

# De l'intérêt de l'analyse isogéométrique pour la simulation multi-physiques/multi-champs de structures en grandes déformations

S. Lejeunes<sup>1</sup>, D. Eyheramendy<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMA, Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, {lejeunes,eyheramendy}@lma.cnrs-mrs.fr

**Résumé** — Nous explorons, dans cette communication, des formulations multi-physiques et/ou multi-champs pour résoudre des problèmes d'élasticité ou de thermo-élasticité en grandes déformations avec une contrainte de quasi-incompressibilité telle que l'on peut en rencontrer avec des matériaux de type élastomères. Nous montrons que l'analyse isogéométrique est tout à fait pertinente dans ce cadre car elle présente à la fois de très bonnes propriétés de convergence (et donc de stabilité) et une grande souplesse d'utilisation dans le choix des espaces d'approximations des différents champs.

**Mots clés** — isogéométrique, grandes déformations, multi-champs.

## 1 Introduction

L'analyse isogéométrique, introduite par Hughes et ses co-auteurs (voir [1, 2]), peut-être vu comme une méthode éléments-finis utilisant des bases de fonctions B-Spline ou NURBS issues du monde de la CAO en lieu et place de polynômes de Lagrange. La première conséquence de ce changement est que la discrétisation de l'espace n'est pas faite dans l'espace physique mais dans un espace paramétrique<sup>1</sup> beaucoup plus simple. Les propriétés de ces nouvelles fonctions d'approximations permettent de pouvoir décrire exactement des géométries complexes. Comparativement à des polynôme de Lagrange, nous disposons avec ces fonctions d'un degré de liberté supplémentaire puisque que l'on peut contrôler l'ordre de continuité au niveau des nœuds du maillage (indépendamment de l'ordre des fonctions et de la taille de maille). Enfin la définition par récurrence de ces fonctions permet de construire très simplement des bases d'ordre élevé. Toutes ces propriétés ont fait que l'analyse isogéométrique a rapidement été utilisé pour de nombreuses applications et que de nombreux auteurs ont déjà montré qu'elle présente de très bonnes qualités numériques. Le principal point limitant son extension dans les codes commerciaux est, à l'heure actuelle, le manque de liens entre les outils du monde de la CAO qui décrivent uniquement les contours d'un objet et le monde de la simulation qui a besoin de d'utiliser l'intérieur des objets (description volumique en 3D).

L'analyse isogéométrique est pour l'instant assez peu utilisée dans un contexte d'élasticité incompressible ou faiblement compressible. On peut noter néanmoins les travaux de [3, 4, 5, 6] pour des problèmes linéaires et non-linéaires avec différents types de formulations. Que ce soit pour ce type de problèmes ou d'autres problèmes multi-champs, la question de la stabilité numérique est centrale et la modification des espaces d'interpolations conduit à des stratégies spécifiques. Dans la thèse de Lei Zhang [7], nous avons exploré différents schémas dans le cadre d'une formulation mixte  $(\mathbf{u}, p)$  de l'élasticité incompressible en linéaire et non-linéaire en jouant sur :

- l'ordre des bases d'approximation de chaque champs (cinématique et pression)
- l'ordre de continuité des champs
- la sous discrétisation d'un ou de plusieurs champs

Nous avons pu dégager des approximations stables en petites déformations (qui correspondent aux propositions de [4, 3]) mais qui peuvent devenir instables étendues aux cas non-linéaires. Nous avons également proposé une formulation stable en grandes déformations qui n'a pas été à ce jour discutée dans la littérature. Avec le même formalisme et en jouant sur les mêmes leviers que dans le cas précédent,

1. Comparativement aux éléments finis classiques, il existe trois espaces dans une formulation IGA : l'espace physique (géométrie de l'objet), l'espace paramétrique (support à la construction des fonctions), l'espace de référence (pour l'intégration numérique par schémas de quadratures)

nous nous sommes également intéressé à des problèmes couplés de thermo-mécanique dans le cadre de l'élasticité entropique pour lequel il y a peu de travaux basés sur l'analyse isogéométrique. A l'aide de quelques exemples numériques, nous montrons qu'il y a un intérêt certain à utiliser l'analyse isogéométrique dans le cadre de formulations multi-champs/multi-physiques.

## 2 Formulations

Nous présentons brièvement les formulations variationnelles adoptées dans le cadre de l'hyperélasticité ou de la thermo-hyperélasticité. Nous reprenons le formalisme en énergie libre hybride, cf. [8], qui permet de faire directement le lien entre cadre thermodynamique et formulation mixte de type  $(\mathbf{u}, p)$  ou  $(\mathbf{u}, p, \Theta)$ .

### 2.1 Hyperélasticité quasi-incompressible

Partant du constat que les niveaux d'énergies nécessaires pour déformer un solide quasi-incompressible selon un mode isochorique ou volumique sont d'ordres de grandeurs très différents, nous adoptons (en suivant la proposition de P. Flory) la décomposition du gradient de la transformation,  $\mathbf{F}$ , en une partie volumique et une partie isochore t.q. :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{1} = \bar{\mathbf{F}}(J^{1/3} \mathbf{1}) \quad (1)$$

ou  $J = \det(\mathbf{F})$  représente la variation de volume,  $\mathbf{1}$  est le tenseur identité. A l'aide du formalisme décrit dans [8], on peut exprimer deux équations constitutives qui nous donnent une expression pour le premier tenseur de Piola-Kirchhoff,  $\bar{\mathbf{\Pi}}$ , et une loi de compressibilité à partir de la donnée d'une énergie libre hybride  $\varphi(\bar{\mathbf{F}}, q)$  ou  $q$  est une variable assimilable dans ce cas à la pression hydrostatique. La forme faible d'un problème d'équilibre, quasi-statique, et intégrant la loi de compressibilité obtenue, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}, q) \in (\mathcal{U} \times L^2(\Omega_0)) \text{ tel que } \forall (\delta \mathbf{u}, \delta q) \in (\mathcal{U}^0 \times L^2(\Omega_0)) : \\ & \int_{\Omega_0} (\bar{\mathbf{\Pi}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + q J \mathbf{F}^{-T}) : \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\partial \Omega_{f_0}} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} dS = 0 \\ & \int_{\Omega_0} \left( (J - 1) - \frac{\partial g}{\partial q} \right) \delta q d\Omega_0 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

avec  $\bar{\mathbf{\Pi}} = \partial \varphi / \partial \bar{\mathbf{F}}$ ,  $\mathbb{P}_{\mathbf{F}}$  l'opérateur déviatorique en configuration mixte,  $g$  un potentiel de compressibilité exprimé en fonction de la pression. Les espaces  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U}^0$  sont tels que  $\mathcal{U}^0 = \{\delta \mathbf{u} \in (H^1(\Omega_0))^n, \delta \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial \Omega_{u_d}\}$ ,  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega_0))^n, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } \partial \Omega_{u_d}\}$ , avec  $n$  la dimension de l'espace physique.

### 2.2 Elasticité entropique et couplage thermo-mécanique

Dans le cas de l'élasticité entropique modifiée, on introduit une décomposition supplémentaire sur le gradient de la transformation tel que l'eq. (1) devienne :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{F}}(J_m^{1/3} \mathbf{1})(J_{\Theta}^{1/3} \mathbf{1}) \quad (3)$$

ou  $J_{\Theta} = 1 + \alpha(\Theta - \Theta_0)$  représente la dilatation thermique et  $J_m = J/J_{\Theta}$  la variation de volume mécanique. La forme faible comprenant les équations d'équilibres mécaniques et thermiques ainsi que la loi de compressibilité peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}, \Theta, q) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{T} \times L^2(\Omega_0)) \text{ tel que } \forall (\delta \mathbf{u}, \delta \Theta, \delta q) \in (\mathcal{U}^0 \times \mathcal{T}^0 \times L^2(\Omega_0)) : \\ & \int_{\Omega_0} (\bar{\mathbf{\Pi}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}} + q \frac{J}{J_{\Theta}} \mathbf{F}^{-T}) : \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\partial \Omega_{f_0}} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} dS = 0 \\ & \int_{\Omega_0} \rho_0 C_p \Theta \delta \Theta d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} (J l_m + J l_q + \rho_0 r) \delta \Theta d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} J \mathbf{Q} \nabla_{\mathbf{X}} \delta \Theta d\Omega_0 \\ & \quad + \int_{\partial \Omega_{\Theta_0}} \mathbf{Q}_h \mathbf{N} \delta \Theta dS = 0 \\ & \int_{\Omega_0} \left( (J_m - 1) - \frac{\partial g}{\partial q} \right) \delta q d\Omega_0 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

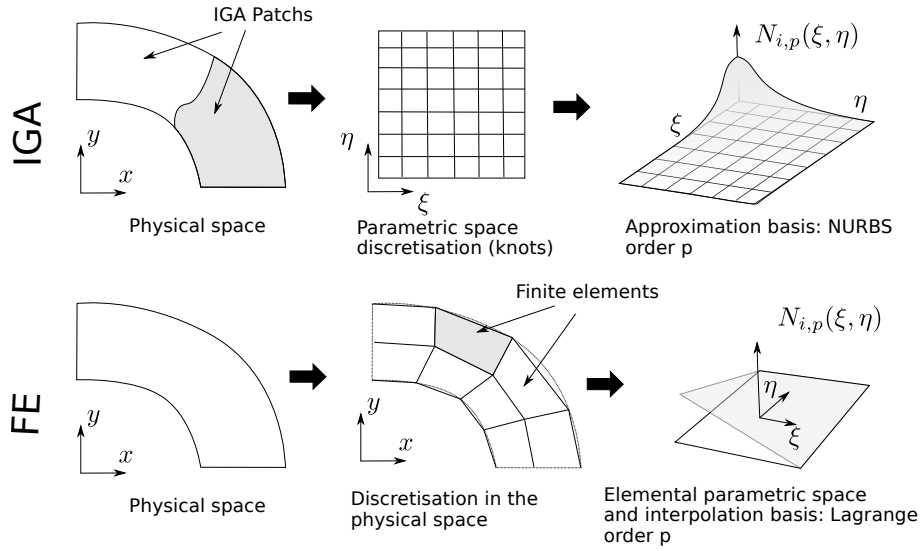


FIGURE 1 – Comparaison analyse isogéométrique/éléments-finis

avec  $C_p$  la capacité calorifique à pression constante,  $\mathbf{Q}$  le flux de chaleur dans la configuration eulérienne,  $l_m$  et  $l_q$  des termes de couplages thermoélastiques,  $r$  un apport volumique extérieur. Les espaces  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}^0$  sont tels que  $\mathcal{T}^0 = \{\delta\Theta \in (H^1(\Omega_0))^n, \delta\Theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\Theta_0}\}$  et  $\mathcal{T} = \{\Theta \in (H^1(\Omega_0))^n, \Theta = \Theta_d \text{ sur } \partial\Omega_{\Theta_0}\}$ , avec  $n$  la dimension de l'espace physique. Aux équations précédentes s'ajoutent également les conditions initiales thermiques et mécaniques. Avant de linéariser la forme précédente à l'aide d'un schéma de type prédicteur-correcteur, nous adoptons une discrétisation en temps de type euler implicite. Ceci permet de traiter des problèmes fortement couplés mais présente l'inconvénient de conduire à un système linéaire non symétrique.

### 3 Implémentation IGA

La figure 1 présente de manière synthétique une comparaison de la construction des espaces d'approximations avec la méthode des éléments-finis et l'analyse isogéométrique. A partir de maillages de l'espace paramétrique, on peut construire les champs approximatifs de la manière suivante (en 2D, cas  $(\mathbf{u}, q)$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(x, y) &= \sum_i \sum_j R_i^p(\xi) R_j^p(\eta) B_{ij}^u \\ \mathbf{q}^h(x, y) &= \sum_i \sum_j R_i^s(\xi) R_j^s(\eta) B_{ij}^q \end{aligned} \quad (5)$$

ou les exposants  $p$  et  $s$  définissent l'ordre des fonctions NURBS,  $R_j$  et  $R_i$ , de chaque champs qui sont construites de manière récursive. Les  $B_{ij}$  constituent les degrés de libertés (on parle de points de contrôles pour la géométrie) et se voient attribuer un poids qui est prédéfini et qui permet de décrire des géométries coniques. On peut jouer sur la continuité des fonctions d'approximation en répétant des nœuds et l'on peut donc devenir interpolant en certain point à la condition de répéter ces nœuds  $p + 1$  fois sur le bord de l'espace paramétrique et  $p$  fois à l'intérieur. On voit donc que l'on a une structure complètement similaire à des éléments finis à l'exception des deux points suivants :

- l'intégration numérique par quadrature de type schémas de Gauss ne peut être exacte et nécessite plus de points que dans le cas d'éléments finis standard du fait de l'approximation NURBS
- le support des fonctions d'approximations ne correspond pas à un élément de l'espace paramétrique, cela conduit à des systèmes linéaires beaucoup plus pleins qu'avec des éléments finis

Dans le cas de formulation multi-champs, on peut utiliser des espaces paramétriques propres à chaque champ (grille plus fine sur un champ par exemple), des ordres d'approximations et des ordres de continuité différents pour chaque champ. Dans la suite, pour les approximations IGA, on utilise la notation suivante (toujours dans le cas  $(\mathbf{u}, q)$ ) :  $U P_{sub}^{cont} P S_{sub}^{cont}$  ou  $p$  et  $s$  sont les ordres d'approximations de chaque champ, les indices *sub* indiquent le nombre de subdivision du vecteur de nœuds initial ( $sub = 1$ , pas de

subdivision) et *cont* indique la multiplicité des nœuds intérieurs à l'espace paramétrique et contrôle donc la continuité de chaque champ (*cont* = 1 indique une multiplicité de 1 et une continuité intérieure  $C_p$  du champ). Le nombre de degré de liberté de chaque champ est donc déterminé par les paramètres  $p$  (ou  $s$ ), *cont*, *sub*, et le nombre de nœuds par directions de l'espace paramétrique.

Nous avons implémenté les formes 2 et 4 dans la plateforme FemJava, développée au LMA, et qui nous permet en utilisant la même formulation et les mêmes comportements matériaux d'utiliser soit des éléments-finis de Lagrange soit des éléments NURBS (IGA).

## 4 Quelques exemples numériques

### 4.1 Stabilité dans le cas hyperélastique quasi-incompressible

On considère le test classique de la membrane de Cook en déformation plane dans le cadre de la formulation 2 et avec un potentiel d'énergie libre, hybride, très simple :

$$\rho_0 \Phi = \frac{\mu}{2} (I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3) - k_v \exp \frac{q}{k_v} + q + k_v \quad (6)$$

Les conditions aux limites de ce test correspondent à un encastrement sur la partie gauche et un effort linéique sur la partie droite (de direction constante, verticale et d'amplitude  $f$ ). La figure 2(b) nous montre que l'approximation à un ordre d'écart entre pression et cinématique est instable (alors qu'elle est stable dans le cas des E.F.). Pour le champ cinématique on observe également des phénomènes locaux d'oscillations, voir par exemple fig. 3(d). On peut tout de même constater que ce sont les approximations de même ordre entre la cinématique et la pression qui semblent générer ces oscillations (et qui ne semblent pas poser de problèmes lorsque la déformation est petite, c.f. [6] pour le cas de la subdivision). Au final, le cas où l'ordre d'approximation de la pression est de deux ordres inférieurs à celui de la cinématique semble être la seule alternative stable. On peut également noter que cette approximation passe les patch tests classiques. A notre connaissance, ce résultat n'a pas été encore reporté dans la littérature. Le tableau 1 résume les résultats obtenus.

	HPP	Cook Gr. Def.	Patch-Test
Même ordre	Instable	Instable	Failed
Augmentation d'un ordre pour $\mathbf{u}$	Instable	Instable	Failed
Augmentation de deux ordres pour $\mathbf{u}$	Stable	Stable	Pass
Continuité plus faible pour $\mathbf{u}$	Stable	Instable	Failed
Subdivision pour $\mathbf{u}$	Stable	Instable	Pass

TABLE 1 – Bilan sur la stabilité des approximations pour la formulation hyperélastique faiblement compressible

### 4.2 Sur les performances numériques de l'IGA

Un autre cas test que l'on peut considérer correspond au cas d'un bloc d'élastomère hyperélastique mis en compression. La géométrie et les conditions aux limites sont définies à la figure 4. Pour des raisons de symétrie, nous ne modélisons qu'un quart de la structure (un huitième pourrait suffire). Le comportement est identique à l'exemple précédent et le chargement s'effectue en déplacement à un niveau très important (50% de l'épaisseur). Ce niveau de chargement conduit en général à des difficultés de convergence : le pourcentage de chargement atteint numériquement diminue avec le raffinement du maillage. Ceci est dû à la localisation des déformations et du champ de pression dans les éléments extrêmes des bords libres. On peut donc se poser la question de la pertinence de la méthode IGA qui permet d'introduire un support élémentaire potentiellement plus grand que les éléments-finis, à pression discontinue, que nous utilisons. La figure 5 montre les résultats obtenus en terme de champ cinématique et de maximum de chargement atteint pour des maillages assez fins, on obtient une réponse cohérente quel que soit l'ordre d'approximation IGA. On peut également constater que l'analyse isogéométrique nous permet d'atteindre des niveaux de chargement plus importants que les éléments-finis quelque soit l'ordre

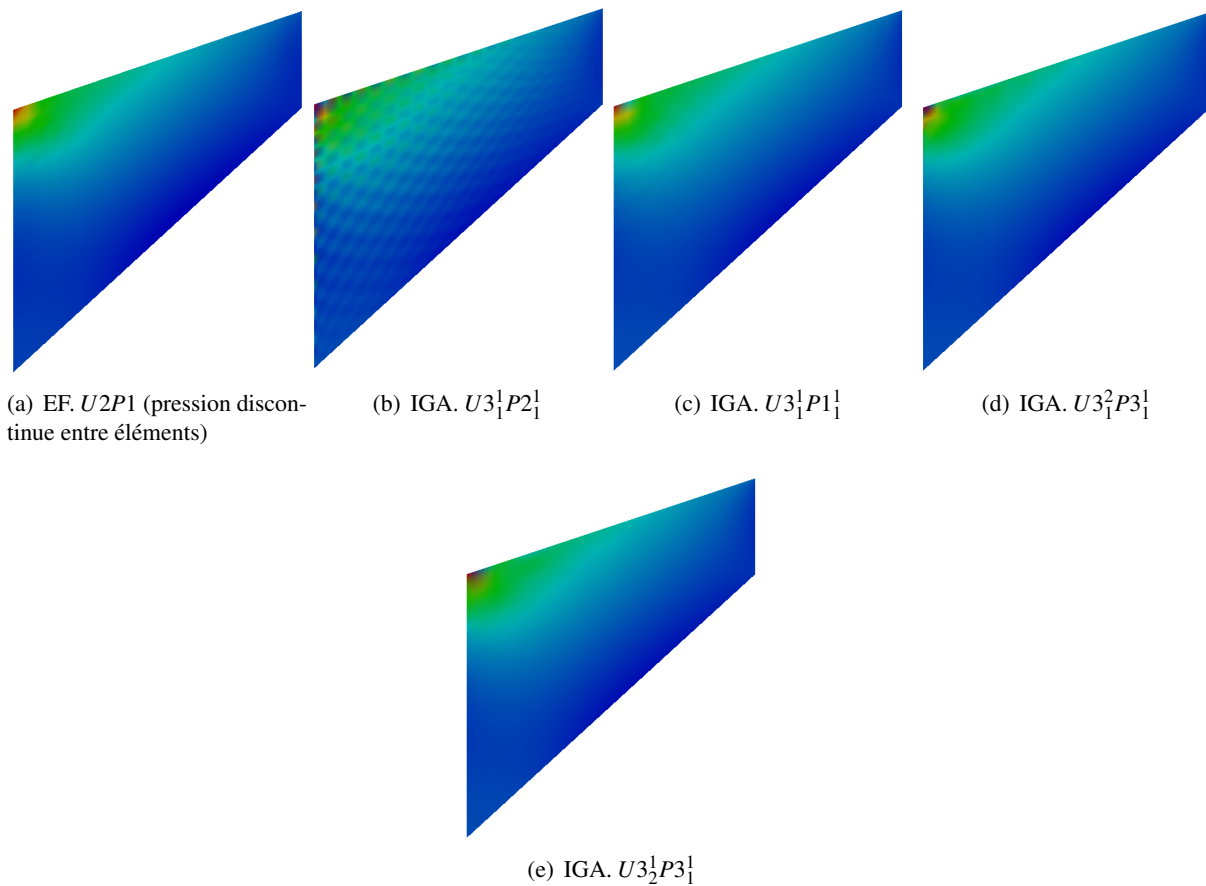


FIGURE 2 – Champ de pression, en  $MPa$ , pour le test de la membrane de Cook avec une formulation mixte déplacement/pression, même échelle d'isocouleurs, représentation en non-déformé ( $\mu = 4.62MPa, k_v = 1500MPa, f = 1N/mm$ ).

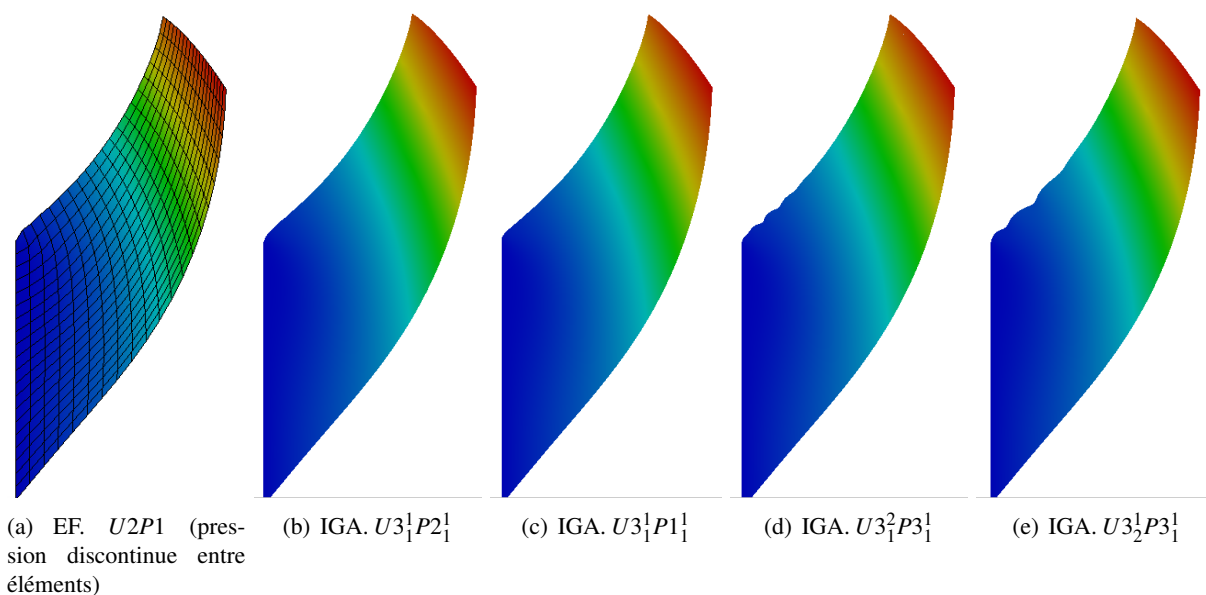


FIGURE 3 – Composante verticale du champ de déplacement, en  $mm$ , pour le test de la membrane de Cook avec une formulation mixte déplacement/pression ( $\mu = 4.62MPa, k_v = 1500MPa, f = 1N/mm$ ).

choisi.

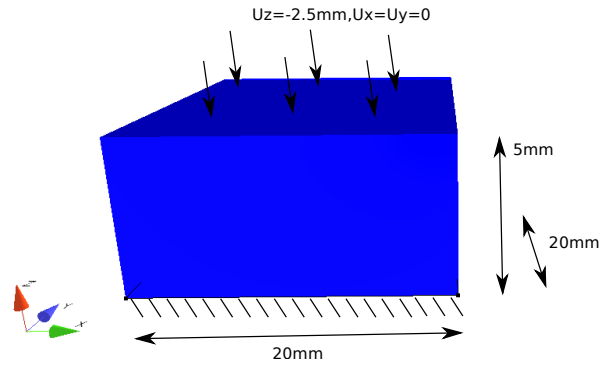


FIGURE 4 – Géométrie et conditions aux limites d'un bloc en compression

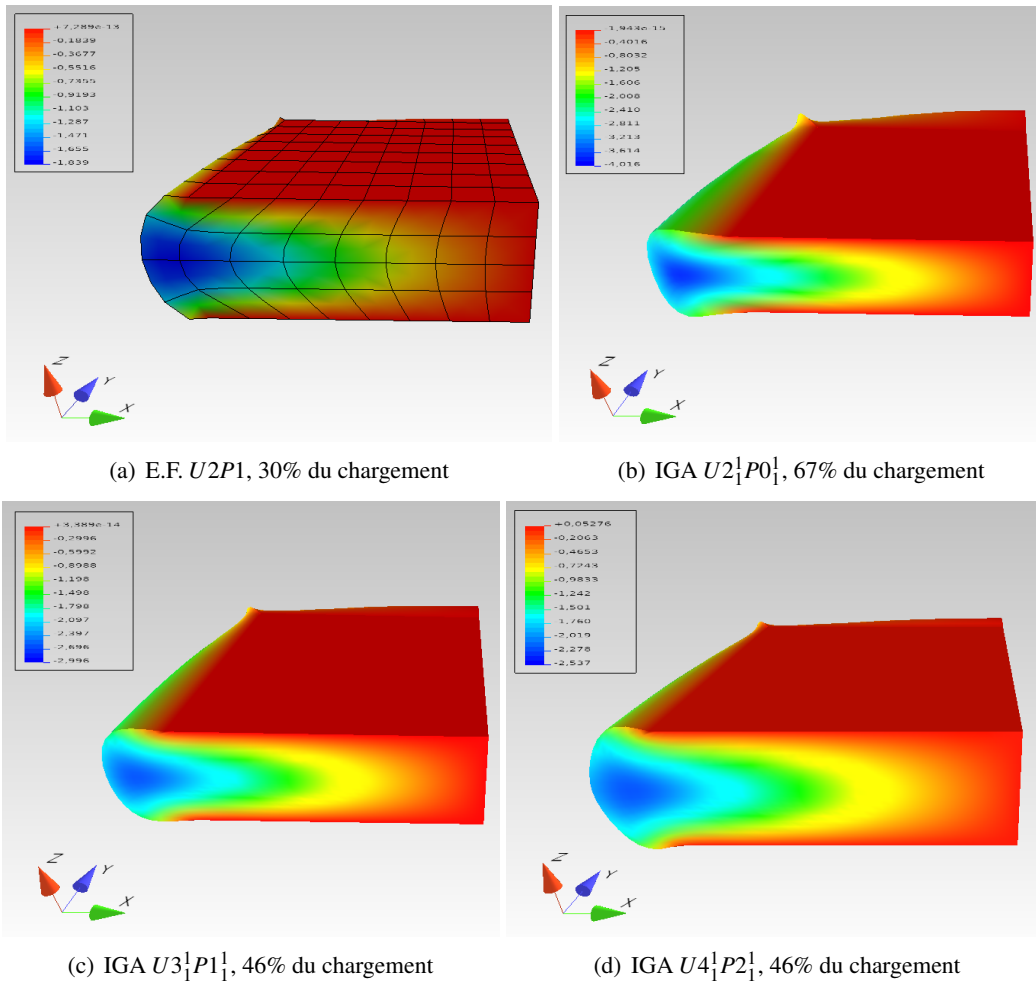


FIGURE 5 – Composante  $u_x$  du champ cinématique pour des maillages avec 4 éléments dans l'épaisseur ( $h = 1.25mm$ ).

### 4.3 Un cas thermoélastique

On considère pour ce cas l'énergie hybride suivante :

$$\rho_0\varphi = \frac{\mu}{2} \frac{\Theta}{\Theta_0} (I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3) + C_0 \left( \Theta - \Theta_0 - \Theta \log\left(\frac{\Theta}{\Theta_0}\right) \right) - C_1 \frac{(\Theta - \Theta_0)^2}{2\Theta_0} - k_v \exp \frac{q}{k_v} + q + k_v \quad (7)$$

La géométrie considéré est schématisée à la figure 6. Il s'agit d'une plaque rectangulaire avec deux entailles qui est étirée. On considère des conditions adiabatiques sur l'ensemble des surfaces externes. Le comportement entropique doit conduire pour ce test à une élévation de température corrélée au niveau de déformation (avec un phénomène d'inversion thermoélastique pour des faibles déformations à cause de la prise en compte de la dilatation thermique). Les figures 7 et 8 nous montre les solutions obtenues

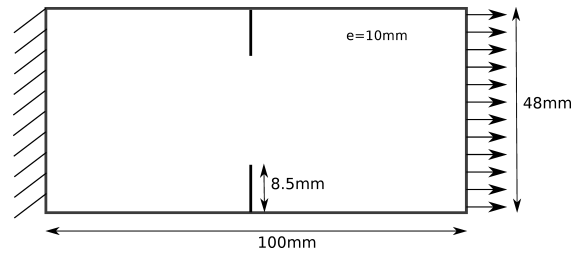


FIGURE 6 – Géométrie et conditions aux limites

avec la même formulation et la même loi de comportement par élément finis ou analyse isogéométrique à différent état d'élongation (même échelle d'isocouleur). On constate qualitativement un très bon accord sur la prédiction du champs de température avec une taille de modèle réduite par 5 pour l'IGA (en terme de nombre de degrés de liberté).

## 5 Conclusion

Les quelques exemples présentés dans ce travail permettent d'illustrer le fait que l'analyse isogéométrique présente un intérêt en terme de performances numériques (convergence, stabilité) pour des problématiques classiques de calcul des structures avec des formulations multi-physiques et/ou multi-champs. Comparativement au éléments-finis basés sur des polynômes de Lagrange elle offre plus de souplesse dans la construction des espaces d'approximation de chacun des champs : on peut jouer plus facilement sur les grilles de chaque champs (subdivision) puisque l'on se trouve dans un espace plus simple (espace paramétrique) mais on peut également contrôler l'ordre de continuité des champs. Ces caractéristiques nous ont permis de proposer des approximations stables dans un contexte hyperélas-

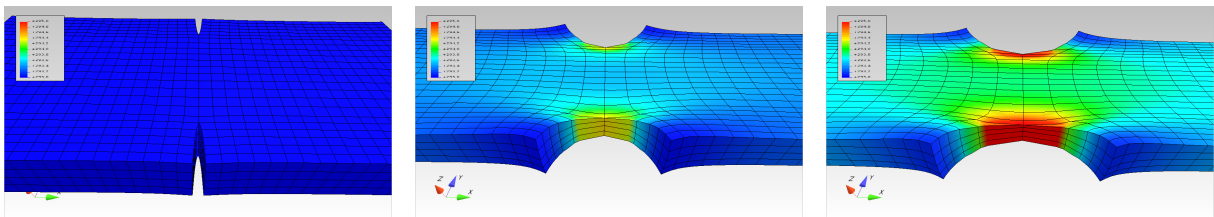


FIGURE 7 – Champs de température, solution Eléments-finis (U2T2P1)

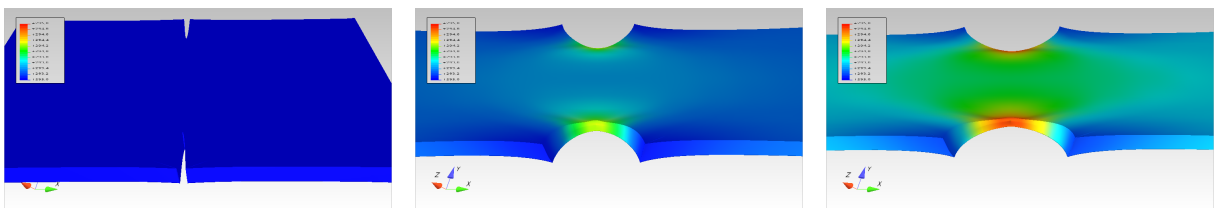


FIGURE 8 – Champs de température, solution IGA (U3T3P1)

tique ou thermo-hyperélastique faiblement compressible et d'atteindre des niveaux de déformations plus importants qu'avec des éléments-finis classiques.

## Références

- [1] T.J.R Hughes, J.A Cottrell, Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 194, 4135-4195, 2005
- [2] T.J.R Hughes, J.A Cottrell, Y. Bazilevs. *Isogeometric Analysis*, Wiley, 2009
- [3] A. Buffa, C. de Falco, G. Sangalli, *IsoGeometric Analysis : Stable elements for the 2D Stokes equation*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol 65, 1407-1422, 2010
- [4] P.N. Nielsen, A.R. Gersborg, J. Gravesen, N.L. Pedersen, *Discretizations in isogeometric analysis of Navier–Stokes flow*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 200, 3242-3253, 2011
- [5] T. Elguedj, T.J.R. Hughes, *Isogeometric analysis of nearly incompressible large strain plasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 268, 388-416, 2014
- [6] C. Kadapa, W.G. Dettmer, D. Perić. *Subdivision based mixed methods for isogeometric analysis of linear and nonlinear nearly incompressible materials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 305, 241-270, 2016
- [7] L. Zhang, *An isogeometric analysis approach for coupled multi-field problems at large strain*, Phd Thesis, Ecole Centrale Marseille, 2016
- [8] S. Lejeunes, D. Eyheramendy. *Hybrid free energy approach for nearly incompressible behaviors at finite strain*, Continuum Mech. Thermodyn., 2018