

Considérations sur une méthode d'homogénéisation stochastique en temps généralisée aux sollicitations non ergodiques

A.M. de Oliveira Filho¹, G. Puel², R. Cottureau³, K.Sab⁴

¹ MSSMat, Ecole CentraleSupélec, adaiton.moreira-de-oliveira-filho@student.ecp.fr

² MSSMat, Ecole CentraleSupélec, guillaume.puel@centralesupelec.fr

³ Aix-Marseille University, CNRS, Centrale Marseille, LMA, cottureau@lma.cnrs-mrs.fr

⁴ Laboratoire Navier, École des Ponts ParisTech, karam.sab@enpc.fr

Résumé — La méthode d'homogénéisation stochastique en temps a été proposée dans [5] pour résoudre des problèmes non linéaires soumis à des sollicitations stochastiques supposées stationnaires et ergodiques. Dans la présente communication, nous proposons de reprendre cette méthode dans un cadre plus général dans lequel la sollicitation n'est pas forcément stationnaire. La pertinence de l'approche est illustrée sur un problème académique pour lequel les solutions homogénéisée et par intégration directe sont comparées.

Mots clés — Homogénéisation stochastique en temps, viscoplasticité, non linéarité

1 Introduction

Le coût numérique de la simulation de problèmes en mécanique non linéaire par méthodes d'intégration directe devient rédhibitoire dès que la durée d'intérêt est très grande par rapport à la période caractéristique de la sollicitation. Pour rendre ce type de calcul numériquement envisageable, la méthode d'homogénéisation périodique en temps a été proposée dans [3] et validée dans [2] et [4] pour quelques problèmes de fatigue sous sollicitations périodiques de haute fréquence.

Plus récemment, [5] a introduit la méthode d'homogénéisation stochastique en temps pour traiter des problèmes caractérisés par des sollicitations stochastiques en se basant sur l'homogénéisation de matériaux hétérogènes linéaires ergodiques [6].

Dans cette communication, nous proposons de reprendre la méthode d'homogénéisation stochastique en temps sous des hypothèses moins restrictives. Plus précisément, la sollicitation n'est plus forcément stationnaire et sera modélisée comme la somme d'une composante déterministe dépendant du temps avec une composante stochastique faiblement stationnaire.

Le cadre du problème est posé dans la Section 2 et sa solution par la méthode d'homogénéisation est traitée dans la Section 3. La Section 4 fournit quelques considérations pour l'implémentation et quelques résultats numériques. Des considérations sur l'extension de la méthode à des problèmes plus réalistes sont enfin proposées dans la Section 5.

2 Cadre de la méthode

Le problème physique analysé est celui de l'évolution viscoplastique d'une barre encastrée-libre initialement non déformée et soumise à partir de $t = 0$ à une sollicitation surfacique sur son extrémité $x = L$. Le modèle d'évolution viscoplastique en 3D utilisé dans [4] se simplifie en se limitant au cas unidimensionnel et quasi-statique. Le domaine du problème est alors $x \in [0, L], t > 0$ et les inconnues sont le déplacement $u(x, t)$, la déformation élastique $\varepsilon^e(x, t)$, la déformation plastique $\varepsilon^P(x, t)$ et la contrainte $\sigma(x, t)$. Les conditions initiales sont supposées homogènes et la force $F(t)$ est supposée connue (Voir équations 1 à 4). Les paramètres sont E (module de Young), S (aire de la section), et K et n (modèle viscoplastique de Norton).

$$\varepsilon^e(x, t) + \varepsilon^P(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

$$\varepsilon^e(x, t) = \frac{\sigma(x, t)}{E} \quad (2)$$

$$\frac{d\varepsilon^P}{dt}(x, t) = \left\langle \frac{\sigma(x, t)}{K} \right\rangle_s^n \equiv \left| \frac{\sigma(x, t)}{K} \right|^n \text{sign} \left(\frac{\sigma(x, t)}{K} \right) \quad \varepsilon^P(x, t=0) = 0 \quad x \in [0, L] \quad (3)$$

$$\sigma(x=L, t) = F(t)/S \quad t > 0 \quad (4)$$

L'hypothèse de quasi-staticité permet d'écrire $\sigma(x, t) = \sigma(x=L, t) = F(t)/S, \forall x \in [0, L]$: le problème s'écrit donc pour un élément de volume avec inconnues $\varepsilon^P(t)$, $\varepsilon^e(t)$ et $\varepsilon(t)$. La composante plastique découplée vérifie l'équation non linéaire de Norton pour la viscoplasticité et est supposée initialement nulle (Équations 5).

$$\frac{d\varepsilon^P}{dt}(t) = \left\langle \frac{F(t, \tau)}{SK} \right\rangle_s^n \quad \varepsilon^P(t=0) = 0 \quad (5)$$

La sollicitation $F(t)$ qui apparaît dans l'équation 4 est caractérisée comme la combinaison d'une composante déterministe $F_d(t)$ et d'une composante stochastique $F_s(\tau)$ supposée stationnaire centrée et caractérisée par une variance σ_s^2 connue.

$$F(t, \tau) = F_d(t) + F_s(\tau) \quad \mathbb{E}[F_s(\tau)] = 0 \quad \mathbb{V}[F_s(\tau)] = \sigma_s^2 \quad (6)$$

3 Homogénéisation stochastique en temps

L'homogénéisation en temps se fait sous deux hypothèses : (i) identification des échelles de temps à des variables indépendantes et (ii) développement asymptotique des inconnues du problème. Ces deux hypothèses sont décrites dans la suite.

3.1 Séparation de variables

Deux échelles de temps caractérisent le problème : t , le temps physique, et τ , la période caractéristique de la composante stochastique de la sollicitation. Cette distinction a un sens physique précis : certaines sollicitations sont maîtrisées et évoluent de façon plutôt bien connue (un poids constant, par exemple) alors que d'autres évoluent au hasard (des instabilités, le vent, etc).

La période caractérisant le temps déterministe \mathcal{T}_t peut être définie soit à partir de la sollicitation (la fréquence pour une sollicitation harmonique), soit tenant compte du modèle de comportement.

La définition du processus stochastique par sa fonction de corrélation $R(\tau)$ permet d'introduire la période de corrélation $\mathcal{T}_c = \sigma^{-2} \int_{\mathbb{R}} R(\tau) d\tau$. Le rapport entre les échelles $\zeta = \mathcal{T}_c / \mathcal{T}_t$ est un indicateur de l'éloignement entre les échelles et se traduit par la notion d'indépendance entre les variables de temps.

3.2 Développement asymptotique

Le développement asymptotique consiste à supposer que, à l'image de la variable indépendante, les inconnues du problème évoluent aussi selon différentes échelles. Nous introduisons une approximation pour ε^P donnée par l'équation 7, où les ε_k^P sont des fonctions ayant le même ordre de ε^P .

$$\varepsilon^P(t, \tau) = \varepsilon_0^P(t, \tau) + \zeta \varepsilon_1^P(t, \tau) + \zeta^2 \varepsilon_2^P(t, \tau) + O(\zeta^3) \quad (7)$$

3.3 Homogénéisation stochastique

La séparation d'échelles et le développement asymptotique nous amènent à écrire l'équation de Norton sous la forme de l'équation 8.

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \varepsilon_0^P(t, \tau)}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial \varepsilon_0^P(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_1^P(t, \tau)}{\partial \tau} \right) + \zeta \left(\frac{\partial \varepsilon_1^P(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2^P(t, \tau)}{\partial \tau} \right) + O(\zeta^2) = \left\langle \frac{F(t, \tau)}{SK} \right\rangle_s^n \quad (8)$$

Comme $\zeta \ll 1$, on peut supposer que les termes avec les différentes puissances sont indépendants, la solution d'une telle équation dépend donc de la valeur de $\left\langle \frac{F(t, \tau)}{SK} \right\rangle_s^n$. On va s'intéresser particulièrement au cas où $\mathbb{E} \left[\left\langle \frac{F(t, \tau)}{SK} \right\rangle_s^n \right] = O(\zeta^0)$. Cela nous ramène à séparer le problème selon les différentes puissances de ζ :

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \varepsilon_0^P(t, \tau)}{\partial \tau} \right] = 0 \quad (9)$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \varepsilon_0^P(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_1^P(t, \tau)}{\partial \tau} \right] = \mathbb{E} \left[\left\langle \frac{F(t, \tau)}{SK} \right\rangle_s^n \right] \quad (10)$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_k^P(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{k+1}^P(t, \tau)}{\partial \tau} \right) \right] = 0 \quad k \in \{1, 2, \dots\} \quad (11)$$

L'équation 9 implique que la composante ε_0^P du développement asymptotique ne dépend que de la variable t . Ce résultat et l'hypothèse d'une distribution de probabilité centrée permettent de mettre en avant l'équation 12.

$$\frac{d\varepsilon_0^P(t)}{dt} = \mathbb{E} \left[\left| \frac{F(t, \tau)}{SK} \right|^n \text{sign} \left(\frac{F(t, \tau)}{SK} \right) \right] \quad (12)$$

4 Application numérique

Pour la vérification de la méthode décrite ci-dessus, nous considérons un problème de référence pour lequel une solution analytique $\varepsilon_o^P(t)$ peut être calculée. Cette solution sera ensuite comparée avec des ε^P , solution numérique du problème de départ (non-homogénéisée).

4.1 Solution analytique

Nous admettons dans la suite que le coefficient n de la loi de Norton soit impair, cette restriction permet de simplifier l'équation 12 qui s'écrit alors sans le terme non-linéaire lié au changement de signe, sous la forme de l'équation 13. Une solution analytique peut être avancée à partir de cette équation et d'un modèle de processus stochastique donné.

$$\frac{d\varepsilon_0^P(t)}{dt} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{F(t, \tau)}{SK} \right)^n \right] \quad n \in \{1, 3, \dots\} \quad (13)$$

En plus de l'hypothèse de stationnarité faible introduite dans l'équation 6, nous admettons que la composante stochastique de la sollicitation $F_s(\tau)$ suit une distribution Gaussienne. Tenant compte des expressions analytiques pour le moment d'ordre m de la distribution Gaussienne centrée - $\mathbb{E}[X^m] = 0$ si m impair et $\mathbb{E}[X^m] = \sigma^m(m-1)!!$ si m pair, $n!!$ étant le double factoriel - nous déduisons l'équation différentielle déterministe 14, où n^* est la partie entière de $n/2$.

$$\frac{d\varepsilon_0^P(t)}{dt} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{F_d(t)}{SK} + \frac{F_s(\tau)}{SK} \right)^n \right] = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} \left(\frac{F_d(t)}{SK} \right)^{n-p} \mathbb{E} \left[\left(\frac{F_s(\tau)}{SK} \right)^p \right] \quad (14)$$

$$= \left(\frac{F_d(t)}{SK} \right)^n + \sum_{k=1}^{n^*} \binom{n}{2k} \left(\frac{F_d(t)}{SK} \right)^{n-2k} \left(\frac{\sigma_s}{SK} \right)^{2k} (2k-1)!! \quad (15)$$

La solution de l'équation 15 peut être calculée numériquement avec une méthode comme Runge Kutta. Il convient de noter que ε_o^P est rendue déterministe par l'homogénéisation, ce qui est en accord avec les résultats mis en évidence dans [6] pour l'homogénéisation de matériaux hétérogènes aléatoires.

Tenant compte de la condition initiale homogène $\varepsilon_o^P(0) = 0$, la déformation plastique à l'ordre zéro s'écrit sous la forme de l'équation 16. Si, en particulier, la composante déterministe de la sollicitation est constante, soit $F_d(t) = f_o \in \mathbb{R}$, $\forall t \geq 0$, alors la déformation plastique évolue linéairement avec le temps (équation 17).

$$\varepsilon_o^P(t) = \int_0^t \left(\frac{F_d(t')}{SK} \right)^n dt' + \sum_{k=1}^{n^*} \binom{n}{2k} \left(\frac{\sigma_s}{SK} \right)^{2k} (2k-1)!! \int_0^t \left(\frac{F_d(t')}{SK} \right)^{n-2k} dt' \quad (16)$$

$$\varepsilon_o^P(t) = \left[\left(\frac{f_o}{SK} \right)^n + \sum_{k=1}^{n^*} \binom{n}{2k} \left(\frac{\sigma_s}{SK} \right)^{2k} (2k-1)!! \left(\frac{f_o}{SK} \right)^{n-2k} \right] t \quad (17)$$

4.2 Représentation spectrale

Pour les simulations numériques, la composante stochastique de la sollicitation a été modélisée par une distribution Gaussienne centrée ayant une densité spectrale de puissance $\hat{R}(\omega)$ à support compact $[-f_2, -f_1] \cup [f_1, f_2]$. L'approche structurée de la représentation spectrale a été utilisée pour les tirages de la sollicitation stochastique [1]. Soit I le support compact du spectre de la composante $F_s(\tau)$ du signal et $\{\omega_1, \dots, \omega_N\} \in I$ une partition; les coefficients de la fonction densité spectrale de puissance discrétisée sont définis par l'équation 18. Un échantillon $F_s(\tau^\theta)$ du chargement est généré à partir de 19. Ce modèle permet d'avoir une variable asymptotiquement Gaussienne avec $\mathbb{E}[F_s^\theta(\tau)] = 0$. et $\mathbb{V}[F_s^\theta(\tau)] = \sum_{k=-N}^N \hat{r}_k$.

$$\hat{r}_k = \int_{(\omega_{k-1} + \omega_k)/2}^{(\omega_k + \omega_{k+1})/2} \hat{R}(\omega) d\omega \approx \hat{R}(\omega_k) \Delta\omega_k \quad (18)$$

$$F_s^\theta(\tau) = \sum_{k=-N}^N \sqrt{2\hat{r}_k} \cos(\omega_k \tau + \phi_k) \quad \phi_k \sim \mathcal{U}([0, 2\pi]) \quad \forall k \quad (19)$$

4.3 Analyse de l'influence du degré de non linéarité sur la solution du problème

Pour les analyses qui suivent, le problème type est caractérisé par les paramètres suivants (sauf mention contraire) :

- Paramètres du modèle de viscoplasticité $E = 200GPa$, $K = 1.0 \cdot 10^8 uSI$, $n = 3$,
- Sollicitation stochastique : $F_d(t) = f_o = 45MPa$, $f_1 = 450Hz$, $f_2 = 500Hz$, $\sigma_s = 10\% f_o = 4.5MPa$. Pour un ensemble de 100 échantillons, on obtient pour une erreur relative sur la moyenne $e_\mu^{N=100} < 0.01\%$ et de $e_\sigma^{N=100} = 2.59\%$ sur l'écart-type. Pour $N=1000$, ces écarts sont $e_\mu^{N=1000} < 0.0005\%$ et $e_\sigma^{N=1000} = 0.67\%$.
- Discrétisations : pas de fréquence $df = 0.01Hz$, pas de temps $dt = 1e-5s$, intervalle de simulation $[0, 0.1]$. Les solutions de référence $\varepsilon^P(t = T)$ ont été calculées par intégration directe sur $N = 1000$ tirages indépendantes de la sollicitation.

Nous nous intéressons ici à l'influence du degré de non linéarité sur l'écart entre la solution homogénéisée $\varepsilon_o^P(T)$ et la solution complète $\varepsilon^P(T)$ calculée par une méthode d'intégration directe.

Dans le Tableau 1 nous considérons le problème défini dans la Section 4.3 avec $n \in \{1, 3, 5, 7, 15\}$. L'erreur relative entre la solution homogénéisée d'ordre zéro et la solution de référence est donné pour chaque n .

TABLE 1 – Analyse de l'influence de n sur l'écart entre la solution homogénéisée d'ordre zéro $\varepsilon_o^P(T)$ et la solution complète $\varepsilon^P(T)$ pour $N = 1000$ tirages de la sollicitation stochastique.

n	$\varepsilon_o^P(t = T)$	$\varepsilon^P(t = T)$	erreur relative
1	4.500000e-02	4.500024e-02	5.4e-06
3	9.385875e-03	9.383363e-03	2.7e-04
5	2.032577e-03	2.032718e-03	7e-05
7	4.561028e-04	4.560171e-04	2e-04
15	3.645000e-02	3.700338e-02	1.5e-02

On voit dans tous les cas que la solution homogénéisée $\varepsilon_o^P(T)$ est une bonne approximation pour la solution complète $\varepsilon^P(T)$, l'erreur relative étant de l'ordre de 0.01% pour des valeurs de n allant jusqu'à

7 et d'ordre de 1% pour $n = 15$. L'approximation est aussi bonne car la valeur de ζ est très faible, ce qui rend les termes $\zeta^k \varepsilon_k^P(t, \tau)$, pour $k = 1, 2, \dots$ négligeables dans le développement asymptotique (Équation 7). L'erreur relative plus importante pour le cas $n = 15$ montre que la convergence se fait plus lentement pour le problème avec un degré de non linéarité plus grand. On pourrait bien entendu substituer le critère sur le nombre maximal d'échantillons (fixé à $N = 1000$) par un critère basé sur la convergence de la moyenne des solutions pour un nombre croissant de tirages.

Dans les calculs ci-dessus, le paramètre n a été limité à des valeurs impaires de façon à simplifier le calcul analytique de la solution homogénéisée. L'estimation peut s'étendre à une valeur de n quelconque sous l'hypothèse que la barre est presque sûrement en traction pour tout t , c'est-à-dire que la probabilité de la compression est nulle $\mathbb{P}(\frac{\sigma(x,t)}{K} < 0) = 0$ et que le terme associé dans l'équation 20 est donc négligeable.

$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{\sigma(x,t)}{K} \right|^n \text{sign} \left(\frac{\sigma(x,t)}{K} \right) \right] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\sigma(x,t)}{K} \right)^n \mathbb{I}_{[\frac{\sigma(x,t)}{K} \geq 0]} \right] - \mathbb{E} \left[\left| \frac{\sigma(x,t)}{K} \right|^n \mathbb{I}_{[\frac{\sigma(x,t)}{K} < 0]} \right] \quad (20)$$

Pour le problème défini ci-dessus, par exemple, $\mathbb{P}(F(t) < 0) = F^{\mathcal{N}(0,1)}(-10) < 10^{-23}$, $F^{\mathcal{N}(0,1)}$ étant la fonction de répartition de la distribution normale centrée réduite. Pour $n = 4$, par exemple, nous retrouvons $\varepsilon_o^P(t) = 4.347893e-03$ alors que $\varepsilon^P(T) = 4.343245e-03$ (toujours pour $N = 1000$ échantillons), soit une erreur relative de $1e-03$.

4.3.1 Solution pour un $F_d(t)$ harmonique

Dans un souci de simplification, nous nous sommes restreints dans le problème académique traité ci-dessus à une force $F(t, \tau)$ faiblement stationnaire avec moyenne $\mathbb{E}[F(t, \tau)] = f_o$ et $\mathbb{V}[F(t, \tau)] = \sigma_s^2 \forall t, \tau$. Cette restriction n'est pourtant pas nécessaire dans l'approche d'homogénéisation proposée dans cette communication, l'espérance pouvant dépendre du temps : $\mathbb{E}[F(t, \tau)] = \mathbb{E}[F_d(t)] = \mu(t)$.

Considérons à présent une sollicitation $F(t, \tau) = F_d(t) + F_s(\tau)$ dans laquelle la fonction temporelle est $F_d(t) = f_o(1 + \cos(\omega_o t))$ avec $\omega_o = 20 \cdot 2\pi$ rad/s et la puissance de la loi de Norton est $n_{exp} = 5$. Les autres paramètres sont ceux définis dans la Section 4.3. $F_d(t)$ apparaît explicitement dans l'équation différentielle 16. La solution $\varepsilon_o^P(t)$ est une très bonne approximation pour la solution $\varepsilon^P(t)$ du problème de départ, comme illustré dans la Figure 1.

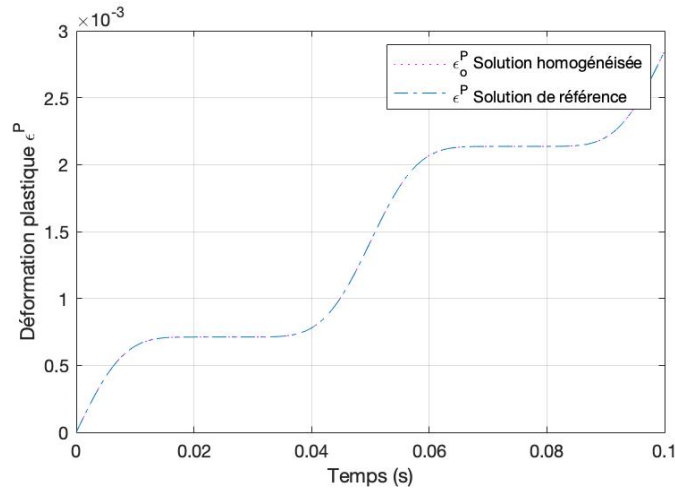


FIGURE 1 – Évolution de la déformation plastique pour une sollicitation avec composante déterministe $F_d(t) = f_o(1 + \cos(\omega_o t))$. Solution complète ε_o^P calculée pour $N = 100$ échantillons.

5 Conclusions et Perspectives

Nous avons montré qu'une méthode d'homogénéisation stochastique en temps peut être étendue aux sollicitations qui ne sont ni ergodiques ni stationnaires. En effet, l'approche d'homogénéisation proposée

est basée sur un critère simple de séparation des échelles temporelles selon leur nature aléatoire ou déterministe. La comparaison entre les solutions homogénéisée et complète pour un problème académique simplifié a permis d'illustrer le potentiel de l'approche.

Le modèle de comportement utilisé est bien entendu très simplifié, l'extension de la méthode à des lois de comportements plus réalistes étant une des perspectives pour la suite. L'extension au cas dynamique dépend de la prise en compte d'un terme inertiel dont l'ordre doit être comparé avec les termes déjà analysés dans le cas quasi-statique. Cette analyse permettrait d'ailleurs de mieux préciser le ratio entre échelles ζ et donc le caractère homogénéisable ou non du problème.

Références

- [1] L. de Carvalho Paludo, V. Bouvier, R. Cottreau *Scalable parallel scheme for sampling of Gaussian random fields over very large domains*, Int J Numer Methods Eng, Wiley, 117 :845–859, 2019.
- [2] A. Devulder, D. Aubry et G. Puel. Two-time scale fatigue modelling : application to damage, Computational Mechanics, 45 :6, 637–646, 2010.
- [3] T. Guennouni, D. Aubry *Réponse homogénéisée en temps de structures sous chargements cycliques*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série II, 303 :20, 1765–1768, 1986.
- [4] G. Puel, D. Aubry *Efficient fatigue simulation using periodic homogenization with multiple time scales*, Journal for Multiscale Computational Engineering, BegellHouse, 291-318, 2014.
- [5] G. Puel, K. Sab. *Sur une méthode d'homogénéisation stochastique en temps*, 12ème Colloque national en calcul des structures, 2015.
- [6] K. Sab. *On the homogenization and the simulation using periodic homogenization with multiple time scales*, International Journal for Multiscale Computational Engineering, BegellHouse, 587-607, 1992.