

Séries de Taylor et méthodes de Trefftz

J. Yang¹, M. Potier-Ferry², H. Hu¹, Y. Koutsawa³, H. Tian⁴

¹ School of Civil Engineering, Wuhan University, Chine, {jie_yang, huheng}@whu.edu.cn

² LEM3, Université de Lorraine, Metz, michel.potier-ferry@univ-lorraine.fr

³ Luxembourg Institute of Science and Technology, Esch-sur-Alzette, Luxembourg, yao.koutsawa@list.lu

³ LEM3, Arts et Métiers Paris Tech, Metz, helloht@gmail.com

Résumé — On revisite les méthodes de Trefftz avec un double objectif : un, contrôler le conditionnement de la matrice et, en conséquence, rendre la méthode applicable à des systèmes de grande taille ; deux, définir une stratégie générale pour les problèmes non linéaires. En effet ce sont les deux verrous qui empêchent une application plus importante de la méthode à des problèmes non académiques. La première difficulté est résolue grâce à des découpages en sous domaines, la seconde par une résolution analytique des EDPs par la méthode des séries de Taylor.

Mots clés — Séries de Taylor, méthodes de Trefftz, Taylor Meshless Method.

1 Introduction

Les méthodes de Trefftz reposent sur la construction d'une famille exacte de solutions d'une équation aux dérivées partielles. Un des exemples les plus significatifs est les méthodes d'ondes ("wave-based") utilisées pour résoudre les équations de Helmholtz, qui sont particulièrement développées en France [7] et en Belgique [4]. D'autres fonctions très utilisées sont les solutions fondamentales, c'est-à-dire les solutions fondamentales du laplacien ou de tout autre opérateur d'intérêt [5] [8]. Il y en a bien d'autres, les plus répandues étant les polynômes harmoniques qui furent les premières fonctions apparues avec les méthodes de Trefftz modernes [6].

Le principal intérêt des méthodes de Trefftz est de permettre une réduction drastique du nombre de degrés de liberté, avec un ratio de l'ordre de 50, voire même davantage, par rapport à la méthode des éléments finis. "Merveilleux, génial" comme dirait le président du CSMA ! Et pourtant les méthodes de Trefftz restent très peu utilisées, en raison de deux verrous mal maîtrisés. Premier verrou, le mauvais conditionnement des matrices qui bloque l'emploi de la méthode de Trefftz pour les problèmes de grande taille. Certes, avec les méthodes "wave-based", le verrou semble en partie levé et on peut traiter des problèmes complexes, qui demanderaient quelques millions d'inconnues avec les éléments finis [2]. Deuxième verrou : les problèmes non linéaires. Diverses techniques ont été proposées, mais il faut de toutes manières réintroduire une discrétisation dans chaque sous-domaine et donc perdre en grande partie le principal avantage de la méthode de Trefftz. De plus, beaucoup d'auteurs ne veulent pas ou ne peuvent pas discrétiser l'opérateur tangent, ce qui ne donne pas des algorithmes de résolution très robustes.

On propose deux techniques pour résoudre ces deux difficultés et pour permettre de traiter des problèmes non-linéaires génériques à plusieurs millions de DDLs en équivalent éléments finis. Première technique : découper le domaine en un nombre suffisant de sous-domaines. Une idée qui peut sembler banale et qui est utilisée largement avec les "wave-based", mais d'autres communautés privilégient des approches mono-domaines, ce qui entraîne une croissance incontrôlée des conditionnements et ne permet pas la résolution de trop gros problèmes. Deuxième idée : on résout analytiquement l'équation dans le domaine par la méthode des séries de Taylor, une méthode générique adaptable à beaucoup de situations et qui permet à nouveau de ne pas introduire d'inconnues dans le domaine. L'idée avait été proposée par Zézé et al [17] et diverses techniques permettent d'effectuer le raccord entre sous-domaines [15]. Dans cet exposé, on montre comment on peut maîtriser les problèmes de conditionnement et résoudre des problèmes de grande taille, linéaires ou non. On trouvera davantage de détails dans certaines publications récentes [16] [13].

2 La méthode des séries de Taylor pour résoudre analytiquement des EDPs

Le point le plus original de la méthode est la résolution analytique de l'équation dans le domaine par la technique des séries de Taylor, laquelle technique a le grand avantage d'être applicable à n'importe quelles fonctions analytiques. C'est ce qui permet de réduire la taille du problème. Prenons comme exemple l'équation suivante en 2D :

$$\mathcal{R}(u) = -\Delta u + xu - f(x, y) = 0 \quad (1)$$

L'inconnue $u(x, y)$ est cherchée sous forme d'un développement de Taylor tronqué à l'ordre p :

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^{p-n} \bar{u}(m, n) (x - x_0)^m (y - y_0)^n$$

Ainsi, c'est l'ensemble des coefficients de Taylor $\bar{u}(m, n)$ qui devient l'inconnue du problème. De même la donnée $f(x, y)$ et le résidu $\mathcal{R}(x, y)$ sont discrétisés par leur série de Taylor. Ici la résolution numérique de l'équation (1) se fait en annulant les coefficients de Taylor du résidu jusqu'à l'ordre $p - 2$. Pour l'équation (1) avec un développement autour de $(x_0, y_0) = (0, 0)$, cela conduit à :

$$\bar{\mathcal{R}}(m, n) = -(m+2)(m+1)\bar{u}(m+2, n) - (n+2)(n+1)\bar{u}(m, n+2) + \bar{u}(m-1, n) - \bar{f}(m, n) = 0 \quad (2)$$

Il est alors facile de résoudre l'équation (2) qui peut être vue comme une relation de récurrence permettant d'obtenir tous ces coefficients de Taylor $\bar{u}(m, n)$ en fonction des premiers $\mathbf{q} = (\bar{u}(0, n), \bar{u}(1, n))$. Cette résolution permet de construire une solution particulière $\check{u}(x, y)$ et une famille complète de solutions de l'équation homogène associée $\mathbf{P}(x, y)$, tous sous forme polynomiale :

$$u(x, y) = \check{u}(x, y) + \sum_{k=1}^p c_k P_k(x, y) = \check{u}(x, y) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{P}(x, y)$$

3 Comment poser des problèmes aux limites

Il reste à tenir compte des conditions aux limites, ainsi que des conditions de transmission dans le cas le plus fréquent d'une résolution multi-domaine, c'est-à-dire calculer le vecteur inconnu \mathbf{q} sur chaque sous-domaine. Plusieurs méthodes ont été proposées, la plupart basées sur un principe de collocation et ne nécessitant pas de maillage, si ce n'est un découpage en sous-domaines de forme arbitraire. La méthode la plus utilisée est la collocation-moindres carrés [17] [12], les conditions aux limites étant satisfaites sur un nombre surabondant de points au sens des moindres carrés. C'est la méthode employée dans les exemples ci-après. On peut également utiliser des méthodes basées sur des multiplicateurs de Lagrange [10] dont l'efficacité est comparable [15]. On renvoie à ces articles pour les détails d'implémentation et l'analyse détaillée de ces algorithmes. On désigne cet ensemble de procédures sous le nom de "Taylor Meshless Method" (TMM).

La méthode précédente reposant sur un principe de superposition, elle s'applique à des équations linéaires. Dans le cas de problèmes non linéaires, il faut utiliser d'abord une technique de linéarisation, ce qui a été testé pour la méthode de Newton [13], de Newton-Raphson [14] ou la méthode asymptotique numérique [11] [16]. La linéarisation donne à chaque étape une équation linéaire à coefficients variables, dont les solutions sous forme de séries peuvent être obtenues de manière générique grâce à des techniques de différentiation automatique [13].

4 Évaluations numériques

Un bon nombre de tests numériques ont été présentés dans la littérature. On se limitera ici à quelques exemples illustrant la capacité de la méthode de Trefftz à résoudre un grand nombre de cas pratiques, les

limitations actuelles étant, à notre avis, la difficulté à traiter des problèmes de grande taille et l'absence d'algorithmes satisfaisant pour les équations non-linéaires.

4.1 Convergence exponentielle et retournement de précision

On commence par un petit benchmark en élasticité linéaire 3D, le domaine étant la sphère unité. La solution est une solution fondamentale avec une source au point \mathbf{X}_0 extérieur à la sphère. On essaie de retrouver cette solution en posant un problème de Dirichlet. Trois solutions sont considérées : une solution très plate avec $\mathbf{X}_0 = [100, 100, 100]$, une second avec un assez fort gradient avec $\mathbf{X}_0 = [1, 1, 1]$, enfin un cas intermédiaire $\mathbf{X}_0 = [2, 2, 2]$. On se contente d'un seul sous domaine avec 12 degrés différents allant de $p = 5$ à $p = 60$.

Les résultats sont présentés à la figure 1, qui donne la précision obtenue en fonction du conditionnement de la matrice. Le cas de la solution plate est intéressant : on obtient très vite ($p = 5$) une très haute précision assez proche du zéro machine (1.1×10^{-16} pour un réel en double précision), puis une dégradation lente de la précision lorsqu'on augmente le degré et le conditionnement. Cette limite basse est donc pilotée par la propagation des erreurs d'arrondi. Dans les deux autres cas, on observe deux phases : dans une première phase, l'erreur décroît de manière exponentielle avec le degré, ce qui est attendu avec une série de Taylor. Puis on observe un retournement de précision à partir duquel la qualité de la solution se dégrade lentement et rejoint la courbe de la solution plate. On notera les très hautes précisions pouvant être obtenues dans ces deux cas ($\simeq 10^{-11}$ and $\simeq 10^{-9}$ respectivement) difficiles à obtenir avec d'autres méthodes. Le mauvais conditionnement n'est pas lié automatiquement à ce retournement, mais il le favorise. Notons que ces courbes sont plus ou moins universelles et que ce retournement a été obtenu dans tous les cas étudiés, ainsi qu'avec d'autres fonctions de base comme les fonctions radiales, cf [3]. Cela a été étudié théoriquement et appelé "principe d'incertitude de Schaback"[9] : plus on augmente le degré, plus on augmente la précision, mais aussi plus on augmente la sensibilité aux défauts, ce qui finit par dégrader la précision. Il y a donc une limite à la convergence, dont il va falloir tenir compte.

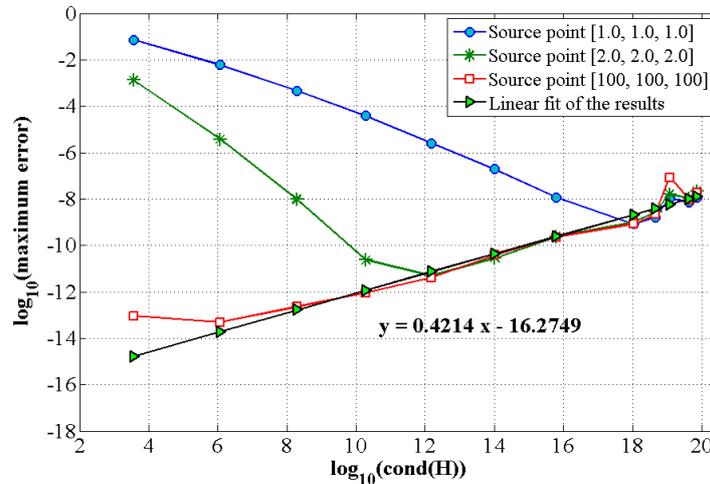


FIGURE 1 – Retournement de précision de la méthode de Trefftz/Taylor en élasticité linéaire 3D. On essaie de retrouver la solution fondamentale de source \mathbf{X}_0 en combinant des polynômes harmoniques. On trace l'erreur maximale en fonction du conditionnement de la matrice. On considère trois cas correspondant aux points sources $\mathbf{X}_0 = [1, 1, 1]$, $\mathbf{X}_0 = [2, 2, 2]$, $\mathbf{X}_0 = [100, 100, 100]$ ainsi que douze valeurs du degré entre $p = 5$ et $p = 60$.

4.2 Discrétisation par morceaux et problèmes de grande taille

La procédure pour traiter des problèmes de grande taille est très banale : on découpe le domaine en sous-domaines. Ici on utilisera la méthode de collocation-moindres carrés pour effectuer le raccord. Il n'y a que deux différences avec les éléments finis : un, il est illusoire de vouloir une approximation conforme, on doit donc se contenter de discontinuités décroissant exponentiellement ; deux, les "éléments" sont ici de forme arbitraire et de grande taille puisque l'approximation est beaucoup plus riche [18]. On considère

l'équation de Laplace dans un domaine hexaédrique de dimensions $\ell_x \times \ell_y \times 1$, cf figure 2. La donnée de Dirichlet sur la face supérieure est très oscillante : $u^d = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ et on essaie de retrouver la solution exacte en posant un problème aux limites de Dirichlet. Les "éléments" sont des cubes dont la longueur correspond à une demi-onde de la donnée.

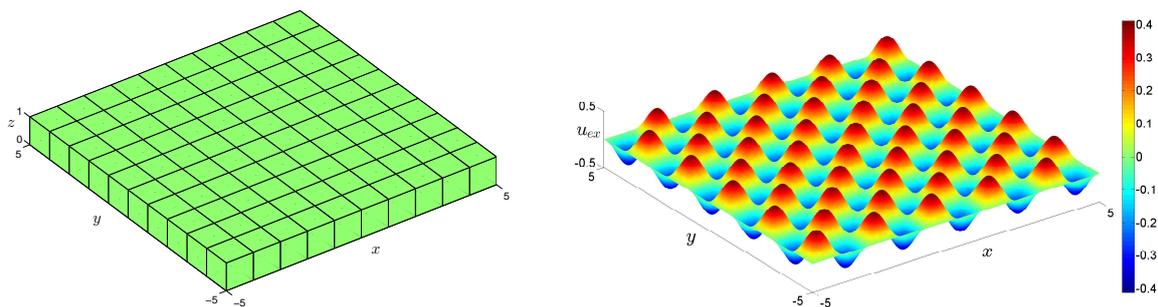


FIGURE 2 – Équation de Laplace dans un parallélépipède allongé, ici représenté avec son maillage, avec une donnée très oscillante à la surface .

Un premier calcul a été fait avec un domaine $25 \times 25 \times 1$ en visant une erreur de l'ordre de 10^{-3} , ce qui demande 625 éléments pour un degré $p = 10$, plus de 75000 DDLs et un temps CPU de 32s sur un ordinateur de bureau, mais le même calcul par éléments finis (des tétraèdres quadratiques dans FREEFEM++) demande plus de 3 000 000 DDLs et un temps CPU de 98s. La méthode permet donc de faire des calculs de cette ampleur sans difficulté, la raison de cette efficacité étant le contrôle du conditionnement qui reste à un niveau acceptable pour les solveurs modernes ($\simeq 10^{10}$). Cela n'avait jamais été fait avec une méthode de Trefftz, sauf par les groupes de recherche utilisant les fonctions "wave-based" [4][7].

Pour mieux comprendre l'origine des mauvais conditionnements, on passe à la résolution du même système, mais avec des domaines de taille croissante, de $10 \times 10 \times 1$ à $30 \times 30 \times 1$. Le résultat (Table 1) est surprenant : le conditionnement et la précision finale ne changent quasiment pas lorsqu'on augmente la taille du domaine. Il y a probablement une limite, mais les capacités mémoire d'un petit ordinateur ne permettent pas de découvrir ces limites de la méthode de Trefftz en termes de nombre de DDLs. En revanche (cf figure 1), il y a une limite en ce qui concerne le nombre de DDLs sur chaque élément, qui est ici lié au degré p . Sur la figure 1, on voit deux cas où le retournement de précision se produit pour un degré $p = 25$ ou $p = 40$. Sur l'exemple de la Table 1, cette limite se situe aux environs de $p = 20$. De telles limitations avaient été obtenues avec des fonctions radiales, des solutions fondamentales ou des "wave-based", le nombre de DDLs étant limité à quelques centaines par élément, voire quelques milliers pour les "wave-based" comme revendiqué par l'équipe de Leuven [4], mais peut-être au prix d'un conditionnement catastrophique. En revanche, nous n'avons pas vu de limite en termes de nombre d'éléments et donc de taille du problème global. Une stratégie plus ou moins optimale se dessine donc : on choisit d'abord un degré assez élevé pour profiter de la convergence exponentielle (p-convergence), mais en restant en deçà du point de retournement, puis on définit un maillage suffisamment fin (h-convergence), mais qui restera de toute manière bien plus grossier qu'un maillage avec des éléments finis classiques.

TABLE 1 – Stabilité de la méthode Taylor meshless par rapport à la taille du domaine. Trois domaines sont considérés avec un degré $p = 10$. Le plus gros problème $30 \times 30 \times 1$ correspond à plus de 4,5 millions de DDLs en équivalent éléments finis.

Domaine	DDLs	CPU	$\text{Log}_{10}(\text{Error})$	$\text{Log}_{10}(\text{Cond. (K)})$
$10 \times 10 \times 1$	12100	3.72s	-3.24	10.71
$20 \times 20 \times 1$	48400	17.75s	idem	idem
$30 \times 30 \times 1$	108900	47.2s	idem	idem

4.3 Problèmes non linéaires, équation de Navier-Stokes

Le passage d'un cas linéaire à un cas non linéaire ne pose pas de difficulté particulière en ce qui concerne le conditionnement et le traitement de problèmes de grande taille. Des versions non linéaires du problème étudié précédemment à la section 4.2 ont été traités récemment [13] [16]. Une fois que le problème a été ramené à une suite de problèmes linéarisés, la difficulté restante est de résoudre une équation à coefficients variables dont l'expression peut être complexe. On a vu à la section 2 que cette résolution se ramène à une relation de récurrence qui semble facile à chaque cas. Si on veut résoudre des EDPs génériques, il faut utiliser les techniques modernes de différentiation. Par exemple si la non-linéarité est polynomiale comme pour l'équation de Navier-Stokes, on peut établir la formule de récurrence à partir de la formule du produit de deux fonctions $v(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})$, qui s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} (vw)(m) &= \sum_{j \leq m} v(j)w(m-j) \\ &= \sum_{j_1=0}^{m_1} \sum_{j_2=0}^{m_2} v(j_1, j_2)w(m_1-j_1, m_2-j_2) \end{aligned}$$

Si le système est plus complexe, on peut utiliser les techniques de différentiation automatique et une toolbox a été faite à cet effet [13], ce qui facilite l'implémentation.

Diverses applications de cette procédure ont été réalisées, pour les plaques de Föppl-von Karman [11], des matériaux hyper-élastiques [16] ou les équations de Navier-Stokes incompressibles [14]. On présente ici un calcul sur un benchmark très connu en mécanique des fluides : la cavité entraînée en 2D [1]. Le fluide occupe un domaine rectangulaire, dont trois parois sont fixes et la paroi horizontale supérieure est entraînée à une vitesse uniforme. Plusieurs calculs ont été réalisés par la méthode de Newton-Raphson. La figure 3 montre qu'on peut retrouver les profils de vitesses obtenus dans la littérature.

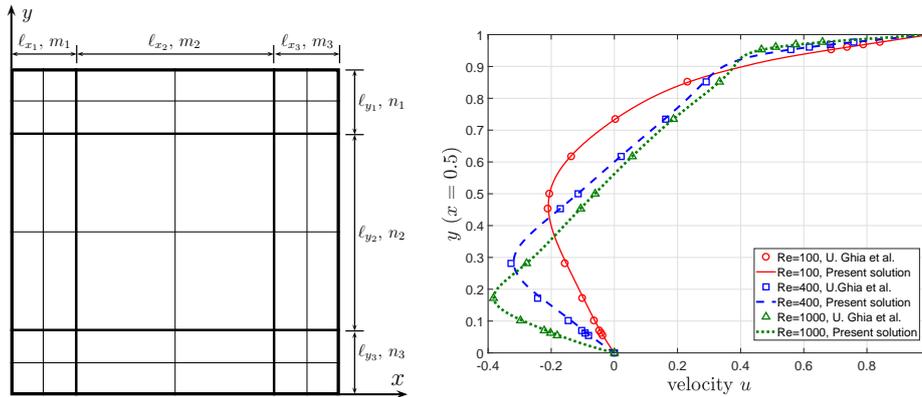


FIGURE 3 – Le benchmark classique de la cavité entraînée. A gauche, un maillage. A droite un profil de vitesse le long de la ligne $x=0,5$ avec comparaison avec la littérature.

5 Pour conclure

On a vu que les méthodes de Trefftz ont un potentiel fantastique. Si elles ont été étudiées en France il y a une vingtaine d'années, essentiellement à l'ENS Cachan, elles semblent actuellement abandonnées, à l'exception des méthodes d'ondes utilisées pour résoudre des équations de type Helmholtz. Et pourtant, à l'heure où la réduction de modèle devient une tarte à la crème, elles permettent des réductions énormes du nombre de DDLs. Une des difficultés principales des méthodes de Trefftz est le mauvais conditionnement des matrices, mais on a vu qu'on peut le contrôler en utilisant un découpage en sous-domaines. Ici, ce découpage a été fait par une technique de collocation assez rustique et cela fonctionne. Une autre difficulté est la résolution analytique des EDPs, et on a vu que cela peut se faire de manière systématique par la méthode des séries de Taylor. On n'a pas encore fait le tour de la question, c'est le moment de s'intéresser aux méthodes de Trefftz.

Références

- [1] J. M. Cadou, Y. Guevel, G. Girault. *Numerical tools for the stability analysis of 2D flows : application to the two-and four-sided lid-driven cavity*. Fluid Dynamics Research, 44(3), 031403.
- [2] A. Cattabiani. *Simulation of low-and mid-frequency response of shocks with a frequency approach*, thèse, Université Paris-Saclay, 2016.
- [3] A. H. D. Cheng, M. A. Golberg, E. J. Kansa, G. Zammito. *Exponential convergence and Hc multiquadric collocation method for partial differential equations*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Wiley, 19, 571-594, 2003.
- [4] E. Deckers, O. Atak, L. Coox, R. D'Amico, H. Devriendt, S. Jonckheere, K. Koo, B. Pluymers, D. Vandepitte, W. Desmet. *The wave based method : An overview of 15 years of research*, Wave Motion, Elsevier, 51, 550-565, 2014.
- [5] G. Fairweather, A. Karageorghis. *The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems*, Advances in Computational Mathematics, Springer, 9, 69-95, 1998.
- [6] J. Jirousek, N. Leon. *A powerful finite element for plate bending*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 12, 77-96, 1977.
- [7] H. Riou, P. Ladevèze, L. Kovalevsky. *The Variational Theory of Complex Rays : An answer to the resolution of mid-frequency 3D engineering problems*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 332, 1947-1960, 2013.
- [8] Z. C. Li, T. T. Lu, H. Y. Hu, A. H. Cheng. *Trefftz and collocation methods*. WIT press, 2008.
- [9] R. Schaback, R. *Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation* . Advances in Computational Mathematics, 3, 251-264, 1995.
- [10] Y. Tampango, M. Potier-Ferry, Y. Koutsawa, S. Tiem. *Coupling of polynomial approximations with application to a boundary meshless method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 95, 1094-1112, 2013.
- [11] H. Tian, M. Potier-Ferry, F. Abed-Meraim. *A numerical method based on Taylor series for bifurcation analyses within Föppl-von Karman plate theory*, Mechanics Research Communications, Elsevier, 93, 154-158, 2018.
- [12] J. Yang, H. Hu, M. Potier-Ferry. *Solving large-scale problems by Taylor Meshless method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 112, 103-124, 2017.
- [13] J. Yang, H. Hu, Y. Koutsawa, M. Potier-Ferry. *Taylor meshless method for solving non-linear partial differential equations*, Journal of Computational Physics, Elsevier, 348, 385-400, 2017.
- [14] J. Yang, M. Potier-Ferry, H. Hu. *Solving the stationary Navier-Stokes equations by using Taylor meshless method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier, 98, 8-16, 2019.
- [15] J. Yang, H. Hu, M. Potier-Ferry. *Least-square collocation and Lagrange multipliers for Taylor meshless method*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Wiley, 35, 84-113, 2019.
- [16] J. Yang, M. Potier-Ferry, K. Akpama, H. Hu, Y. Koutsawa, H. Tian, D. S. Zézé. *Trefftz methods and Taylor series*, Archives of Computational Methods in Engineering, in press.
- [17] D. S. Zézé, M. Potier-Ferry, N. Damil. *A boundary meshless method with shape functions computed from the PDE*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier, 34, 747-754, 2010.
- [18] O. C. Zienkiewicz. *Trefftz type approximation and the generalized finite element method—history and development*. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 4, 305-316, 1997.