

Méthode de régularisation évanescence : contribution à l'analyse d'un essai de flexion 3 points.

L. Caillé¹, F. Delvare¹, J.-L. Hanus², N. Michaux-Leblond¹

¹ LMNO, Université de Caen Normandie, {laetitia.caille,franck.delvare,nathalie.leblond}@unicaen.fr

² LaMé, INSA Centre Val de Loire, jean-luc.hanus@insa-cvl.fr

Résumé — La généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles est appliquée à des données expérimentales afin de compléter et débruiter des champs de déplacements issus de corrélation d'images numériques (CIN) et d'identifier les conditions aux limites. La méthode inverse est implémentée en utilisant la méthode des éléments finis et la méthode des solutions fondamentales. Nous présentons des résultats obtenus à partir de mesures réalisées lors d'un essai de flexion 3 points.

Mots clés — Identification ; problème inverse ; régularisation ; complétion de données ; corrélations d'images numériques ; essai de flexion 3 points

1 Contexte de l'étude

La connaissance des conditions aux limites est nécessaire à de nombreuses applications de différentes branches de l'ingénierie, telles que la thermique, la mécanique, l'acoustique... En général, la mesure directe de ces données se heurte à l'impossibilité de placer l'instrumentation adéquate. Par exemple, les forces agissant sur une structure mécanique ne sont pas facilement mesurables au niveau des zones de contact, à cause de l'impossibilité de placer des capteurs. Leur détermination n'est alors possible qu'à partir de mesures sur une partie accessible de la structure, on parle de complétion de données. En plus d'être partielles, les mesures ne sont pas parfaites : elles sont entachées de bruits d'origine expérimentale. Parmi les problèmes de complétion de données qui se posent en mécanique, nous nous intéressons au problème d'identification de conditions aux limites à partir de mesures de champs partielles. Lorsque les mesures de champs sont compatibles, le problème admet une unique solution. Néanmoins, la solution obtenue est instable, c'est à dire qu'elle est sensible à de petites perturbations des données. C'est cette situation que l'on rencontre lors de l'analyse de résultats d'essais puisque malheureusement, à cause des limites de l'instrumentation, les données sont entachées d'un bruit de mesure.

Les problèmes de complétion de données ne peuvent donc être résolus de manière directe et de nombreuses méthodes ont été introduites pour les résoudre [1, 4, 6, 7, 9]. En particulier, la méthode de régularisation évanescence, introduite pour résoudre des problèmes inverses de type Cauchy [3, 4], repose sur l'idée de chercher parmi toutes les solutions d'un opérateur elliptique celle qui s'approche au mieux des quantités mesurées. La méthode est, en particulier, capable de débruiter les données.

Nous présentons la généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes d'identification de conditions aux limites à partir de mesures de champs partielles [2]. L'approche développée est implémentée en utilisant la méthode des éléments finis et la méthode des solutions fondamentales et nous interprétons des mesures réelles issues d'un essai de flexion 3 points.

2 Méthode d'identification à partir de mesures de champs partielles

2.1 Le problème modèle

Nous considérons un matériau élastique à comportement linéaire et isotrope. Le solide décrit le domaine Ω de \mathbb{R}^2 , borné par sa frontière $\Gamma \equiv \partial\Omega$, telle que $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$, voir Figure 1. Γ_d est une partie de la frontière où des informations sur les conditions aux limites sont accessibles. Γ_i décrit la partie complémentaire de la frontière où aucune information sur les conditions aux limites n'est accessible.

Nous définissons également le sous-domaine $\Omega_d \subset \Omega$, où des mesures du champ de déplacements sont disponibles, par exemple en utilisant la corrélation d'images numériques.

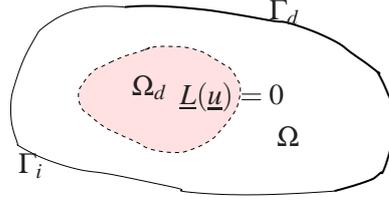


FIGURE 1 – Domaine

Nous supposons que la solution recherchée \underline{u} est solution de l'équation de Lamé \underline{L} dans le domaine Ω :

$$\underline{L}(\underline{u}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (1)$$

S'il est possible de mesurer le champ \underline{u} sur une partition Ω_d de Ω et d'obtenir des informations fiables sur les conditions aux limites en terme de vecteur contrainte $\underline{T}(\underline{u})$ sur Γ_d , alors la formulation du problème de complétion de données est donnée par l'équation (1) et les données incomplètes :

$$\underline{u} = \underline{\phi}_d, \quad \forall \underline{x} \in \Omega_d \quad (2a)$$

$$\underline{T}(\underline{u}) = \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{\psi}_d, \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_d \quad (2b)$$

avec $\underline{n}(\underline{x})$ le vecteur normal unitaire extérieur et $\underline{\sigma}$ le tenseur des contraintes.

Si les données (2a) et (2b) sont compatibles, le problème (3) admet une unique solution. Néanmoins, la solution obtenue peut être instable, c'est à dire qu'elle serait sensible à de petites perturbations des données incomplètes.

$$\begin{cases} \underline{L}(\underline{u}) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{u} = \underline{\phi}_d, & \forall \underline{x} \in \Omega_d \\ \underline{T}(\underline{u}) = \underline{\psi}_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (3)$$

Ce problème, de ce fait, devient difficile à résoudre par son caractère mal posé. Les approches classiques utilisées pour le résoudre ne peuvent pas être utilisées. Nous faisons donc le choix de proposer une extension de la méthode de régularisation évanescence, initialement introduite pour résoudre des problèmes de type Cauchy [4, 3], pour régulariser le problème.

2.2 Régularisation du problème modèle par la méthode de régularisation évanescence

La solution du problème est recherchée dans l'espace $\mathbf{H}(\Omega)$ des solutions de l'équation (1) :

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{ \underline{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad / \quad \underline{L}(\underline{v}) = 0 \text{ dans } \Omega \}$$

L'espace $\mathbf{H}(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Il s'agit d'un espace de Hilbert lorsqu'il est équipé du produit scalaire usuel de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Nous définissons $\mathbf{H}(\Omega_d)$ l'espace des restrictions dans Ω_d de l'espace $\mathbf{H}(\Omega)$ des solutions de l'équation. Il est muni du produit scalaire usuel de $H^1(\Omega)$ et de sa norme associée $\| \cdot \|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}$.

Nous définissons $\underline{u}|_{\Gamma}$ les traces des éléments de $\mathbf{H}(\Omega)$ sur Γ ainsi que leur vecteur contrainte associé $\underline{T}(\underline{u})|_{\Gamma}$ défini sur Γ .

Il est ainsi possible de définir l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$ des fonctions solutions :

$$\mathbf{H}(\Gamma) = \left\{ \underline{U} = (\underline{v}, \underline{u}, \underline{T}(\underline{u})) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \right. \\ \left. \quad \left| \quad \underline{v} \in \mathbf{H}(\Omega), \underline{v}|_{\Gamma} = \underline{u}, \underline{T}(\underline{v}) = \underline{T}(\underline{u}) \right. \right\} \quad (4)$$

L'espace des fonctions solutions $\mathbf{H}(\Gamma)$ est un sous-espace fermé de $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Nous définissons le produit scalaire associé $\langle \underline{U}, \underline{V} \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)}$ (5) et sa norme associée $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}$.

$$\begin{aligned} \langle \underline{U}, \underline{U}' \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{v} \cdot \underline{v}' d\Omega + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \underline{u} \cdot \underline{u}' ds \\ &\quad + \frac{l_0^2}{|\Gamma|} \frac{1}{E^2} \int_{\Gamma} \underline{T} \cdot \underline{T}' ds, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\forall (\underline{U} = (\underline{v}, \underline{u}, \underline{T}), \underline{U}' = (\underline{v}', \underline{u}', \underline{T}')) \in \mathbf{H}(\Gamma) \times \mathbf{H}(\Gamma).$$

l_0 est une longueur caractéristique du domaine Ω et E désigne le module d'Young.

Soit $(\underline{\phi}_d, \underline{\psi}_d)$ un couple de données compatibles, c'est à dire appartenant à $H(\Omega_d) \times H^{-1/2}(\Gamma_d)$, respectivement. Une formulation équivalente au problème (3) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{U} = (\underline{v}, \underline{u}, \underline{T}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \underline{v} = \underline{\phi}_d, \quad \forall \underline{x} \in \Omega_d \\ \underline{T} = \underline{\psi}_d, \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{array} \right. \quad (6)$$

L'idée de chercher parmi toutes les solutions du problème (3) celle qui s'approche au mieux des données accessibles à la mesure sur Ω_d , amène à la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } (\underline{\phi}_d, \underline{\psi}_d) \in H(\Omega_d) \times H^{-1/2}(\Gamma_d), \text{ trouver } \underline{U} = (\underline{v}, \underline{u}, \underline{T}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J(\underline{U}) \leq J(\underline{V}), \quad \forall \underline{V} = (\underline{v}', \underline{u}', \underline{T}') \in \mathbf{H}(\Gamma) \\ \text{sous la contrainte égalité : } \underline{T}|_{\Gamma_d} = \underline{\psi}_d \\ \text{avec } J(\cdot) : \mathbf{H}(\Gamma) \rightarrow [0, \infty[, \quad J(\underline{V}) = \|\underline{v}'|_{\Omega_d} - \underline{\phi}_d\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2 \end{array} \right. \quad (7)$$

Le problème d'optimisation (7) permet de définir la solution du problème (3) en tant qu'élément proximal. Cependant, le problème (7) reste mal posé. Même s'il admet une unique solution, dans le cas de données compatibles, il est toujours possible, lorsque les données sont bruitées, de trouver une solution $\underline{U} = (\underline{v}, \underline{u}, \underline{T})$ dans l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$, dont la restriction $\underline{v}|_{\Omega_d}$ est aussi proche que l'on veut de la donnée $\underline{\phi}_d$, entraînant une solution instable sur le reste du domaine et sa frontière.

Il est donc nécessaire d'ajouter un terme de contrôle à la fonctionnelle et le problème d'optimisation (7) devient :

Soit $c > 0$ et $\underline{\Phi} \in \mathbf{H}(\Gamma)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{U} = (\underline{v}, \underline{u}, \underline{T}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c(\underline{U}) \leq J_c(\underline{V}), \quad \forall \underline{V} = (\underline{v}', \underline{u}', \underline{T}') \in \mathbf{H}(\Gamma) \\ \text{sous la contrainte égalité : } \underline{T}|_{\Gamma_d} = \underline{\psi}_d \\ \text{avec } J_c(\underline{V}) = \|\underline{v}'|_{\Omega_d} - \underline{\phi}_d\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2 + c\|\underline{V} - \underline{\Phi}\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 \end{array} \right. \quad (8)$$

avec c un coefficient strictement positif et $\underline{\Phi} \in \mathbf{H}(\Gamma)$. Ce problème d'optimisation est bien posé au sens d'Hadamard, en partie grâce au terme de contrôle qui agit sur l'ensemble du domaine. Ce terme peut être considéré comme un terme de régularisation, au sens de Tikhonov, et a pour effet de contrôler les problèmes de stabilité. La solution dépend ainsi continûment de la donnée $\underline{\phi}_d$ mais elle dépend aussi des choix de c et de $\underline{\Phi}$. Pour éviter la dépendance par rapport à c et $\underline{\Phi}$, la solution peut être considérée comme la limite d'une suite de problèmes bien posés. On considère alors l'algorithme itératif suivant :

Étant donné $c > 0$ et $\underline{U}^0 \in \mathbf{H}(\Gamma)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{U}^{k+1} = (\underline{v}^{k+1}, \underline{u}^{k+1}, \underline{T}^{k+1}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^{k+1}(\underline{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\underline{V}), \quad \forall \underline{V} = (\underline{v}', \underline{u}', \underline{T}') \in \mathbf{H}(\Gamma) \\ \text{sous la contrainte égalité : } \underline{T}|_{\Gamma_d} = \underline{\psi}_d \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\underline{V}) = \|\underline{v}'|_{\Omega_d} - \underline{\phi}_d\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2 + c\|\underline{V} - \underline{U}^k\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 \end{array} \right. \quad (9)$$

Dans ce processus itératif, l'équation d'équilibre (1) est prise en compte de manière exacte puisqu'à chaque itération l'élément optimal est recherché dans l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$. La suite de fonctionnelles qui intervient dans (9) est composée de deux termes qui jouent des rôles différents. Le premier terme représente l'écart entre le champ optimal \mathbf{v}^{k+1} et la donnée $\underline{\phi}_d$. Il est calculé seulement dans le sous-domaine Ω_d et permet de relaxer la donnée $\underline{\phi}_d$ éventuellement entachée d'erreurs de mesure. Le second terme intervient sur l'ensemble du domaine Ω et de sa frontière Γ et non seulement où les informations doivent être complétées, il s'agit d'un terme de régularisation qui contrôle la distance entre deux éléments optimaux successifs. Ce dernier tend vers zéro au fur et à mesure des itérations, ce qui permet d'obtenir une solution indépendante du choix de c .

On obtient ainsi, à chaque itération de l'algorithme (9), une solution exacte du problème physique (1) qui satisfait les conditions aux limites (2b) et qui s'accorde au mieux à la donnée $\underline{\phi}_d$ du champ partiel (2a).

3 Reconstructions à partir de données expérimentales : essai de flexion 3 points

La généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles est appliquée à des données expérimentales afin de compléter et débruiter des champs de déplacements issus de corrélation d'images numériques (CIN) et d'identifier les conditions aux limites. Nous analysons un essai de flexion 3 points sur une éprouvette de béton. Le champ de déplacements est obtenu par corrélation d'images numériques (CIN) [10] sur une zone centrale Ω_d de la surface observée et nous exploitons également l'information de bord libre (Γ_d) hors des zones de contact (Γ_i), voir Figure 2.

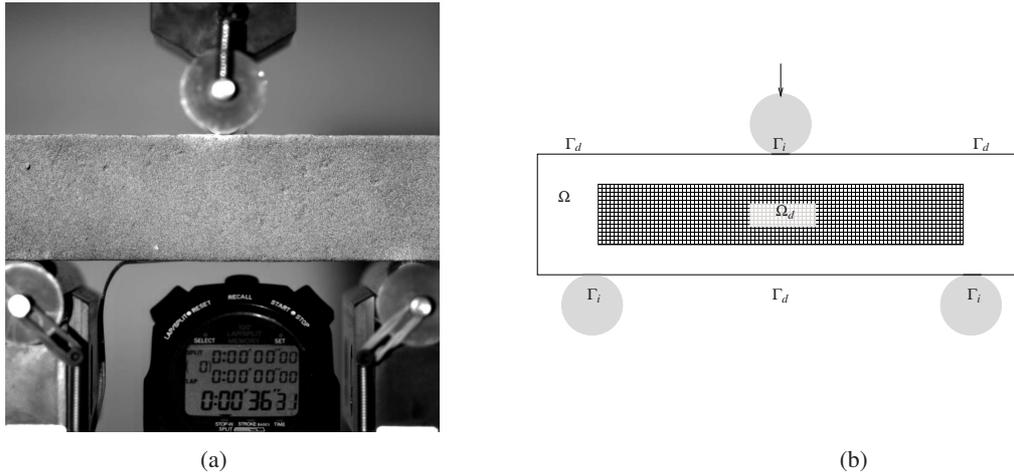


FIGURE 2 – (a) Essai de flexion 3 points sur une éprouvette de béton et (b) modélisation 2D de l'essai de flexion 3 points.

Nous identifions les conditions aux limites inaccessibles à la mesure ainsi que le champ de déplacements (solution) sur toute la surface du solide. Nous présentons des résultats obtenus en utilisant une discrétisation par la méthode des solutions fondamentales et la méthode des éléments finis. Les résultats présentés ici sont obtenus à partir de mesures issues de la CIN entre les images 1000 et 2957, ce qui correspond à une force d'intensité 2635 N sur le rouleau supérieur.

3.1 Discrétisation avec la méthode des éléments finis

Nous présentons les résultats obtenus par la méthode inverse discrétisée en utilisant la méthode des éléments finis. Le domaine Ω est maillé par des éléments quadrilatères à interpolation linéaire et quadratique et le sous-domaine Ω_d est représenté par les points de mesure, voir Figure 3.

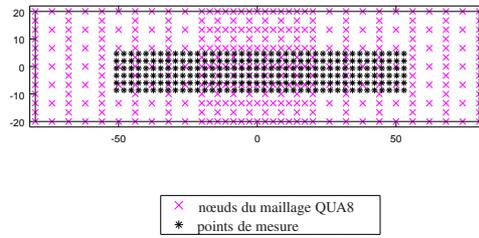


FIGURE 3 – Domaine Ω maillé par 5×15 éléments (nœuds en rose) et sous-domaine Ω_d représenté par les points de mesure (noirs).

Les Figures 4 (a), (b), (c) et (d) représentent les composantes horizontales, (a) u_1^{CIN} , du champ de déplacements mesuré par CIN, (b) u_1 , du champ de déplacements reconstruit sur Ω_d , (c) $|u_1^{\text{CIN}} - u_1|$, du résidu, qui quantifie l'écart entre les mesures et la reconstruction numérique et (d) u_1^Ω , du champ de déplacements retrouvé sur tout le domaine à partir de données sur Ω_d . La Figure 5 représente les mêmes quantités pour u_2 la composante verticale du champ de déplacement. Nous remarquons la précision de la reconstruction sur Ω_d , la capacité de la méthode à débruiter les mesures et à s'accommoder des mouvements de solide rigide.

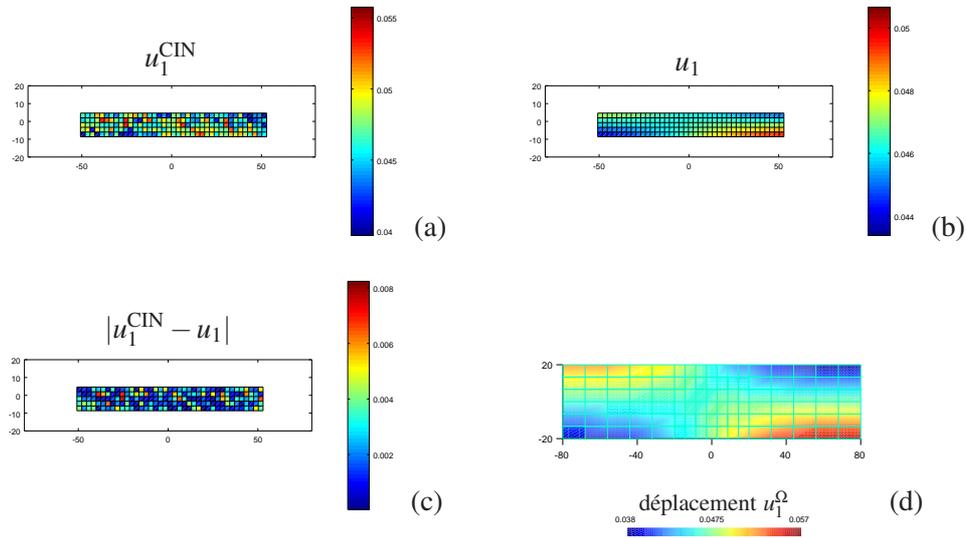
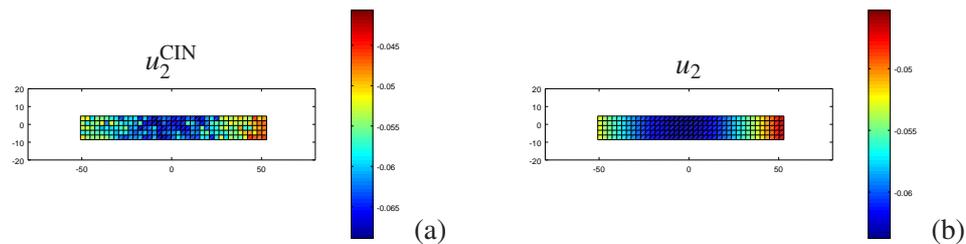


FIGURE 4 – Les composantes horizontales, (a) u_1^{CIN} , du champ de déplacements mesuré par CIN, (b) u_1 , du champ de déplacements reconstruit sur Ω_d , (c) $|u_1 - u_1^{\text{CIN}}|$, du résidu calculé sur Ω_d et (d) u_1^Ω , du champ de déplacements calculé sur tout le domaine Ω .



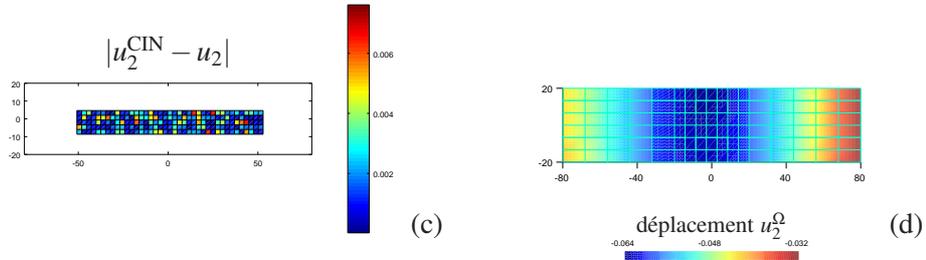


FIGURE 5 – Les composantes verticales, (a) u_2^{CIN} , du champ de déplacements mesuré par CIN, (b) u_2 du champ de déplacements reconstruit sur Ω_d , (c) $|u_2 - u_2^{\text{CIN}}|$, du résidu calculé sur Ω_d et (d) u_2^Ω , du champ de déplacements calculé sur tout le domaine Ω .

La Figure 6 représente les composantes (a) horizontale, p_1 et (b) verticale, p_2 , du chargement par élément obtenu en utilisant des éléments finis de type QUA4 ou QUA8.

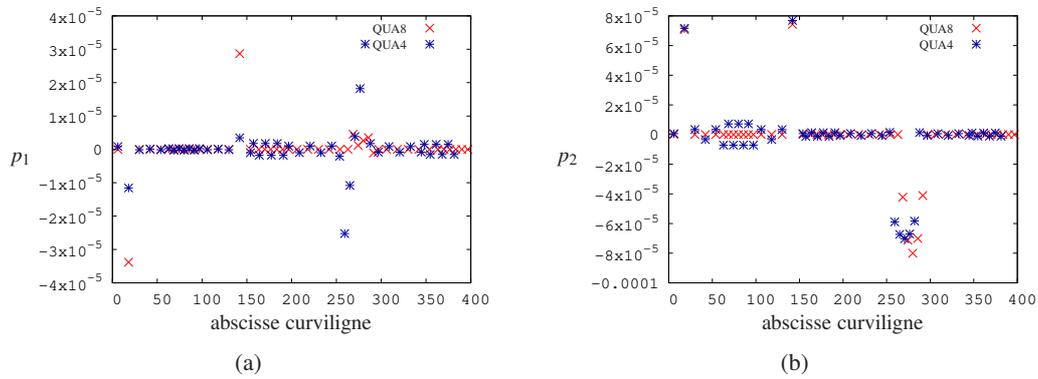


FIGURE 6 – Comparaison des composantes (a) horizontale, p_1 et (b) verticale, p_2 , du chargement par élément obtenu avec des éléments finis de type QUA4 ou QUA8.

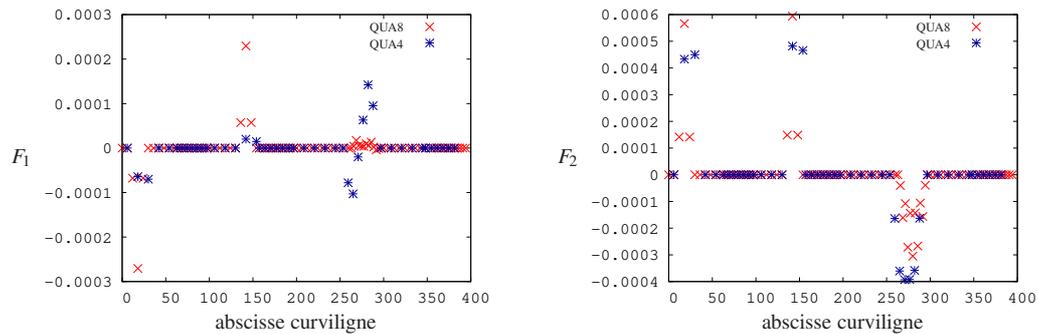


FIGURE 7 – Comparaison des composantes (a) horizontale, F_1 et (b) verticale, F_2 , des forces équivalentes aux nœuds obtenues avec des éléments finis de type QUA4 ou QUA8.

Ces résultats soulignent l'importance du choix du type d'éléments finis, nous remarquons le caractère oscillant du chargement par élément lorsque le calcul est effectué avec des éléments de type QUA4. Néanmoins, nous retrouvons la condition de bord libre, avec des éléments de type QUA4 et QUA8, lorsque nous calculons les forces équivalentes aux nœuds, voir Figure 7.

3.2 Comparaison avec une discrétisation utilisant la méthode des solutions fondamentales

L'algorithme (9) peut être implémenté en utilisant d'autres méthodes numériques, nous présentons ici des résultats obtenus en utilisant la méthode des solutions fondamentales (MFS) [8] afin de comparer les deux méthodes numériques. La MFS est une méthode sans maillage qui consiste à écrire la solution $\underline{u} \in \Omega$ sous la forme d'une combinaison linéaire de solutions fondamentales de l'opérateur de Lamé. La Figure 8 représente les composantes verticales, des résidus obtenus en utilisant la MEF (a) et la MFS (b) et des déplacements obtenus en utilisant la MEF (c) et la MFS (d). Nous remarquons la capacité de la méthode à débruiter les données sur Ω_d et à retrouver le champ de déplacements sur Ω , quelle que soit la méthode numérique utilisée. Les résultats pour la composante horizontale du champ de déplacements u_1 ne sont pas présentés car ils permettent d'observer les mêmes tendances que la composante verticale.

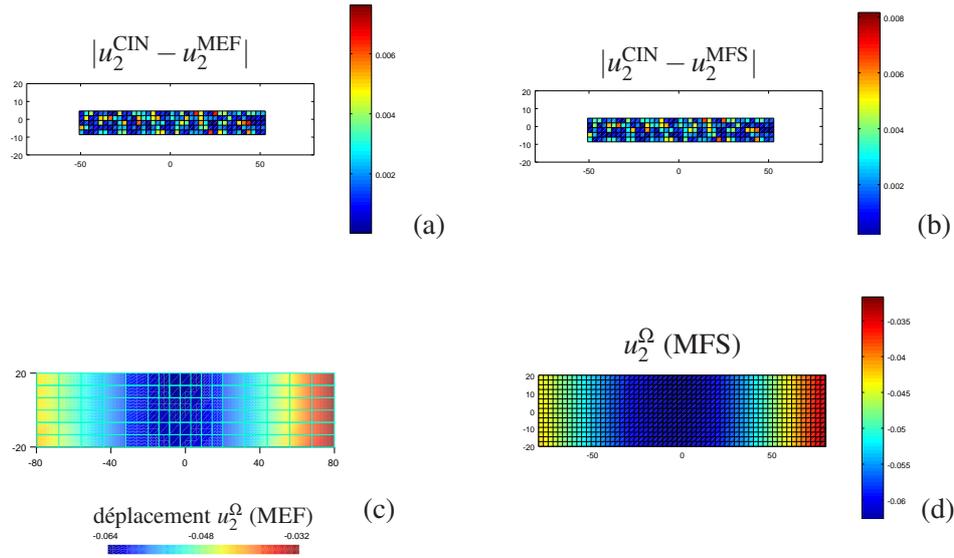


FIGURE 8 – Les composantes verticales, (a) $|u_2^{\text{CIN}} - u_2^{\text{MEF}}|$, du résidu calculé en utilisant la MEF sur Ω_d , (b) $|u_2^{\text{CIN}} - u_2^{\text{MFS}}|$, du résidu calculé en utilisant la MFS sur Ω_d . (c) u_2^Ω , du champ de déplacements calculé en utilisant la MEF sur tout le domaine Ω et (d) u_2^Ω , du champ de déplacements calculé en utilisant la MFS sur tout le domaine Ω .

La Figure 9 représente les composantes verticales du champ de déplacements (a) et du vecteur contraintes (b) retrouvées le long de la frontière Γ en utilisant des discrétisations avec la méthode des éléments finis et la méthode des solutions fondamentales. Nous remarquons que l'algorithme (9) permet de reconstruire avec précision les conditions aux limites quelle que soit la méthode numérique utilisée.

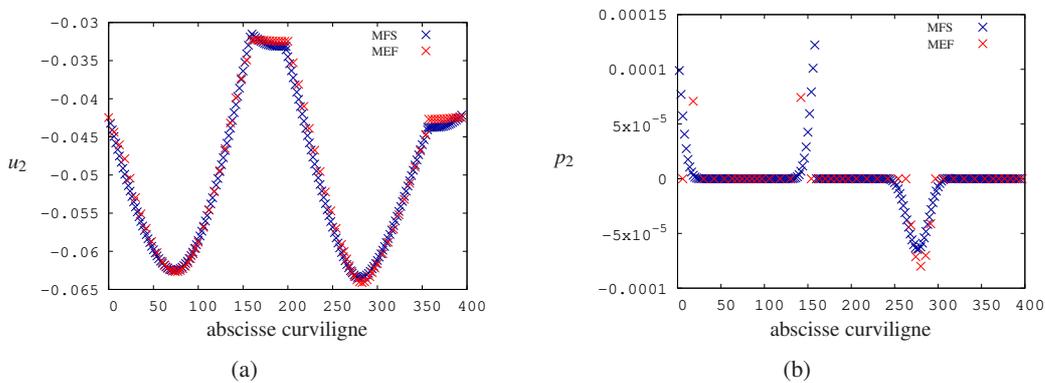


FIGURE 9 – Comparaison des composantes verticales, (a) u_2 , du champ de déplacements et (b) p_2 , du vecteur contrainte, retrouvées le long de Γ en utilisant la MEF ou la MFS.

Nous remarquons, en observant la Figure 9 (b), que la position des appuis inférieurs, retrouvée en utilisant la méthode des solutions fondamentales, ne correspond pas tout à fait à la position réelle des rouleaux. Les appuis inférieurs sont en réalité plus centrés (voir Figure 2), l'écart observé peut s'expliquer par les solutions lisses obtenues en utilisant la méthode des solutions fondamentales.

4 Conclusion

L'objectif principal de cette étude est de présenter la généralisation de la méthode de régularisation évanescence pour interpréter et compléter des mesures partielles de champs de déplacements issues de corrélations d'images numériques. La méthode ramène la résolution du problème inverse à une suite de problèmes d'optimisation sous contraintes. Le premier terme des fonctionnelles est un terme de relaxation qui représente l'écart entre les données et la solution optimale calculée. Le second terme agit sur tout le domaine et exprime la distance entre deux solutions optimales successives. Ce terme de régularisation tend vers zéro au fur et à mesure des itérations.

L'analyse d'un essai de flexion 3 points, en utilisant deux méthodes numériques différentes, montre la capacité de l'algorithme à reconstruire le champ complet de déplacements et à identifier les conditions aux limites inaccessibles à la mesure. Les résultats soulignent la précision et la stabilité de la méthode proposée ainsi que sa capacité à débruiter des mesures. Dans le cas d'une discrétisation avec la méthode des éléments finis, nous remarquons l'importance du choix du type d'éléments finis afin de reconstruire au mieux le chargement sur le bord du solide.

Références

- [1] S. Andrieux, T.N. Baranger, A. Ben Abda. *Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional*, Inverse Problems, 115, 2006.
- [2] L. Caillé, J.-L. Hanus, F. Delvare, N. Michaux-Leblond. *MFS fading regularization method for the identification of boundary conditions from partial elastic displacement field data*, European Journal of Computational Mechanics, 1-32, 2019.
- [3] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, F. Pons. *Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization*, Inverse Problems, 553-570, 2001.
- [4] A. Cimetière, F. Delvare, F. Pons. *Une méthode inverse à régularisation évanescence*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics, 639-644, 2000.
- [5] F. Hild, S. Roux. *Digital Image Correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties—a review*, Strain, 69–80, 2006.
- [6] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, A.V. Fomin. *An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equation*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 45-52, 1922.
- [7] R. Lattès, J.L. Lions. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*, Dunod, 1967.
- [8] L. Marin, D. Lesnic. *The method of fundamental solutions for the Cauchy problem in two-dimensional linear elasticity*, International Journal of Solids and Structures, 3425–3438, 2004.
- [9] A.N.Tikhonov, V.Y. Arsenin. *Solution of ill-posed problems*, John Wiley and Sons, 1977.
- [10] S. Touchal, F. Morestin, M. Brunet. *Mesure de champs de déplacements et de déformations par corrélation d'images numériques*, Actes du Colloque National Mécamat'96, 179–182, Aussois, 1996.