

Réduction de modèle viscoplastique par application de la méthode NTFA à un VER de structure

B. Leturcq¹, S. Pascal¹, P. Le Tallec²

¹ DEN, DANS, DM2S, SEMT, CEA, France, {bertrand.leturcq,serge.pascal}@cea.fr

² LMS, Ecole Polytechnique, France, patrick.letallec@polytechnique.fr

Résumé — Le cœur des réacteurs nucléaires à eau pressurisée est composé de structures répétitives disjointes, appelées assemblages combustibles. Ceux-ci fluent, sous les effets combinés de l’irradiation et des efforts mécaniques et hydrauliques jusqu’à entrer en contact les uns avec les autres. Afin de déterminer les déformations des assemblages en service, on propose de transposer la méthode d’homogénéisation non-linéaire NTFA à un problème de structure, l’assemblage combustible, formant le VER à homogénéiser. L’adoption d’une loi de comportement réduite permet en outre d’alléger significativement la durée des calculs.

Mots clefs — Réduction de modèle, NTFA, loi de comportement réduite.

1. Contexte de l’étude

La déformation des assemblages combustibles au sein du cœur d’un réacteur nucléaire à eau pressurisée (REP) a plusieurs origines. Une des plus importantes est le phénomène de fluage d’irradiation des alliages de zirconium. Les efforts mécaniques qui guident les déformations sont d’origine thermique, mécanique (précharge axiale, contacts, croissance sous flux de neutrons rapides) et, surtout, hydrauliques (voir Figure 1), du fait de l’interaction fluide-structure générée par l’écoulement du caloporteur. Notre objectif est de calculer la déformation de tous les assemblages d’un cœur de REP au cours d’un cycle de puissance. Une modélisation détaillée et complète du cœur serait de dimension considérable, du fait du nombre élevé de composants et de liaisons à prendre en compte au sein de chaque assemblage. Il est donc nécessaire de réduire la dimension du problème. Pour cela nous avons développé un modèle réduit d’assemblage combustible en adaptant la méthode NTFA d’homogénéisation non-linéaire proposée par J.C Michel et P. Suquet [3] au cas d’une structure élançée.

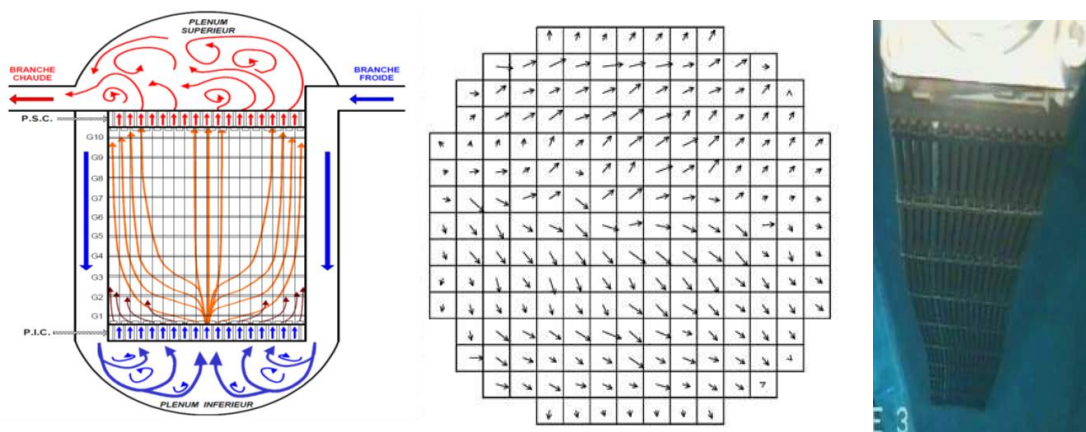


Figure 1 – Ecoulement du caloporteur, coupe horizontale du cœur, assemblage combustible déformé

2. Principe de l'homogénéisation non-linéaire NTFA

2.1. Décomposition des déformations

Pour appréhender les difficultés à déterminer le comportement non linéaire effectif d'un ver, on peut noter que:

- d'une part, l'évolution des déformations inélastiques n'est pas pilotée par la contrainte moyenne par phase, usuellement considérée dans ce type d'approche, mais par les contraintes extrémales ;
- d'autre part, les déformations inélastiques ne se développent pas de façon uniforme dans le ver : définir une déformation inélastique moyenne par phase n'a donc pas vraiment de sens.

En définitive, les approches « à champs moyens » s'avèrent inopérantes pour homogénéiser le comportement non linéaire des matériaux car il faut pouvoir considérer l'hétérogénéité intraphase des champs mécaniques au sein du ver. Pour traiter le problème de l'homogénéisation en non linéaire, G. Dvorak a introduit les tenseurs d'influence, dans le cadre d'une méthode qu'il a nommée Transformation Field Analysis (TFA) [1]. Bien que ces tenseurs permettent de décrire les interactions mécaniques induites entre les phases du VER par les déformations inélastiques, ils ne suffisent pas, à eux seuls, à rendre compte du comportement non linéaire du VER pour les raisons énoncées ci-dessus. Afin de reconstruire l'hétérogénéité intraphase des champs mécaniques, il proposa alors de sous-découper chaque phase en sous-zones et d'appliquer la TFA à cette partition, approchant ainsi les champs locaux par des fonctions uniformes par morceaux, nommant ainsi cette méthode PieceWise Uniform TFA [2]. Cette dernière approche permet effectivement de rendre compte du comportement mécanique non-linéaire du ver. Toutefois, la convergence de la méthode avec le nombre de sous-zones vers le comportement effectif du milieu est lente du fait de l'espace de fonctions utilisé.

J.C. Michel et P. Suquet ont amélioré la méthode TFA en utilisant une base de fonctions d'ordre plus élevé, non uniformes, d'où le nom de leur méthode Non-uniform Transformation Field Analysis (NTFA) [3]. Les auteurs utilisent d'abord une base de fonctions définie *a priori* puis proposent dans [5] une base de fonctions orthonormées obtenues par POD. Nous proposons d'en expliciter les principaux éléments. Soit une base orthonormée de M fonctions $\bar{\mu}_k$ ($1 \leq k \leq M$), appelées modes, où chaque mode est un tenseur symétrique de rang 2. On définit la projection ε^k du champ de déformation ε sur un mode k par :

$$\varepsilon^k = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_{\bar{\mu}_k} = \frac{1}{V} \iiint \bar{\varepsilon} : \bar{\mu}_k dV \quad (1)$$

La base des fonctions $\bar{\mu}$ étant orthonormée, elle vérifie, avec δ_{kp} est le symbole de Kronecker :

$$\langle \bar{\mu}_p \rangle_{\bar{\mu}_q} = \delta_{pq} \quad (2)$$

Dans le cas d'un matériau élastique linéaire, la déformation microscopique $\bar{\varepsilon}$ dépend linéairement de la déformation macroscopique E en tout point x du ver :

$$\bar{\varepsilon}(x) = \bar{\bar{A}} : \bar{E}(x) \quad (3)$$

On définit également le tenseur d'influence spatiale $\bar{\bar{D}}(x, x')$, qui traduit, dans un cadre élastique linéaire à déformations moyennes nulles, la déformation résultante en x d'une déformation libre unitaire imposée en x' . En utilisant le produit de convolution $*$, on caractérise l'influence d'une déformation imposée au mode p .

$$\bar{\varepsilon}(x) = \left(\bar{\bar{D}} * \bar{\mu}_p \right) \varepsilon^{in,p} \quad (4)$$

La décomposition des grandeurs inélastiques est obtenue par l'équation (1) avec :

$$\bar{\varepsilon}^{in} = \sum_{p=1}^M \varepsilon^{in,p} \bar{\bar{\mu}}_p \quad (5)$$

Ainsi en tenant compte à la fois de la déformation moyenne imposée au VER et du champ de déformation inélastique, décomposé dans la base des modes $\bar{\bar{\mu}}$, la relation de localisation devient :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\bar{A}} : (\bar{E} - \bar{E}^{th}) + \sum_{p=1}^M (\bar{\bar{D}} * \bar{\bar{\mu}}_p) \varepsilon^{in,p} \quad (6)$$

2.2. Contrainte effective sur le VER

La contrainte effective est la moyenne des contraintes sur le VER :

$$\bar{\bar{\Sigma}} = \langle \bar{\bar{\sigma}} \rangle_{VER} \quad (7)$$

Le champ des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}(x)$ peut se projeter dans la base des modes $\bar{\bar{\mu}}_k$. Les amplitudes modales des contraintes sont notées σ^k . On en déduit le tenseur des contraintes effectives :

$$\bar{\bar{\Sigma}} = \left\langle \sum_{k=1}^M \sigma^k \bar{\bar{\mu}}_k \right\rangle = \sum_{k=1}^M \sigma^k \left[\frac{1}{V} \iiint \bar{\bar{\mu}}_k \, dV \right] \quad (8)$$

Avec :

$$\sigma^k = \iiint \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\mu}}_k \, dV \quad (9)$$

Par application de la loi de comportement $\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{C}} : \bar{\bar{\varepsilon}}$ à l'équation (6), ces contraintes modales σ_k sont obtenues à partir, d'une part, des déformations macroscopiques \bar{E} et, d'autre part, des déformations inélastiques modales $\varepsilon^{in,p}$:

$$\sigma^k = \left[\iiint \bar{\bar{\mu}}_k : \bar{\bar{C}} : \bar{\bar{A}} \, dV \right] : (\bar{E} - \bar{E}^{th}) + \sum_{p=1}^M \left[\iiint \bar{\bar{\mu}}_k : \bar{\bar{C}} : (\bar{\bar{D}} * \bar{\bar{\mu}}_p - \bar{\bar{\mu}}_p) \, dV \right] \varepsilon^{in,p} \quad (10)$$

Les termes entre crochets peuvent être calculés une fois pour toutes.

2.3. Évolution des déformations inélastiques et des variables internes

C'est là que se situe la principale difficulté, car la méthode d'homogénéisation décrite ci-avant, nécessite de connaître l'état des déformations anélastiques et des variables internes. On peut bien sûr, comme dans la méthode dite « hybride », effectuer un calcul exact du comportement en tout point du VER, après recombinaisons des déformations. Néanmoins, afin de réduire la durée des calculs, on souhaite résoudre le problème d'évolution des variables internes directement dans la base des modes $\bar{\bar{\mu}}$.

J.C. Michel et P. Suquet [4] ont montré que, quand les lois de comportement dérivent de deux potentiels, obéissant au modèle standard généralisé ou non, alors, leur structure peut être transposées en base réduite. Les auteurs montrent comment projeter la loi locale sur chaque mode de la base réduite. Cette

méthode nécessite ensuite de faire une hypothèse quant à la manière de coupler les modes entre eux. Par exemple, en utilisant la norme du vecteur des forces thermodynamiques modales plutôt que la seule composante de force modale. Avec la loi de comportement réduite ainsi approchée, les résultats des corrélations numériques sont alors bien meilleurs qu'en appliquant les lois d'évolution réduites de manière découplée.

3. Adaptation de la méthode à un VER de type structure élancée

3.1. Bases des modes macroscopiques et microscopiques

Nous faisons le choix de considérer directement l'assemblage complet comme étant un VER du cœur du réacteur mais ceci amène une difficulté. De fait, dans l'équation (3), le tenseur d'ordre deux, $\bar{\bar{E}}$, qui décrit les déformations effectives d'un VER classique, n'est plus suffisant pour décrire la déformée macroscopique de l'assemblage, en particulier pour les modes de flexion. Nous choisissons alors de représenter la déformée macroscopique de l'assemblage par une base de modes de déplacements moyens de l'assemblage, notés \widehat{U}_j^{ext} .

Comme l'assemblage combustible est une structure élancée, il est commode de décrire sa déformation macroscopique par la position spatiale des grilles, lesquelles sont réparties sur sa hauteur. D'autre part, ces grilles sont également le lieu des efforts de contact entre assemblages, qui contribuent à la déformation de la structure.

Chacun de ces modes \widehat{U}_j^{ext} correspond arbitrairement au déplacement moyen unitaire de l'une des grilles suivant la direction U_x , U_y ou U_z . Ainsi, pour 10 grilles, nous obtenons 30 modes macroscopiques pour l'assemblage combustible, contre 6 pour un VER dans le cas de la NTFA, le tenseur $\bar{\bar{E}}$ étant symétrique. Le vecteur $\bar{\alpha}^{tot}$ remplace donc le tenseur $\bar{\bar{E}}$ de la méthode NTFA pour décrire l'état macroscopique.

$$\widehat{U}^{ext}(t) := \sum_{j=1,J} \alpha_j^{tot}(t) \widehat{U}_j^{ext} \quad (11)$$

Le champ microscopique des déformations viscoplastiques est, quant à lui, décomposé sur une base orthonormée de modes tensoriels $\widehat{\varepsilon}_i^{vp}$, obtenus par POD :

$$\widehat{\varepsilon}^{vp}(t) := \sum_{i=1,I} \alpha_i^{vp}(t) \widehat{\varepsilon}_i^{vp} \quad (12)$$

Les éventuelles variables internes sont traitées de la même façon.

3.2. Problème local

Le système élastoviscoplastique obéit aux lois locales suivantes, avec $\varphi^*(\bar{\sigma})$ le potentiel de dissipation dual et a un paramètre matériau dépendant de la température et du flux instantané de neutrons rapides :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}(x) = \frac{\partial w}{\partial \bar{\varepsilon}} = C : (\bar{\varepsilon}^{tot}(x) - \bar{\varepsilon}^{vp}(x)) = \sum_{j=1,J} \alpha_j^{tot} \bar{\sigma}_j^{tot}(x) + \sum_{i=1,I} \alpha_i^{vp} \bar{\sigma}_i^{vp}(x) \\ \varepsilon^{vp}(x) = \frac{\partial \varphi^*(\bar{\sigma}(x))}{\partial \sigma} \\ \varphi(\sigma) = a \sigma_{eq}^m \end{array} \right. \quad (13)$$

3.3. Contraintes locales et forces réduites

L'état du système est complètement déterminé par le champ de déplacement \widehat{U}^{ext} (11) et par le champ $\widehat{\varepsilon}^{vp}$ (12) des déformations viscoplastiques à l'intérieur de l'assemblage, donc par les vecteurs $(\alpha^{tot}, \alpha^{vp})$ en base réduite. Nous déduisons directement le champ de contrainte $\hat{\sigma}$ associé à cet état, par superposition, à l'aide des champs de contraintes $\widehat{\sigma}_i^{vp}$ et $\widehat{\sigma}_j^{tot}$, qui sont respectivement les solutions *élastiques* des problèmes de structure élémentaires à chargements unitaires interne $\widehat{\varepsilon}_i^{vp}$ et externe \widehat{U}_j^{ext} . Ainsi, $\widehat{\sigma}_i^{vp}$ est le champ de contrainte qui se développe dans la structure élastique de manière à équilibrer le chargement de déformation $\widehat{\varepsilon}_i^{vp}$ qui lui est imposé, sans possibilité pour les nœuds d'interface de se déplacer. A l'inverse, $\widehat{\sigma}_j^{tot}$ est le champ de contrainte à plasticité nulle obtenu lorsque l'on applique le chargement extérieur \widehat{U}_j^{ext} de déplacement moyen sur la grille concernée. Lors de cette opération, des relations cinématiques imposent que seul le déplacement moyen des nœuds de la grille considérée soit égal au déplacement unitaire du mode \widehat{U}_j^{ext} , laissant ainsi le champ microscopique se développer. L'équation (14) ci-dessous est le pendant de l'équation (10) de la NTFA.

$$\widehat{\sigma}(t) := \sum_{i=1,I} \alpha_i^{vp}(t) \widehat{\sigma}_i^{vp} + \sum_{j=1,J} \alpha_j^{tot}(t) \widehat{\sigma}_j^{tot} \quad (14)$$

L'énergie libre dans la base complète est égale à celle dans la base réduite. Nous en déduisons les forces internes \overline{f}^{int} , associées aux modes \widehat{U}_j^{ext} . En faisant de même avec la puissance dissipée, les forces thermodynamiques réduites $\overline{\beta}^{vp}$, associées aux modes $\widehat{\varepsilon}_i^{vp}$ sont identifiées (15). Ces forces réduites dépendent linéairement de l'état du système, caractérisé par les I+J amplitude modales, via la matrice \overline{D} , calculée une seule fois :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\overline{f}^{int}, \overline{\beta}^{vp}) := \overline{D} \cdot (\alpha^{tot}, \alpha^{vp}) \\ D_{kl} = \iiint \widehat{\sigma}_l : \widehat{\varepsilon}_k \, dV \quad k, l = 1 : (I + J) \end{array} \right. \quad (15)$$

3.4. Loi de comportement approchée en base réduite

La loi d'écoulement, transposée en base réduite, relie les forces $\overline{\beta}^{vp}$ aux vitesses d'écoulement $\overline{\alpha}^{vp}$ et reste une loi de type puissance. On lui donne donc la forme (16) pour chaque mode d'écoulement viscoplastique afin de respecter le problème local (13).

$$\alpha_i^{vp} = a_i m (\beta_i^{vp})^{m-1} \quad (16)$$

La caractéristique modale a_i doit être précisée. Dans notre cas $a(x)$ dépend du champ thermique \hat{T} et du champ neutronique $\hat{\Phi}$. Elle peut donc être spatialement hétérogène. En égalisant la puissance dissipée dans l'assemblage en base réduite et en base complète, nous aboutissons à :

$$a_i(\hat{T}, \hat{\Phi}) = \frac{\iiint a(T(x), \Phi(x)) [\bar{\sigma}_i^{vp}(x)]_{eq}^m dV}{[\iiint \bar{\sigma}_i^{vp}(x) : \bar{\varepsilon}_i^{vp}(x) dV]^m} \quad (17)$$

Comme dans [3], nous effectuons un nécessaire couplage des forces qui régissent l'écoulement (16). Nous choisissons alors d'utiliser la norme du vecteur $\overline{\beta^{vp}}$ dans l'expression (18).

$$\alpha_i^{vp} = a_i(\hat{T}, \hat{\Phi}) m \|\overline{\beta^{vp}}\|^{m-1} \frac{\beta_i^{vp}}{\|\overline{\beta^{vp}}\|} \quad (18)$$

Cette dernière expression, approchée, constitue le second niveau de réduction de notre modèle réduit.

3.5. Potentiel total de dissipation dual approché

On introduit le potentiel total de dissipation dual de la structure φ^{*ASS} :

$$\varphi^{*ASS} = \iiint \varphi^*(\bar{\sigma}(x)) dV \quad (19)$$

On peut également l'écrire en base réduite en remplaçant les contraintes $\bar{\sigma}(x)$ par l'équation (14) :

$$\varphi^{*ASS}(\overline{\alpha^{tot}}, \overline{\alpha^{vp}}) = \iiint \varphi^* \left(\sum_{i=1,I} \alpha_i^{vp}(t) \bar{\sigma}_i^{vp}(x) + \sum_{j=1,J} \alpha_j^{tot}(t) \bar{\sigma}_j^{tot}(x) \right) dV \quad (20)$$

Cette expression exacte peut donc être évaluée en base complète, comme dans le cas de la NTFA hybride. En repartant de la relation (13), ce potentiel, convexe mais non quadratique, peut être approximé par la relation (21), qui constitue une borne inférieure du potentiel total :

$$\varphi_{approx}^{*ASS} = a \left[\iiint \sigma_{eq}^2(x) dV \right]^{m/2} \leq \varphi^{*ASS} \quad (21)$$

Or, le terme entre crochets correspond au carré de la norme des forces thermodynamiques $\overline{\beta^{vp}}$, puisque celles-ci sont également la projection du champ de contraintes sur la base des modes viscoplastiques $\bar{\varepsilon}_i^{vp}$, supposée ici suffisamment étendue. On exprime donc ce potentiel approché à l'aide des forces réduites :

$$\begin{cases} \varphi_{approx}^{*ASS} = a \|\overline{\beta^{vp}}\|^m \leq \varphi^{*ASS} \\ \|\overline{\beta^{vp}}\|^2 = \sum_{i=1}^I (\beta_i^{vp})^2 \end{cases} \quad (22)$$

Cette expression simple présente la même forme que le potentiel local $\varphi^*(\bar{\sigma}(x))$. Elle reste cependant une approximation, d'autant moins bonne que les modes utilisés sont hétérogènes et que l'exposant $m/2$ présente une valeur élevée.

3.6. Exploitation du potentiel approché

En partant du potentiel dual approché (21), nous complétons la relation linéaire de comportement (15) par une loi d'évolution réduite, reliant l'évolution des variables réduites d'écoulement α_i^{vp} et les forces thermodynamiques associées β_i^{vp} :

$$\dot{\bar{\alpha}}^{vp} = \frac{\partial \varphi^{*ASS}}{\partial \beta^{vp}} := \frac{\partial \varphi_{approx}^{*ASS}}{\partial \beta^{vp}} \quad (23)$$

Cette dérivation, directement appliquée à l'équation (22), nous donne une loi complémentaire approchée :

$$\bar{\alpha}^{vp} = a \|\bar{\beta}^{vp}\|^{m-1} \frac{\bar{\beta}^{vp}}{\|\beta^{vp}\|} \quad (24)$$

Notons que l'on retrouve le couplage des forces effectué à l'équation (17).

3.7. Remontée d'échelle et équilibre

Le comportement du VER de structure étant maintenant résolu en base réduite, nous pouvons remonter aux efforts intérieurs avec (15), puis aux déplacements moyens des grilles, utilisés dans la modélisation homogénéisée du cœur. In fine, les forces intérieures du modèle réduit d'assemblage combustible doivent équilibrer les forces extérieures dans la base des déplacements choisie (11) :


$$\widehat{F}^{ext} = \sum_{j=1,J} f_j^{int} \widehat{U}_j^{ext} \quad (25)$$

A l'échelle du cœur complet, il reste à traiter les problèmes de contact entre assemblages voisins, ainsi que le contact entre les assemblages périphériques et les internes de cuve. Pour ce faire, on s'appuiera sur les déplacements des grilles, définis au 3.1. On peut, par exemple, utiliser des éléments discrets de contact à 2 nœuds pour traiter ces contacts au sein de la modélisation du cœur REP, rassemblant plusieurs modèles réduits d'assemblages, positionnés côte à côte.

4. Validation de la méthode

Le cas test retenu prend la forme d'un immeuble de 3 étages, de dimensions 0.4m x 0.4m x 3m, dont la base est encadrée. Le maillage est formé de briques quadratiques (14748 nœuds et 57672 points d'intégration). Les caractéristiques élastiques sont celles de l'acier et on impose une loi de fluage de type Norton : $\varepsilon_{eq}^{vp} = 10^{-21} \sigma_{eq}^{1.4}$ afin d'obtenir un fluage significatif. Une série de 12 calculs préalables est effectuée sur une durée de 10^8 secondes, en 10 pas de temps égaux, avec des chargements en forces constantes, distribuées sur les planchers de chaque étage. Une analyse POD permet ensuite d'extraire les modes viscoplastiques et de créer le modèle réduit. Le tableau 1 donne un aperçu de la précision et du gain de temps obtenus à l'aide du modèle réduit présenté. Le modèle réduit hybride (intégration du fluage sur le modèle complet) indique l'adéquation de la base de modes utilisée pour ce problème.

Table 1 – Efficacité du modèle réduit sur un cas test de fluage

Type de calcul	Temps CPU (ms)	Erreur sur le déplacement	Modèle déformé (x120)
Référence EF Cast3M	78962	Référence.	
Modèle réduit hybride	56098	0.35%	
Modèle réduit à forces couplées	45	0.45%	

5. Conclusions

Nous avons proposé une méthode inspirée de la NTFA (Non linear Transformation Field Analysis), qui permet la réduction de modèle d'une structure élastoviscoplastique complète, plutôt que celle d'un volume élémentaire représentatif classique. Elle est basée sur 2 décompositions en modes spatiaux : d'une part, celle des déplacements macroscopiques moyens et, d'autre part, celle des déformations viscoplastiques microscopiques. Une fois identifié, ce modèle réduit de structure sera la brique élémentaire d'un modèle réduit de cœur de REP, qui en comporte environ 200. Enfin, l'écriture d'une loi de comportement en base réduite, dérivée d'un potentiel total de dissipation approximé, apporte le second niveau de réduction et garantit une diminution significative de la durée du calcul.

6. Perspectives

Le potentiel total de dissipation a été approché par la relation (21). Il est néanmoins souhaitable de l'estimer plus précisément afin de gagner en précision. Par exemple, en faisant appel à un développement au second ordre du potentiel de dissipation [6] [5]. L'idée est alors d'utiliser dans (19) la moyenne et la variance des contraintes associées à chaque mode de déformation. Une autre perspective concerne la réduction des glissements internes, qui peuvent apparaître entre les composants de l'assemblage combustible (les crayons combustibles sont simplement pincés par des ressorts au passage des grilles, ce qui représente plusieurs milliers de zones de contact avec frottement). Pour traiter ce problème, nous envisageons de décomposer les glissements sur une base de modes de glissements, suivant la méthode décrite dans ce travail pour traiter les déformations viscoplastiques de l'assemblage combustible.

Références

- [1] G.J. Dvorak, Transformation field analysis of inelastic composite materials. Proc. Roy. Soc., A 437.
- [2] G.J. Dvorak, Y.A. Bahei-El-Din, A.M. Wafa, The modeling of inelastic composite materials with the transformation field analysis. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng., 2 571–586, 1994.
- [3] J.C. Michel, P. Suquet, Nonuniform transformation field analysis, Int. J. Solids Struct., 40 :6937–6955, 2003.
- [4] J.C. Michel, P. Suquet, Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Elsevier, 193 5477–5502, 2004.
- [5] J.C. Michel, P. Suquet, A model-reduction approach to the micromechanical analysis of polycrystalline materials, J. Mech. Phys. Solids, 57 483–508, 2016.
- [6] P. Ponte Castañeda, Exact second order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials, J. Mech. Phys. Solids, 44, 827–862, 1996.