CSMA 2019
14ème Colloque National en Calcul des Structures
13-17 mai 2019, Presqu'île de Giens (Var)

UN PRINCIPE VARIATIONNEL MIXTE MODIFIE ET SON APPLICATION POUR LES ELEMENTS FINIS DE PLAQUES MITC3, DKT, DKMT

J.L. Batoz[1,2], E. Antaluca[2], I. Katili[3]

[1] Laboratoire *Roberval (FRE UTC-CNRS 2012), Université de Technologie de Compiègne, France, batoz@utc.fr*
[2] *Equipe Avenues (EA 7284), Université de Technologie de Compiègne, France, eduard.antaluca@utc.fr*
[3] *Universitas Indonesia, Civil Engineering Department, Depok 16424, Indonesia*

Résumé — Parmi les éléments finis de plaques à 3 ou 4 nœuds et trois variables nodales par nœud, basés sur la théorie du premier ordre, les éléments comme MITC3/MITC4, DKT/DKQ, DKMT/DKMQ sont très connus. Leurs formulations respectives s'appuient sur des représentations indépendantes du cisaillement transversal et l'utilisation de relations particulières le long des cotés droits. Nous proposons ici une approche variationnele unique de type mixte modifiée qui aboutit, ou non, aux mêmes matrices de rigidité. De nouveaux éléments peuvent également être obtenus.
Mots clefs — Eléments finis de plaque, formulation mixte modifiée, MITC3, DKT/DKMT.

1. Introduction et motivations

La formulation d'éléments finis basés sur la théorie des plaques de type Reissner-Mindlin et l'évaluation de leurs performances respectives ont fait l'objet de nombreuses publications depuis plus de 40 ans, voir [1] parmi d'autres sur les ouvrages et références importantes jusqu'en 1990 puis un article récent [2] qui présente un très bon état de l'art (197 références) des publications jusqu'en 2015 en relatant les différentes formulations qui ont pu être proposées pour, entre autres, éviter le blocage en Cisaillement Transversal (CT). Les deux auteurs concluent sur la difficulté du choix du/des « meilleurs éléments » et sur l'importance de la robustesse des éléments (sensibilité aux distorsions de maillage) et sur la possibilité d'effectuer des analyses non linéaires en version coques. Pour l'essentiel, les formulations des « meilleurs » éléments se sont distinguées par la manière de représenter le CT pour aboutir à des éléments performants : sans blocage en CT, ayant un rang correct (idéalement égal à 6 pour les triangles et 9 pour les quadrilatères, convergence garantie vers les solutions théoriques pour les plaques très minces ou très épaisses, bonnes évaluations des efforts résultants et contraintes. On ne s'intéressera dans cet article qu'aux formulations aboutissant à des éléments ayant uniquement les trois variables nodales classiques aux nœuds sommets (déplacement normal w et rotations β_x et β_y dans les plans xz et yz respectivement. L'approche dominante pour formuler les « bons éléments », selon les critères cités plus haut est celle dite des déformations indépendantes (ou naturelles) de CT, (assumed natural strain) et date du début des années 1980. Un premier élément triangulaire noté ultérieurement T3γ résulte des travaux de Hughes et al. [3]. L'élément MITC4, quadrilatéral, est issu des travaux de Bathe et Dvorkin (1984). Cet élément est noté Q4γ dans [1]. Une autre démarche non moins importante consiste à utiliser une formulation variationnelle mixte de type Hellinger-Reissner (HR) modifiée où les efforts tranchants T_x et T_y (ou déformations de CT associées $\underline{\gamma_x}$ et $\underline{\gamma_y}$.) sont indépendantes. Cette approche mixte a également été proposée au début des années 1980 [1, 5]. Plusieurs publications sont pertinentes pour situer les contributions [6], [7], [8]. D'autres approches ont été proposées pour obtenir des éléments performants pour la modélisation des plaques minces à épaisses, isotropes ou composites et cela en partant des éléments DKT (ou DKQ) [1], [9], [10]. Il s'agit des éléments DST et DSQ [11], DST-BK [12] puis DKMT [13] et DKMQ [14]. Ces éléments peuvent être classés dans la catégorie

« assumed natural strain » car les déformations de CT sont éliminées par des relations de liaisons le long des côtés des éléments.

Des publications récentes [15], [16] ont démontré les bonnes performances des éléments DKMT et DKMQ pour les plaques isotropes et composites, quel que soit l'élancement. Les tests incluent les tests « s-norm » relatifs à l'évaluation de la convergence uniforme en énergie. Les comparaisons ont concerné les éléments cités mais également T3γ (de fait identique à MITC3 [17]) et MITC4 [4]. Bien que très performants pour tous les tests de convergence les éléments DKMT et DKMQ doivent recourir à des équations d'équilibre (moments-efforts tranchants) locales (le long des côtés) jugées à ce jour insatisfaisantes d'un point de vue théorique. Une des motivations de cet article est de proposer une formulation mixte de type HR modifiée qui permet de mieux comprendre (voir justifier) l'élément DKMT. L'approche mixte proposée permet par ailleurs de trouver un support variationnel nouveau pour les éléments T3γ (ou MITC3), Q4γ (ou MITC4). Il permet aussi de proposer de nouveaux éléments.

2. Fonctionnelle de type Hellinger-Reissner modifiée

L'énergie interne de déformation (forme mixte) proposée pour un élément est la suivante [1,6] :

$$\Pi_{int}^{e} = \frac{1}{2}\int_{A^e} \chi^T \cdot H_b \cdot \chi \, dA - \frac{1}{2}\int_{A} \underline{\gamma}^T \cdot H_s \cdot \underline{\gamma} \, dA + \int_{A} \underline{\gamma}^T \cdot H_s \cdot \gamma \, dA \tag{1}$$

où Hb et Hs sont les rigidités de flexion et de CT respectivement (matrices 3 x 3) fonction de

$\boldsymbol{D_b} = \frac{\boldsymbol{E \cdot h^3}}{\boldsymbol{12 \cdot (1-\nu^2)}}$ et de $\boldsymbol{D_s = k \cdot G \cdot h}$.

$\boldsymbol{\chi}$ est le vecteur des courbures :

$$\underline{\chi}^T = \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle \tag{2}$$

$\underline{\gamma}$ est le vecteur des déformations indépendantes de CT :

$$\underline{\gamma}^T = \langle \underline{\gamma}_{xz} \quad \underline{\gamma}_{yz} \rangle \tag{3}$$

γ est le vecteur des déformations cinématiques de CT :

$$\gamma^T = \langle \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \rangle = \langle w_{,x} + \beta_x \quad w_{,y} + \beta_y \rangle \tag{4}$$

L'expression (1) permet de choisir des approximations de type C^0 pour β_x et β_y , et de type C^{-1} indépendantes pour $\underline{\gamma}_x$ et $\underline{\gamma}_y$. Cependant le choix sera réduit si on s'inspire des approximations qui dans le cas des poutres droites permettent d'obtenir une matrice de rigidité « exacte » (voir [1], page 84) : approximation quadratique de β ; $\underline{\gamma}$ (ou effort tranchant T) constant.

Dans le cas d'un élément triangulaire on pourra ainsi proposer :

1) un champ de rotations β_x et β_y quadratique incomplet, par exemple celui classique de DKT, DST, DKMT (voir [1], [9], [11], [13], [16]) permettant d'écrire :

$$\chi = \chi_c + \chi_h = B_1 \cdot u_n + B_2 \cdot \Delta\beta_n \tag{5}$$

où χ_c est l'opérateur de courbures constantes et χ_h l'opérateur de courbures dues aux composantes quadratiques de rotation

B_1(3 x 9) est l'opérateur de déformations constantes.

$$u_n{}^T = \langle \dots\ w_i\ \beta_{xi}\ \beta_{yi} \qquad i = 1,2,3 \ \ \rangle \tag{6}$$

B_2(3 x 3) opérateur de courbures linéaires en ξ et η (associé aux composantes quadratiques de rotation).

$$\Delta\beta_n{}^T = \langle \dots\ \Delta\beta_{sk} \qquad k = 4,5,6 \ \ \rangle;\ \text{(k est au milieu d'un coté)} \tag{7}$$

2) un champ de déformations de CT indépendant qui s'exprime en fonction de trois composantes $\underline{\gamma}_{sk}$ constantes le long des tois côtés :

$$\underline{\gamma}_k{}^T = \langle \dots\ \underline{\gamma}_{sk} \quad k = 4,5,6 \quad \rangle \tag{8}$$

Les relations retenues entre $\underline{\gamma}_x$ et $\underline{\gamma}_y$ en un point x, y, et les composantes $\underline{\gamma}_{sk}$ des trois côtés sont celles des éléments T3Y et DKMT ([3], [6], [13], [16]). On peut écrire :

$$\underline{\gamma} = \underline{B}_c \cdot \underline{\gamma}_k \tag{9}$$

avec $\underline{B}_c$ (2 x 3) fonction linéaire en ξ et η.

3) En accord avec le modèle « exact » de poutre et en cohérence avec les approximations de $\underline{\gamma}_{sk}$, les composantes cinématiques γ_{sk} seront également constantes sur chaque côté et telles que :

$$\gamma_{sk} = \frac{1}{L_k}\int_0^{L_k} (w_{,s} + \beta_s)\, ds \tag{10}$$

cette relation conduit à :

$$\gamma_k^T = \langle \quad \gamma_{sk} \quad k = 4,5,6 \quad \rangle = u_n^T \cdot A_u^T + \Delta\beta_n^T \cdot A_\beta^T \tag{11}$$

avec A_u (3 x 9) et A_β (3 x 3). On utilisera également :

$$\gamma = \underline{B}_c \cdot \gamma_k \tag{12}$$

En tenant compte des relations précédents, l'expression Π^e s'écrit :

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n^T \cdot k_{11}^b \cdot u_n + u_n^T \cdot k_{12}^b \cdot \Delta\beta_n + \Delta\beta_n^T \cdot k_{12}^{b\ T} \cdot u_n + \Delta\beta_n^T \cdot k_{22}^b \cdot \Delta\beta_n \right) - \frac{1}{2} \cdot \underline{\gamma}_k^T \cdot k_{11}^s \cdot \underline{\gamma}_k + \underline{\gamma}_k^T \cdot k_{12}^s \cdot u_n + \underline{\gamma}_k^T \cdot k_{13}^s \cdot \Delta\beta_n \tag{13}$$

avec

$$k_{11}^{b} = \int_{A^e} B_1^T \cdot H_b \cdot B_1 \, dA \; (constant) \tag{14a}$$

$$k_{12}^{b} = \int_{A^e} B_1^T \cdot H_b \cdot B_2 \, dA \tag{14b}$$

$$k_{22}^{b} = \int_{A^e} B_2^T \cdot H_b \cdot B_2 \, dA \tag{14c}$$

$$k_{11}^{s} = \int_{A^e} \underline{B_c}^T \cdot H_s \cdot \underline{B_c} \, dA \tag{14d}$$

$$k_{12}^{s} = \int_{A^e} \underline{B_c}^T \cdot H_s \cdot \underline{B_c} \cdot A_u \, dA = k_{11}^{s} \cdot A_u \tag{14e}$$

$$k_{13}^{s} = \int_{A^e} \underline{B_c}^T \cdot H_s \cdot \underline{B_c} \cdot A_\beta \, dA = k_{11}^{s} \cdot A_\beta \tag{14f}$$

La première variation de Π^e s'écrit sous la forme :

$$\delta\Pi_{int}^{e} = \langle \delta u_n \;\; \delta\underline{\gamma_k} \;\; \delta\Delta\beta_n \rangle \cdot [k_0] \cdot \langle u_n \;\; \underline{\gamma_k} \;\; \Delta\beta_n \rangle^T \tag{15}$$

avec $[k_0]$ matrice (15x15) :

$$[k_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{b} & {k_{12}^{s}}^T & k_{12}^{b} \\ k_{12}^{s} & -k_{11}^{s} & k_{13}^{s} \\ {k_{12}^{b}}^T & {k_{13}^{s}}^T & k_{22}^{b} \end{bmatrix}$$

Les trois variables $\underline{\gamma_k}$ sont internes (de type C^{-1}) et sont éliminées par condensation statique, conduisant à :

$$\underline{\gamma_k} = (k_{11}^{s})^{-1} \cdot (k_{12}^{s} \cdot u_n + k_{13}^{s} \cdot \Delta\beta_n) \tag{16a}$$

en tenant compte des relations 14e et 14f, on obtient :

$$\underline{\gamma_k} = A_u \cdot u_n + A_\beta \cdot \Delta\beta_n \tag{16b}$$

Les trois variables $\Delta\beta_n$ peuvent également être éliminées par condensation statique :

$$\Delta\beta_n = -\left(k_{22}^{b}\right)^{-1} \cdot \left({k_{12}^{b}}^T \cdot u_n + A_\beta^T \cdot k_{11}^{s} \cdot \underline{\gamma_k}\right) \tag{17}$$

Si les variables $\underline{\gamma_k}$ sont éliminées en premier, on obtient la matrice de rigidité finale k (9×9) comme suit :

$$k = k_{11}^{b} + A_u^T \cdot k_{11}^{s} \cdot A_u - X^T \cdot \left(k_{22}^{b} + A_\beta^T \cdot k_{11}^{s} \cdot A_\beta\right)^{-1} \cdot X \tag{18}$$

avec

$$X = {k_{12}^{b}}^{T} + A_{\beta} \cdot k_{11}^{s} \cdot A_u$$

3. Remarques et conclusions

1. si des approximations linéaires sont retenues pour β_x et β_y alors :

$$k = k_{11}^{b} + A_u^T \cdot k_{11}^{s} \cdot A_u \quad \textbf{(19)}$$

cette matrice de rigidité est celle des éléments T3γ ou MITC3.

2. avec les approximations quadratiques incomplètes retenues pour formuler les éléments DKT, DST et DKMT, on trouve :

$$A_{\beta} = \frac{2}{3} \cdot I_3 \ \ \text{(}I_3\text{ matrice identité 3x3)} \quad \textbf{(20)}$$

3. en éliminant $\Delta\beta_n$ en premier et en négligeant l'énergie de CT on trouve la matrice :

$$k = k_{11}^{b} - \frac{3}{2} \cdot k_{12}^{b} \cdot A_u - \frac{3}{2} \cdot A_u^T \cdot {k_{12}^{b}}^{T} + \frac{9}{4} \cdot A_u^T \cdot k_{22}^{b} \cdot A_u \quad \textbf{(21)}$$

qui est la matrice de rigidité de l'élément DKT !

Par contre l'équation 18 ne correspond pas à la matrice de rigidité de l'élément DKMT pour les plaques épaisses car la représentation du CT n'est pas identique : DKMT utilise des équations d'équilibre locales sur les côtés pour éliminer les $\Delta\beta_n$ alors que dans la présente formulation, elles sont éliminées par condensation statique directe. Pour les plaques minces les résultats sont identiques mais pour les plaques épaisses, la formulation mixte actuelle conduit à un blocage en flexion ! (inverse du blocage en CT). Deux solutions ont été trouvées et seront présentées en conférence, ainsi que des résultats.

Références

[1] J.L. Batoz, G. Dhatt. Modélisation des structures par éléments finis, volume 2, Hermès, 1990

[2] Song Cen, Yan Shang. Developments of Mindlin-Reissner plate elements, *in Mathematical Problems in Engineering*, (12 pages, 197 références), May 2015.

[3] T.J.R. Hughes, R.L. Taylor, R.L. The Linear Triangle Bending Elements. *In The Mathematics of Finite Element and Application IV, MAFELAP*, Academic Press,London, 1982.

[4] K.J. Bathe, E.N. Dvorkin E.N., A four-node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , **21**: 367-383, 1985.

[5] D.S. Malkus, T.J.R. Hughes, Mixed finite element methods—reduced and selective integration techniques: a unification of concepts, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1978; **15(1)**: 63–81.

[6] R. Ayad, G. Dhatt, J.L. Batoz, A new hybrid-mixed variational approach for Reissner-Mindlin plates: the MiSP Model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **42**: *1149-1179, 1998.*

[7] Sandro Brasile, An isostatic assumed stress triangular elemnt for the Reissner-Mindlin plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **74:** 971–995, 2008.

[8] *Y.* Lee, K. Yoon, P.S. Lee, Improving the MITC3 shell finite element by using the Hellinger–Reissner principle. *Computers and Structures*, **110-111:** 93-106, 2012.
[9] J.L. Batoz, K.J. Bathe, L.W. Ho, A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **15:** 1771-1812, 1980.
[10] J.L. Batoz, M. Ben Tahar, Evaluation of a new thin plate quadrilateral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **18**: 1655-1678, 1982.
[11] J.L. Batoz , P. Lardeur, A discrete shear triangular nine dof element for the analysis of thick to very thin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**: 533-560, 1989.
[12] J.L. Batoz, I. Katili, On a simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **3:** 1603-1632, 1992.
[13] I. Katili, A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields- part I: An extended DKT element for thick-plate bending analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36:** 1859-1883, 1993.
[14] I. Katili, A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields- part II: An extended DKQ element for thick plate bending analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36:** 1885-1908, 1993.
[15] I. Katili, J.L. Batoz, I.J. Maknun, P. Lardeur, A comparative formulation of DKMQ, DSQ and MITC4 quadrilateral plate elements with new numerical results based on s-norm tests. *Computers and Structures*, **204:** 48-64, 2018.
[16] I. Katili, I.J. Maknun, J.L. Batoz, A.M. Katili, Asymptotic equivalence of DKMT and MITC3 elements for thick composite plates, à paraitre dans *Composite structures*,
[17] P.S. Lee, K.J. Bathe, Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Computers and Structures*, **82:** 945-962, 2004.