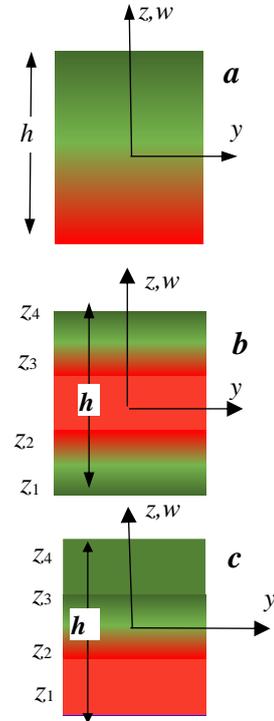


Fig.2 : Sections droites de la poutre

La variation de la fraction volumique en fonction de l'indice de puissance  $k$  pour chacune des sections considérées est représentée sur la Figure 3a-c.

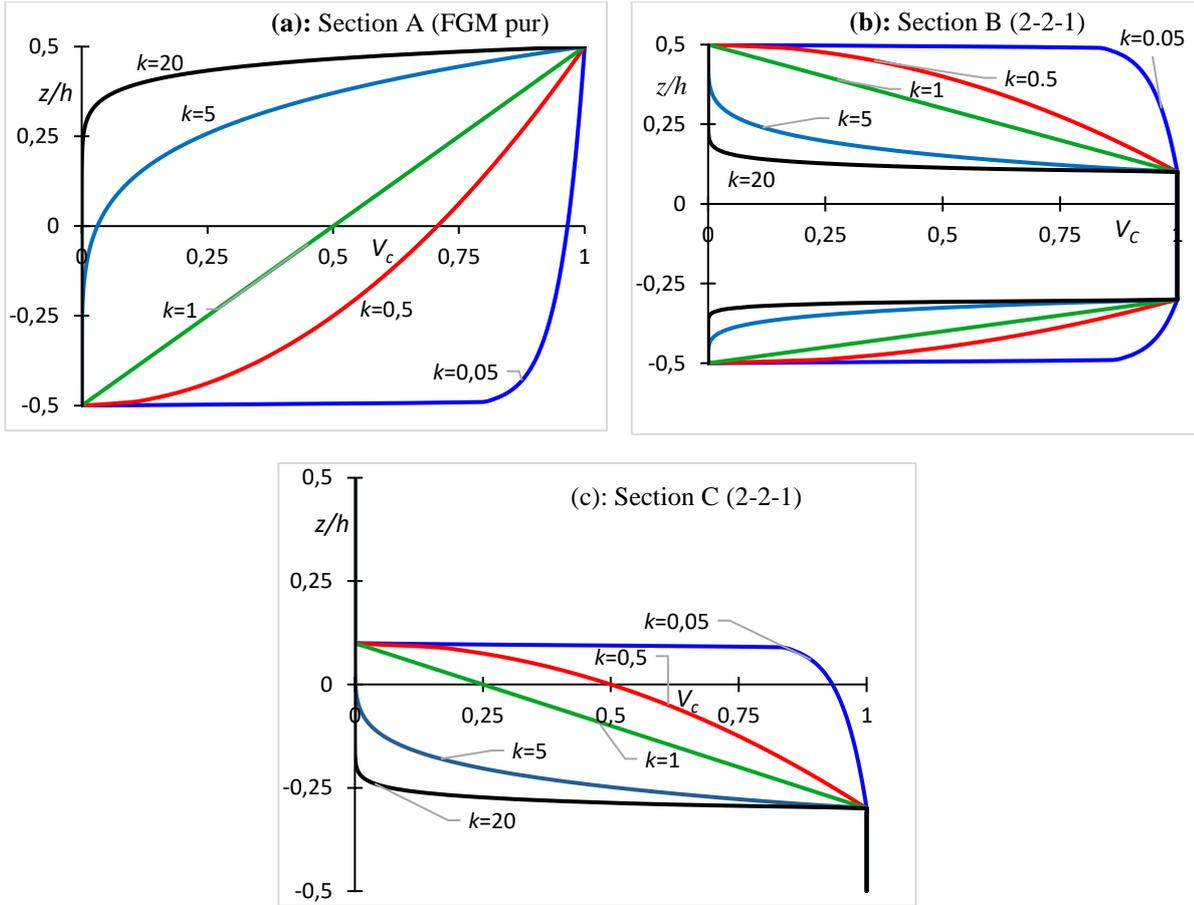


Figure 3 : Variation de la fraction volumique  $V_c$  en fonction de l'indice  $k$  pour les sections A, B et C.

La notation  $(h_1-h_2-h_3)$  note la hauteur respective de chaque couche par rapport à la hauteur totale de la section.

## 2.2 Formulation variationnelle de l'équilibre et des équations de mouvement

Pour la poutre FGM présentée ci-dessous (Fig.1), on note le déplacement axial et vertical de la ligne de référence par  $u(x,t)$  et  $w(x,t)$ . Les déplacements d'un point M de la section obéissent à la cinématique suivante :

$$\begin{cases} U_M(x, z, t) = u(x, t) - zw'(x, t) + f(z)\phi(x, t) \\ W_M(x, z, t) = w(x, t) \end{cases} \quad (5)$$

$\phi$  désigne l'angle de rotation.  $(.)'$  note l'opérateur dérivée par rapport à  $x$ . La fonction  $f(z)$  est spécifique du modèle d'analyse adopté sans cisaillement (CBT), cisaillement classique du 1<sup>er</sup> ordre (FOBT) ou d'ordre élevé (HOBT). Les composantes du vecteur déformations sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_M}{\partial x} = u' - zw'' + f(z)\phi' \\ \varepsilon_{xz} = \frac{\partial U_M}{\partial z} + \frac{\partial W_M}{\partial x} = \frac{df}{dz}\phi \end{cases} \quad (6)$$

La loi de comportement élastique linéaire est adoptée. Les contraintes axiales et de cisaillement sont :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(z) = E(z)\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xz} = G(z)\varepsilon_{xz} \end{cases} \quad (7)$$

Où  $E$  et  $G$  représentent les modules d'élasticité axiale et de cisaillement. Ces constantes sont ici variables dans la section. Les équations gouvernant le mouvement de la structure et l'équilibre de la poutre sont dérivés à partir du principe d'Hamilton basé sur les énergies de déformation  $U$  et cinétique  $T$  :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0 \quad (8)$$

On considère dans cette formulation une structure multi-couche de la Fig. 4.

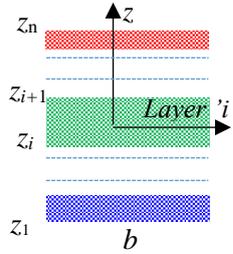


Figure 4 : section FGM multicouche

$(z_i, z_{i+1})$  représentent les coordonnées de la couche  $i$ . En tenant compte de la cinématique (5), les variations des énergies de déformation  $\delta U$  et cinétique  $\delta T$  sont données par :

$$\delta U = b \int_L \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \{ \sigma_{xx} (\delta u' - z \delta w'' + f \delta \phi') + \sigma_{xz} \frac{df}{dz} \delta \phi \} dz dx \quad (9a,b)$$

$$\delta T = \int_L B_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}) + B_2 \dot{w}' \delta \dot{w}' + B_{f^2} \dot{\phi} \delta \dot{\phi} - B_1 (\dot{u} \delta \dot{w}' + \dot{w}' \delta \dot{u}) + B_f (\dot{u} \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta \dot{u}) - B_{f'} (\dot{w}' \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta \dot{w}') \} dx$$

$$\text{où: } (B_0, B_1, B_2, B_f, B_{f'}, B_{f^2}) = b \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho(z) (1, z, z^2, f, z f, f^2) dz \quad (10)$$

En vibrations libres, les solutions sont sous la forme :

$$u(x, t) = u(x) e^{i\omega t}; \quad w(x, t) = w(x) e^{i\omega t}; \quad \phi(x, t) = \phi(x) e^{i\omega t} \quad (11)$$

$\omega$  la pulsation propre, l'équation du mouvement se réduit à la forme matricielle suivante :

$$\int_L \{ \delta \gamma \}' [H]' [D_b] [H] \{ \delta \gamma \} dx + \int_L \{ \delta \gamma \}' [H]' [D_s] [H] \{ \delta \gamma \} dx - \omega^2 \int_L ( \{ \delta q \}' ([M_1] \{ q \} + [M_4] \{ \psi \}) + \{ \delta \psi \}' ([M_2] \{ \psi \} + [M_3] \{ q \})) dx = 0 \quad (12)$$

Dans cette expression,  $D_b$  et  $D_s$  sont les matrices de comportement de flexion et de cisaillement.  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  sont des matrices de masse. Les vecteurs de travail  $\{ \gamma \}$ ,  $\{ q \}$  et  $\{ \psi \}$  sont définis par :

$$\{ \gamma \}' = \{ u' \quad w' \quad \phi' \quad w'' \quad \phi \}, \quad \{ q \}' = \{ u \quad w \quad \phi \} \quad \text{et} \quad \{ \psi \}' = \{ u' \quad w' \quad \phi' \} \quad (13)$$

## 2.2 Formulation élément fini

Une formulation élément finis de poutre est adoptée pour discrétiser le système (12) sans cisaillement (CBT) ou avec cisaillement (FOBT) ou (HOBT). Pour ces théories, on considère des éléments poutres à 2 nœuds avec les degrés de liberté suivants :

- CBT : Pour ce modèle, le cisaillement n'est pas pris en compte, la fonction  $f(z)$  de la cinématique (5) est nulle. Les degrés de liberté associés aux nœuds sont :

$$\{r\}^t = \{u_1, w_1, w'_1, u_2, w_2, w'_2\} \quad (14)$$

- FOBT et HOBT : Ces modèles tiennent compte du cisaillement. Ils se différencient au niveau de l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$  dans l'Eq. 5. Les degrés de liberté associés aux nœuds sont :

$$\{r\}^t = \{u_1, w_1, w'_1, \phi_1, u_2, w_2, w'_2, \phi_2\} \quad (9)$$

L'équation de mouvement des vibrations libres se résume à la forme suivante :

$$([K_b] + [K_s] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (10)$$

$M$  désigne la matrice de masse totale.  $K_b$  et  $K_s$  désignent respectivement les matrices de rigidité de flexion et de cisaillement. Les différentes matrices élémentaires sont calculées par intégration numérique. Néanmoins, dans le cas du cisaillement et afin d'éviter le phénomène de verrouillage numériquement appelé « Shear Locking » présent avec le modèle de Timoshenko, l'intégration réduite est utilisée pour le calcul de la matrice de rigidité de cisaillement  $[K_s]$ . Des applications numériques de ces modèles sont étudiés ci-après.

### 3. Résultats et discussions

#### 3.1 Exemple de validation

Dans cette partie du travail, on considère une poutre FGM sandwich à 3 couches traitées dans [8], notée section B. Les rapports de couche (1-2-1) et (2-2-1) sont considérés dans la validation. La poutre est soumise à différentes conditions aux limites (Fig. 5). La céramique et l'aluminium constituant les matériaux FGM ont pour propriétés respectives : Céramique :  $E_c=380$  GPa,  $\nu_c=0.3$ ,  $\rho_c=3960$  kg/m<sup>3</sup> ; Aluminium :  $E_m=70$  GPa,  $\nu_m=0.3$ ,  $\rho_m=2702$  kg/m<sup>3</sup>.



Figure 5 : Différentes conditions aux limites.

La première fréquence propre adimensionnelle en vibrations libres obtenue par [8] est comparée avec les résultats obtenus par la méthode des éléments finis développée dans ce travail. Les résultats issus de la théorie classique des poutres (CBT), le modèle de Timoshenko du 1<sup>er</sup> ordre (FOBT) et le modèle de cisaillement d'ordre élevé (HOBT) sont donnés dans le **tableau 1**, en fonction de l'indice de puissance  $k$ , de l'élancement de la poutre  $\lambda=L/h$  pour les 2 conditions d'appuis. On note le bon accord entre les modèles numériques développés ici avec ceux de la référence [8]. Un écart important est observé entre les modèles de cisaillement et le modèle (CBT) dans le cas des poutres courtes ( $\lambda=5$ ). Les différents modèles donnent les mêmes résultats dans le cas des poutres élancées (ici  $\lambda=20$ ). Cela prouve les limites de cette méthode dans l'étude du comportement des poutres FGM.

couches	$k$	Modèles	$\lambda=5$		$\lambda=20$	
			S-S	C-F	S-S	C-F
1-2-1	0	CBT (FE)	5,3953	1,9385	5.4777	1.9525
		CBT [9]	5.3955	1.9385	5.4780	1.9525
		FOBT(FE)	5,1907	1,9015	5,4632	1,9500
		HOBT(FE)	5,1526	1,8952	5,4603	1,9496
		HOBT[9]	5.1528	1.8953	5.4605	1.9500
	10	CBT (FE)	3,3018	1,1849	3.3451	1.1923
		CBT [9]	3.3020	1.1850	3.3455	1.1925
		FOBT(FE)	3,2360	1,1732	3,3406	1,1915
		HOBT(FE)	3,2356	1,1733	3,3406	1,1915
		HOBT[9]	3.2358	1.1735	3.3410	1.1915
2-2-1	0	CBT (FE)	5,3953	1,9385	5.4777	1.9525
		CBT [9]	5.3955	1.9385	5.4780	1.9525
		FOBT(FE)	5,1907	1,9015	5,4632	1,9500
		HOBT(FE)	5,1526	1,8952	5,4603	1,9496
		HOBT[9]	5.1528	1.853	5.4605	1.9500
	10	CBT (FE)	3,1180	1,1210	3.2740	1.1283
		CBT [9]	3.1228	1.1210	3.1660	1.1285
		FOBT(FE)	3,0575	1,1102	3,2694	1,1276
		HOBT(FE)	3,1636	1,1106	3,2694	1,1276
		HOBT[9]	3.1638	1.1108	3.2695	1.275

Tableau 1: Premières fréquences propres adimensionnelles  $\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$

### 3.2 Couplage flexion-membrane

Pour des sections non-symétriques, un effet de couplage entre la flexion et la membrane apparait. Très peu d'études abordent cet aspect du comportement des structures FGM. Nous présentons dans cette partie les résultats obtenus avec une poutre en appui simple de section symétrique B (1-2-1) et non symétrique B (3-2-1) en statique. La poutre a pour élancement  $L/h=20$  et est sous chargement réparti en flexion  $q_z=10^3\text{kN/m}$  avec  $k=5$ . Les Fig 8 et 9 illustrent cette comparaison. La Fig. 8 concerne le comportement statique d'une poutre à section symétrique (Fig.8a) et celle d'une section non symétrique (Fig.8b). Le comportement de la 1ere section est en flexion pure. Dans la section non symétrique le couplage flexion membrane est présent. L'ampleur du phénomène de couplage dépend de la symétrie de la section droite de la poutre. Ce phénomène est aussi bien observé en statique qu'en dynamique. Le tableau 2 illustre l'effet de couplage sur les 2 premiers modes de vibration. Dans le cas de la section symétrique, l'effet membrane n'a pas d'incidence sur les modes de vibration de flexion. Dans le cas de la section non symétrique, le couplage membrane flexion est fort.

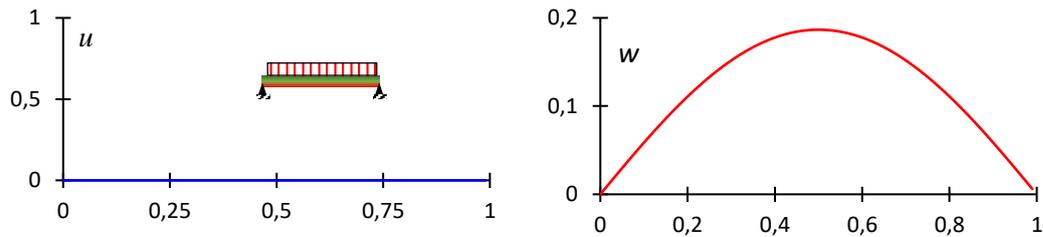


Figure 2a: Comportement statique en flexion d'une poutre FGM à section symétrique B (1-2-1): pas de couplage flexion-membrane

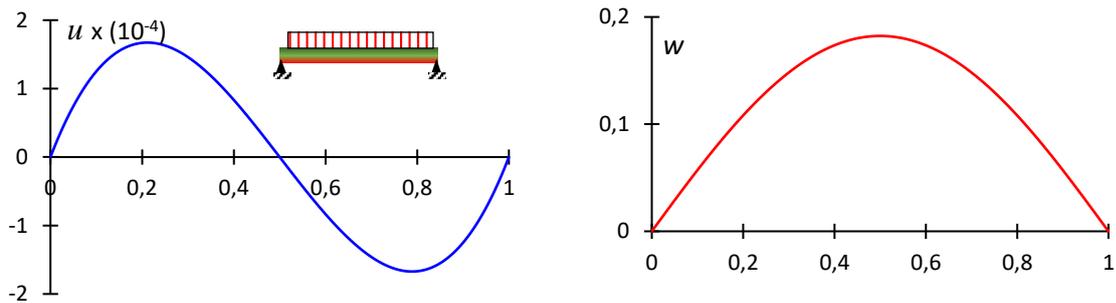


Figure 8b : Comportement statique en flexion d'une poutre FGM à section non symétrique B (3-2-1) : couplage flexion-membrane

	Section symétrique (1-2-1), $k=5, \lambda=5$		Section non symétrique (3-2-1), $k=5, \lambda=5$	
Mode 1 et 2	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$
Sans couplage	3.10	11.39	2,97	10,28
Avec couplage	3.10	11.39	3,21	10,68

Tableau2 : Deux premières fréquences adimensionnelles de vibrations libres d'une poutre à section symétrique et non symétrique

#### 4. Conclusion

Des modèles éléments finis de poutre sans cisaillement (CBT) et avec cisaillement de 1<sup>er</sup> ordre et d'ordre élevé (FOBT, HOBT) ont été développés pour les structures composites à matériau FGM. Ces modèles permettent d'étudier le comportement statique et dynamique vibratoire. Les matrices d'équilibre sont calculées par intégration numérique où l'intégration réduite est appliquée dans la partie cisaillement afin d'éviter le verrouillage numérique. Le couplage flexion- membrane est pris en compte. Ces modèles ont été validés par comparaison aux solutions de la littérature et aux simulations sur Abaqus. L'effet de cisaillement est important dans le cas des poutres à élancement réduit. Les limites des modèles sans cisaillement sont soulignées. De même, le couplage flexion membrane est important dans le cas des structures FGM à répartition matérielle non symétrique. L'effet membrane contrôle le comportement en flexion des poutres FGM. Ce travail continue en injectant une loi de comportement viscoélastique. L'effet du cisaillement est très important dans le cas des matériaux à cœur viscoélastique et à faible module d'élasticité impliquant une dépendance en fréquence de la rigidité. Les modèles numériques développés s'appliquent aussi bien aux composites multicouches à comportement élastique ou viscoélastique et aux matériaux FGM.

## References

- [1] A. A. Khdeir et J. N. Reddy, « An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams », *Compos. Struct.*, vol. 37, n° 2, p. 195-203, févr. 1997.
- [2] M. Touratier, « An efficient standard plate theory », *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 29, n° 8, p. 901-916, janv. 1991.
- [3] D. Di Capua et E. Oñate, « Two-noded zigzag beam element accounting for shear effects based on an extended Euler Bernoulli theory », *Compos. Struct.*, vol. 132, p. 1192-1205, nov. 2015.
- [4] J. W. Lee et J. Y. Lee, « Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression », *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 122, p. 1-17, mars 2017.
- [5] M. Aydogdu et V. Taskin, « Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges », *Mater. Des.*, vol. 28, n° 5, p. 1651-1656, janv. 2007.
- [6] T.-K. Nguyen, T. P. Vo, et H.-T. Thai, « Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory », *Compos. Part B Eng.*, vol. 55, p. 147-157, déc. 2013.
- [7] N.-I. Kim et J. Lee, « Improved formulation for spatial free vibration of thin-walled Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> FG sandwich beams with non-symmetric open, single- and double-cell sections », *Compos. Struct.*, vol. 178, p. 162-185, oct. 2017.
- [8] H.-T. Thai et T. P. Vo, « Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories », *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 62, n° 1, p. 57-66, sept. 2012.
- [9] L. C. Trinh, T. P. Vo, A. I. Osofero, et J. Lee, « Fundamental frequency analysis of functionally graded sandwich beams based on the state space approach », *Compos. Struct.*, vol. 156, p. 263-275, nov. 2016.