

# Analyse Isogéométrique espace-temps pour le Calcul des Structures

C. Saadé<sup>1</sup>, S. Lejeunes<sup>1</sup>, D. Eyheramendy<sup>1</sup>, R. Saad<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, LMA UMR 7031, Marseille, France, [saade@lma.cnrs-mrs.fr](mailto:saade@lma.cnrs-mrs.fr), [lejeunes@lma.cnrs-mrs.fr](mailto:lejeunes@lma.cnrs-mrs.fr), [eyheramendy@lma.cnrs-mrs.fr](mailto:eyheramendy@lma.cnrs-mrs.fr)

<sup>2</sup>Université Libanaise, Fanar, Liban, [dr.roysaad@hotmail.com](mailto:dr.roysaad@hotmail.com)

**Résumé** — La méthode des éléments finis est aujourd’hui la méthode numérique la plus utilisée en mécanique. Généralement utilisée dans la discrétisation de l’espace, elle est souvent associée à une méthode de type différences finies pour la résolution en temps. Nous nous intéressons dans cette étude à appliquer un schéma de discrétisation en espace et en temps simultanément. Nous utilisons l’Analyse Isogéométrique (IGA) comme méthode de discrétisation (voir [1]) dans le but de profiter des qualités numériques de la méthode en résolution en temps. Dans ce papier, nous validons partiellement la stabilité de manière numérique des tests de convergence triviaux pour les équations de la chaleur et d’ondes en 1D, et vérifions qualitativement le potentiel de la méthode sur un modèle mécanique de viscoélasticité dynamique 1D.

**Mots clefs** — Analyse isogéométrique, Résolution espace-temps.

## 1. Introduction

Dans la plupart des outils de calcul, la dépendance en temps des champs inconnus est traitée par des méthodes de type différences finies ou par des schémas discrets d’ordre faible. La discrétisation espace-temps consiste à considérer la dépendance en temps comme la dépendance en espace, c’est à dire en utilisant les mêmes fonctions formant la base d’approximation et en utilisant un principe variationnel espace-temps. L’un des premiers travaux vraiment avancés sur l’espace-temps est celui de Hughes et Hulbert [2], dans lequel les auteurs s’intéressent à une formulation élastodynamique et la propagation d’un soliton dans une barre élastique. Dans notre étude, pour la base d’approximation, nous utilisons l’analyse isogéométrique, basée sur des approximations B-Spline ou NURBS. Ceci permet, d’une part, de pouvoir représenter exactement des géométries complexes (voir [1]), et d’autre part, d’avoir des bases d’approximation plus riches que les polynômes de Lagrange classique (ordre de continuité inter-éléments élevé). Pour la formulation variationnelle, nous utilisons une méthode de Galerkin continue.

Dans la littérature, on peut trouver quelques références qui proposent des méthodes espace-temps pour la résolution numérique de différents problèmes. Par exemple, les articles [3],[4],[5] et [6] traitent de l’équation de la chaleur. Dans [5], la méthode des éléments finis est utilisée en espace et en temps simultanément pour l’établissement de la formulation variationnelle espace-temps de l’équation de la chaleur. Dans [3], l’équation de la chaleur a été traité à partir d’une méthode isogéométrique espace-temps stable. Dans [4], les auteurs utilisent une méthode de Galerkin discontinue en temps pour traiter numériquement l’équation de la chaleur en isogéométrique espace-temps, et dans [6], une méthode de Galerkin discontinue en espace et en temps a été employé dans un cadre isogéométrique.

Dans ce papier, on propose d’étudier l’application de formulations isogéométriques espace-temps à différents problèmes, équation d’onde et équation de la chaleur. Nous étudions en particulier la convergence et la stabilité sur ces cas tests triviaux, avant de valider qualitativement la stratégie sur un problème de viscoélasticité dynamique.

## 2. Analyse isogéométrique espace-temps de problèmes de base

Dans cette section, nous proposons de conduire des tests de convergence en espace-temps pour des problèmes fondamentaux rencontrés classiquement en mécanique et disciplines connexes.

## 2.1. Équation de la chaleur

### 2.1.1 Problème

On considère un domaine 1D de longueur  $L$  soumis à apport volumique de chaleur  $f$ . La forme forte (S) du problème parabolique aux valeurs limites et initiales s'écrit sous la forme (Dirichlet pur):

Soit  $f : ]0, L[ \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \{L\} \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \{0\} \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_0 : ]0, L[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

trouver  $u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = 0, \quad \text{sur } ]0, L[ \times ]0, T[$$

Conditions de bord :  $u(L, t) = g(t)$ ,  $t \in ]0, T[$  et  $u(0, t) = h(t)$ ,  $t \in ]0, T[$

Condition initiale :  $u(x, 0) = u_0(x) = 0$  avec  $x \in ]0, L[$

où  $u$  est la température,  $f$  est la source de chaleur,  $g$  et  $h$  sont les températures prescrites,  $u_0$  est la condition initiale,  $\rho$  représente la densité,  $c$  représente la capacité calorifique et  $\kappa$  représente la conductivité.

### 2.1.2 Formulation variationnelle espace-temps

On note  $Q = [0, L] \times [0, T]$  le domaine spatio-temporel et on définit les espaces de Sobolev suivant :

$$H_0^{1,0}(Q) = \left\{ u \in L_2(Q) : \frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(Q), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \right\}$$

$$H_{0,0}^{1,1} = \left\{ u \in L_2(Q) : \frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(Q), \frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, u(x, T) = 0 \right\}$$

La formulation variationnelle faible peut être écrite comme suit :

Trouver  $u(x, t) \in H_0^{1,0}(Q)$  tel que :  $a(u, v) = l(v)$ ,  $\forall v \in H_{0,0}^{1,1}(Q)$  avec :

$$a(u, v) = \int_Q \rho v(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dQ + \int_Q \kappa \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dQ,$$

$$l(v) = \int_Q v(x, t) f(x, t) dQ + \int_Q u_0(x) v(x, 0) d\Omega.$$

Soit  $S^h$  et  $V^h$  les sous-espaces d'approximation de dimension finie respectivement reliés à  $H_0^{1,0}(Q)$  et  $H_{0,0}^{1,1}$ . La formulation de Galerkin approximée est la suivante :

Trouver  $u^h(x, t) \in S^h$  tel que :  $a(u^h, v^h) = l(v^h)$ ,  $\forall v^h \in V^h$  où :

$$a(u^h, v^h) = \int_Q \rho v^h(x, t) \frac{\partial u^h}{\partial t}(x, t) dQ + \int_Q \kappa \frac{\partial v^h}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u^h}{\partial x}(x, t) dQ,$$

$$l(v^h) = \int_Q v^h(x, t) f(x, t) dQ + \int_Q u_0(x) v^h(x, 0) d\Omega$$

### 2.1.3 Test de convergence

On considère le domaine espace-temps  $Q = (0,1)^2$ . Les paramètres du problème sont choisis tels que  $\kappa = 10 \text{ W}/(\text{m.K})$ ,  $c = 1 \frac{\text{kg.m}^2}{\text{K.s}^2}$  et  $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ . On choisit pour second membre :  $f = 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi t) + 4\pi^2 \kappa \sin(2\pi x) \sin(2\pi t)$ . La solution exacte du problème est alors :

$$u_{\text{exacte}} = \sin(2\pi x) \sin(2\pi t)$$

Le domaine de calcul (domaine carré de largeur 1 m) est donné en Figure 1 avec conditions initiale et de bords de Dirichlet homogène.

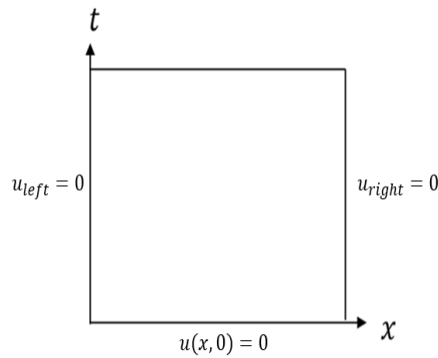


Figure 1 Domaine de calcul espace-temps avec conditions de bords et condition initiale homogènes pour l'équation de la chaleur

Les courbes de convergence de l'erreur en  $u$  en norme  $L^2$  pour ce problème IGA espace-temps sont représentées pour plusieurs degrés  $p$  des fonctions B-Splines d'ordre de continuité maximal et plusieurs valeurs de conductivité thermique  $\kappa$ .

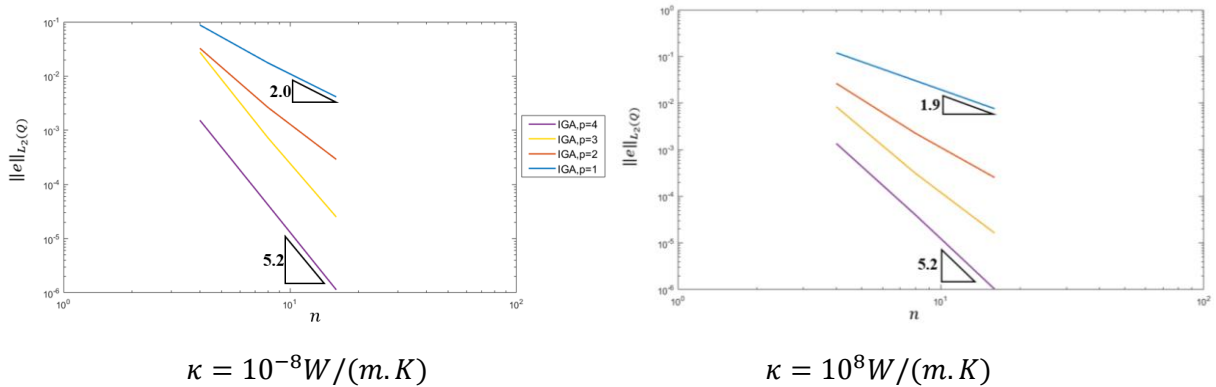


Figure 2 Courbes de convergence en erreur  $L^2$  de l'équation de la chaleur pour les degrés  $p = 1, 2, 3$  et  $4$  et pour les conductivités  $\kappa = 10^{-8} \text{ W}/(\text{m.K})$  et  $\kappa = 10^8 \text{ W}/(\text{m.K})$  en fonction du nombre d'éléments par coté ( $n$ )

On remarque qu'on obtient toujours des taux de convergence optimaux quelle que soit la valeur de  $\kappa$ . En d'autres termes, on trouve toujours une pente de  $p + 1$ ,  $p$  étant le degré des fonctions de base. La formulation sur le problème est convergente sur le cas test considéré.

## 2.2. Équation d'ondes

On est intéressé notamment par l'étude de l'équation d'ondes appliquée à la barre 1D de longueur  $L$ . La formulation forte (S) du problème hyperbolique de valeur limite initiale est :

Soit  $f : ]0, L[ \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \{L\} \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \{0\} \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_0 : ]0, L[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
trouver  $u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\rho c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = 0, \quad \text{sur } ]0, L[ \times ]0, T[$$

Conditions de bord :  $u(L, t) = g(t) = u_{right}$  et  $u(0, t) = h(t) = u_{left}$ ,  $t \in ]0, T[$

Conditions initiales :  $u(x, 0) = u_0(x)$   $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \dot{u}_0(x)$   $x \in ]0, L[$

### 2.2.1 Formulation variationnelle espace-temps

Dans cette section, on définit les espaces de Sobolev suivants :

$$H_0^{1,2}(Q) = \left\{ u \in L_2(Q) : \frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(Q), \frac{\partial u}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L_2(Q), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \right\}$$

$$H_{0,0}^{1,0} = \left\{ u \in L_2(Q) : \frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(Q), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, u(x, T) = 0 \right\}$$

La formulation variationnelle faible du problème est :

Trouver  $u(x, t) \in H_0^{1,2}(Q)$  tel que  $a(u, v) = l(v)$ ,  $\forall v \in H_{0,0}^{1,0}(Q)$  avec

$$a(u, v) = - \int_Q \rho c v(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) dQ + \int_Q \kappa \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dQ,$$

$$l(v) = \int_Q v(x, t) f(x, t) dQ$$

On considère  $S^h$  et  $V^h$ , sous-espaces d'approximation à dimension finie de  $H_0^{1,2}(Q)$  et  $H_{0,0}^{1,0}$  respectivement. La formulation de Galerkin de ce problème hyperbolique est la suivante :

Trouver  $u^h(x, t) \in S^h$  tel que  $a(u^h, v^h) = l(v^h)$ ,  $\forall v^h \in V^h$  avec :

$$a(u^h, v^h) = - \int_Q \rho c v(x, t) \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2}(x, t) dQ + \int_Q \kappa \frac{\partial v^h}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u^h}{\partial x}(x, t) dQ,$$

$$l(v^h) = \int_Q v^h(x, t) f(x, t) dQ$$

### 2.2.3 Tests de convergence

Pour la résolution de ce problème, on considère le domaine espace-temps  $Q = (0,1)^2$ . Les paramètres du problème sont choisis comme précédemment, c'est-à-dire  $c = 10 \text{ W}/(m.K)$ ,  $c = 1 \frac{kg.m^2}{K.s^2}$  et  $\rho = 1 \text{ kg}.m^{-3}$ . Des conditions de bords et initiales de type Dirichlet homogènes sont choisis pour illustrer l'approche. Le domaine spatio-temporel est représenté dans la Figure 1. On impose le chargement volumique suivant :

$$f = \rho c 2 \sin(2\pi x) \left[ (t - T_{final})^2 + 4t(t - T_{final}) + t^2 \right] + \kappa 4\pi^2 t^2 (t - T)^2 \sin(2\pi x)$$

de façon à avoir la solution exacte telle que :  $u_{exacte} = t^2(t - T_{final})^2 \sin(2\pi x)$

Les courbes de convergence de ce problème IGA espace-temps en norme  $L^2$  sont représentées ci-dessous pour plusieurs valeurs de degrés  $p$  et pour plusieurs valeurs de conductivités  $\kappa$ .

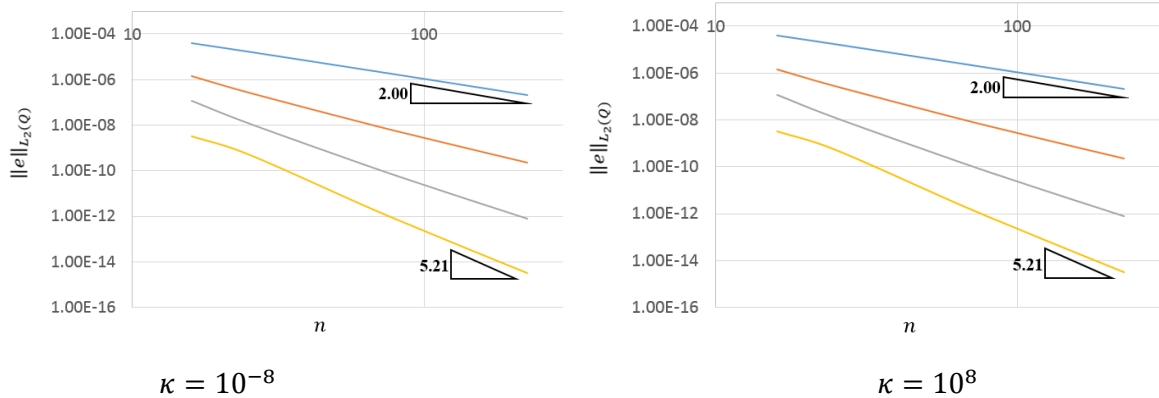


Figure 3 Courbes de convergence en erreur  $L^2$  de l'équation d'ondes pour les degrés  $p = 1, 2, 3$  et  $4$  et pour les conductivités  $\kappa = 10^{-8}W/(m.K)$  et  $\kappa = 10^8W/(m.K)$

Les taux optimaux de convergence sont aussi obtenus dans le cas hyperbolique pour cette étude.

### 3. Viscoélasticité à variable interne

#### 3.1 Le problème

On considère un domaine espace en 1D de longueur  $L$  et encastrée à l'extrémité gauche. On s'intéresse à l'équation de Maxwell appliquée à cette barre. Les équations du problème de viscoélasticité sont données par (en utilisant des notations classiques) :

$$\text{div}_x \sigma + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ Equation d'équilibre}$$

$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_v$  décomposition de la déformation en parties élastique et visqueuse

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{1}{\tau} \sigma \text{ loi d'évolution de la viscosité}$$

$$\sigma = E \epsilon_e \text{ loi de comportement}$$

Le schéma équivalent est donné dans la Figure 4 **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**

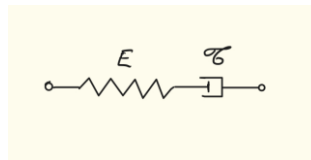


Figure 4 Schéma rhéologique équivalent de Maxwell

La formulation forte du problème 1D du problème viscoélastique s'écrit :

Soit  $f : ]0, L[ \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}, h : \{0\} \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ , trouver  $u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, v : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $w : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{E}{\tau} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - v(x, t) \right), \quad \text{sur } ]0, L[ \times ]0, T[$$

$$E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right) + f(x, t) = \rho \frac{\partial w}{\partial t}(x, t), \quad \text{sur } ]0, L[ \times ]0, T[$$

$$\text{Conditions de bord : } u(0, t) = h(t) = 0, \quad t \in ]0, T[$$

$$\text{Conditions initiales : } v(x, 0) = v_0(x) \text{ et } u(x, 0) = u_0(x), \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x) = w(x, 0) = 0 \\ x \in ]0, L[$$

$$\text{On pose } w(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$$

### 3.2 Formulation variationnelle espace-temps

La formulation variationnelle faible du problème est :

Trouver  $(u(x, t), v(x, t), w(x, t)) \in H^{1,0}(Q) \times H^{1,1}(Q) \times H^{0,1}(Q)$  tel que

$$\int_Q w_1(x, t) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) dQ - \int_Q w_1(x, t) \frac{E}{\tau} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dQ + \int_Q w_1(x, t) \frac{E}{\tau} v(x, t) dQ = 0, \forall w_1 \in L^2(Q)$$

$$\int_Q w_2(x, t) w(x, t) dQ - \int_Q w_2(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dQ = 0, \forall w_2 \in L^2(Q)$$

$$\int_Q \frac{\partial w_3}{\partial x}(x, t) E \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dQ + \int_Q w_3(x, t) E \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) dQ + \int_Q w_3(x, t) \rho \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) dQ \\ = \int_Q f(x, t) w_3(x, t) dQ, \forall w_3 \in H^{1,0}(Q)$$

Soit  $S^h, V^h, W^h, W_1^h, W_2^h, W_3^h$  les sous-espaces d'approximation de dimension finie reliés à  $H^{1,0}(Q), H^{1,1}(Q), H^{0,1}(Q), L^2(Q), L^2(Q)$  et  $H^{1,0}(Q)$  respectivement. La formulation de Galerkin approximée du problème est la suivante :

Trouver  $(u^h(x, t), v^h(x, t), w^h(x, t)) \in S^h \times V^h \times W^h$  tel que

$$\int_Q w_1^h(x, t) \frac{\partial v^h}{\partial t}(x, t) dQ - \int_Q w_1^h(x, t) \frac{E}{\tau} \frac{\partial u^h}{\partial x}(x, t) dQ + \int_Q w_1^h(x, t) \frac{E}{\tau} v^h(x, t) dQ = 0, \forall w_1^h \\ \in W_1^h$$

$$\int_Q w_2^h(x, t) w^h(x, t) dQ - \int_Q w_2^h(x, t) \frac{\partial u^h}{\partial t}(x, t) dQ = 0, \forall w_2^h \in W_2^h$$

$$\int_Q \frac{\partial w_3^h}{\partial x}(x, t) E \frac{\partial u^h}{\partial x}(x, t) dQ - \int_Q w_3^h(x, t) E \frac{\partial v^h}{\partial x}(x, t) dQ - \int_Q w_3^h(x, t) \rho \frac{\partial w^h}{\partial t}(x, t) dQ \\ = \int_Q f(x, t) w_3^h(x, t) dQ, \forall w_3^h \in W_3^h$$

### 3.3 Résultats numériques

On souhaite dans cette section comparer les solutions du problème pour plusieurs valeurs de masse volumique  $\rho$  (influence de la dynamique). La longueur de la barre est toujours considérée égale à 1, et le temps final est  $T = 4s$ . Le domaine est montré dans la Figure 5. Les paramètres du problème sont choisis tels que  $E = 1MPa, \tau = 1.51s$ .

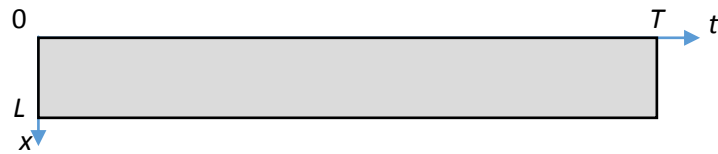


Figure 5 Domaine espace-temps (1D espace)

La charge volumique  $f$  est définie linéaire par morceaux sur le temps :

$$f(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{pour } 0 \leq t \leq 1, \quad \forall x \\ (-t)^i, i = \{1, \dots, 12\} & \text{pour } 1 \leq t \leq 4, \quad \forall x \end{cases}$$

Dans la Figure 6,  $u$  et  $v$  sont respectivement représentés et sont calculées pour des fonctions de base B-Splines de degré  $p = 2$ , et pour  $\rho = 0.1 kg.m^{-3}$ . On choisit de prendre pour le maillage 20 éléments en espace et 40 éléments en temps. Les figures sont représentées avec des échelles d'isocouleurs différentes.

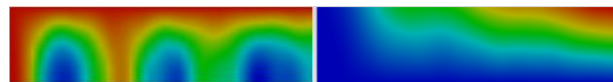


Figure 6 Évolution de  $u$  et  $v$  pour  $\rho = 0.1 kg.m^{-3}$  (BSplines en degré  $p = 2$ )

On observe une réponse avec des amplitudes initiales plus importantes qui s'amortissent fortement ensuite. On constate donc que la formulation adoptée nous permet d'obtenir qualitativement la réponse d'un système dynamique couplé (amorti).

On souhaite dans un second temps comparer les solutions  $u$  et  $v$  pour différents maillages en temps et maillage fixe en espace (20 éléments en espace). Pour cela, on fixe le degré et la masse volumique en prenant  $p = 2$  pour toutes les solutions, et  $\rho = 0.1 kg.m^{-3}$ . La Figure 7 représente l'évolution en fonction du temps du centre de la barre ( $x = 0.5 m$ ).

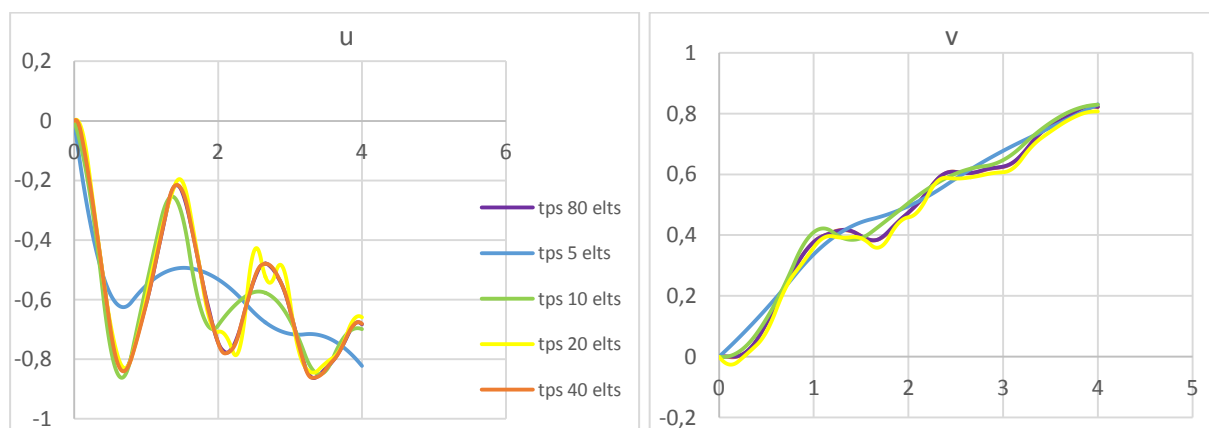


Figure 7 Évolution de  $u$  et  $v$  en fonction du temps (BSplines de degré  $p = 2$ ) et  $\rho = 0.1 kg.m^{-3}$  par rapport aux maillages en temps de 5, 10, 20, 40 et 80 éléments

## 4. Conclusion

Dans ce papier, nous avons présenté des formulation IGA espace-temps pour trois différents types d'équations : l'équation de la chaleur, l'équation d'ondes et une équation d'onde couplées avec une équation de viscoélasticité à variable interne. Nous avons vérifié sur des cas tests simples la convergence de la formulation espace-temps pour l'équation d'onde et l'équation de la chaleur 1D. Ces résultats encourageants devraient être consolidés sur d'autres configurations (forme de domaine, conditions de bords) de façon à avoir plus de certitude sur la convergence de la méthode, et bien sûr validées sur de l'espace 2D et 3D. Nous avons vérifié qualitativement sur un problème de viscoélasticité de base (modèle rhéologique de type Maxwell) le potentiel de ce type de formulation dans le cas de problème couplés. Cela nous permet de mettre en œuvre la formulation qui classiquement est résolue par une méthode de discrétisation en espace (éléments finis ou IGA) associée à une méthode d'intégration en temps. La loi d'évolution est ici intégrée sur le domaine global de résolution contrairement aux approches classiques où l'intégration est local au point d'intégration. Un schéma itératif est nécessaire pour obtenir la solution, ce qui n'est pas le cas dans notre approche. Ces tests de bases permettent d'illustrer le potentiel de l'approche. Les prochaines étapes consisteront à comparer ce schéma aux résolutions en temps classiques. Afin de développer la méthode pour des résolution en temps très long, nous étendrons ce schéma Galerkin espace-temps continu à un schéma Galerkin discontinu en temps. On souhaite notamment appliquer l'IGA espace-temps pour des multiphysiques couplées dans le cadre de matériaux complexes fortement sollicités thermiquement et mécaniquement. Les applications visées sont en particulier la simulation de fatigue/vieillessement de pièces industrielles en élastomère soumises à des charges multiphysiques.

## 5. Références bibliographiques

- [1] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 4135–4195, 2005.
- [2] T. J. R. Hughes, G. M. Hulbert, Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*,66 (3) 339–363, 1988.
- [3] U. Langer, S. E. Moore, M. Neumuller. Space-time isogeometric analysis of parabolic evolution equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 306:342–363, 2016.
- [4] C. Hofer, U. Langer, M. Neumüller, I. Touloupoulos, Time-Multipatch Discontinuous Galerkin Space-Time Isogeometric Analysis of Parabolic Evolution Problems, *RICAM-Report*, 2017-26.
- [5] S. E. Moore, A stable space-time finite element method for parabolic evolution problems, *math.NA*, 2017.
- [6] S. E. Moore, Space-Time Multi-patch Discontinuous Galerkin Isogeometric Analysis for Parabolic Evolution Problems, *math.NA*, 2017.