

## Approche ondulatoire pour la simulation de vibration non linéaire incluant les moyennes fréquences

P. De Brabander<sup>1</sup>, P. Ladevèze<sup>1</sup>, O. Allix<sup>1</sup>, P. Hubert<sup>2</sup>, P. Thevenet<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LMT, ENS Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94800 Cachan,

<sup>2</sup> ArianeGroup, 66 Route de Verneuil, 78130 Les Mureaux,

---

**Résumé** — Le calcul du choc à la source induit par une découpe pyrotechnique et de sa propagation incluant les vibrations moyennes fréquences induites est aujourd'hui un défi. Dans le domaine des moyennes fréquences les approches ondulatoires sont préconisées. Pour les appliquer dans des cas non-linéaires l'approche actuelle consiste, en utilisant la transformée de Fourier, à itérer entre un problème de vibration forcée sur l'intervalle fréquentiel considéré et des problèmes locaux temporel pour résoudre la non-linéarité. L'objet de ce travail concerne la possibilité d'utiliser une méthode large bande dans le domaine fréquentiel pour donner de l'efficacité à cette méthode.

**Mots clés** — Moyennes fréquences, VTCR, Réduction de modèle : SVD et PGD, Conditionnement.

---

### Introduction

La maîtrise des chocs ou impacts incluant les moyennes ou hautes fréquences se pose dans de nombreux secteurs industriels ; en effet, bien que les oscillations associées à ces fréquences soient très petites, les énergies en jeu peuvent être extrêmement importantes et donc susceptibles de détériorer les matériels électroniques et informatiques très sensibles à ces fréquences. C'est en particulier le cas des chocs pyrotechniques de découpe des étages intervenant lors des premières phases de lancement des lanceurs. Le contenu fréquentiel associé à ces chocs est très large bande. Une optimisation à moindre coût des systèmes de découpes passe par des simulations réalistes du choc à la source et de sa propagation dans le lanceur. Pour ce problème des expériences numériques menées par la méthode des Eléments Finis dans le domaine temporel, outre les coûts de calcul associés, ont conduit à des résultats jugés non significatifs du fait des amortissements numériques induits. Une voie potentielle pour pallier ce problème est de traiter le problème avec des méthodes ondulatoires bien adaptées pour le traitement des problèmes en moyennes fréquences [5]. C'est pourquoi elles ont fait l'objet de nombreux travaux. Ces travaux diffèrent par la façon utilisée pour introduire les ondes : technique d'enrichissement [16], méthode variationnelle ultra-faible [4], méthode des moindres carrés [13], méthode de l'enrichissement discontinu [6], méthode des éléments libres [2], méthode des éléments de frontière [14].

La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) [10] utilisée dans ce travail se distingue par sa prise en compte au moyen d'une formulation variationnelle coercive sur les conditions aux limites ou de raccord entre sous-domaines. La robustesse des solutions associées a permis de l'étendre à des domaines variés : assemblages de plaques et de coques [15], [3] problèmes d'acoustique 3D [7], problèmes de Helmholtz hétérogènes [11]. Dans ce contexte une difficulté majeure est d'intégrer les non-linéarités caractéristiques de la découpe pyrotechnique. Une approche candidate consiste à traiter le problème dans le domaine fréquentiel avec une méthode de résolution linéaire et de procéder par itérations avec le domaine temporel pour traiter la non linéarité. L'étape linéaire traitée fréquence par fréquence est particulièrement coûteuse. Aussi des stratégies de combinaisons entre la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) et la Proper Generalized Decomposition (PGD) [7] [1] ont été proposées par le passé sans que leur robustesse soit jugée suffisante pour attaquer les problèmes non-linéaires. Notre travail s'inscrit dans la continuité de ces recherches. Deux aspects y sont examinés. Le premier celui de savoir si la solution TVRC est réductible en fréquence. Pour cela nous effectuons un prétraitement régularisant les portraits d'ondes de la solution TVRC pour pouvoir appliquer ensuite une SVD (Singular Value Decomposition). Cette solution réduite sert ensuite de référence pour l'étude de la réduction pour la méthode PGD. Différentes stratégies PGD sont étudiées par la suite pour essayer d'en dégager la mieux adaptée au problème.

# 1 Présentation de la méthode TVRC et mise en évidence du problème de robustesse des portraits d'ondes en fonction de la fréquence.

La première question regardée dans ce sens est celle de la réductibilité du problème. Pour cela à partir d'une solution calculée sur une plage de fréquence nous recherchons la meilleure approximation de cette solution sous la forme réduite. Comme de nombreuses méthodes d'ondes représentant la solution de façon intégrale, la TVRC souffre d'un mauvais conditionnement. Plus précisément, à une pulsation donnée si la solution converge lorsque l'on augmente la discrétisation angulaire des d'ondes choisie, le portrait de ces ondes (amplitude avec la direction) est instable. La conséquence est que pour des pulsations proches les portraits peuvent être complètement différents alors que les champs solutions sont voisins. Or c'est ce portrait qui est l'inconnu principale de la TVRC. Dans cette partie, après avoir rappelé les aspects principaux de la TVRC en acoustique, une illustration simple du problème de réductibilité du portrait en fonction de la fréquence est proposée.

## 1.1 Problème de référence choisi

Le problème de référence très simple choisi est celui d'une cavité acoustique 2D. Le fluide dans la cavité est caractérisé par sa célérité  $c$ , sa densité  $\rho$  et son amortissement  $\eta_0$ . Pour simplifier l'analyse il est supposé que l'excitation du fluide provient des conditions au bord. Le bord  $\partial\Omega$  est décomposé en trois bords :  $\partial_p\Omega$  où la pression  $p_d$  est imposée,  $\partial_v\Omega$  où la dérivée de la pression par rapport à la normale à la surface  $v_d$  est imposée et  $\partial_Z\Omega$  où la condition de Robin  $h_d$  est imposée avec une impédance de frontière notée  $Z$  amortissante ( $Re(Z) \geq 0$ ). Le domaine de pulsation  $\omega$  considéré est noté  $I_\omega = [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$ , avec  $\omega_0$  la pulsation centrale et  $\Delta\omega$  la largeur de bande. La pression acoustique complexe vérifie alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta p + k^2 p = 0 & \text{sur } \Omega \times I_\omega \\ Zp + \frac{\partial p}{\partial n} = h_d & \text{sur } \partial_Z\Omega \times I_\omega \\ p = p_d & \text{sur } \partial_p\Omega \times I_\omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = v_d & \text{sur } \partial_v\Omega \times I_\omega \end{cases} \quad (1)$$

avec  $k = \frac{\omega}{c}(1 + i\eta)$  le nombre d'onde,  $n$  la normale sortante de  $\partial\Omega$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . Lorsque  $\Omega$  est subdivisé en  $N_e$  éléments  $\Omega_e$  ne se recouvrant pas, les conditions de transmission suivantes doivent être vérifiées aux frontières sur les interfaces  $\Gamma_{e e'}$  entre deux éléments  $e$  et  $e'$ .

$$\begin{cases} p_e - p_{e'} = 0 & \Gamma_{e e'} \times I_\omega \\ \frac{\partial p_e}{\partial n} + \frac{\partial p_{e'}}{\partial n} = 0 & \Gamma_{e e'} \times I_\omega \end{cases} \quad (2)$$

## 1.2 Rappel sur la TVRC dans le cas de l'acoustique 2D

L'espace des fonctions  $S(\Omega_e)$  vérifiant les équations intérieures sur un domaine  $\Omega_e$  est noté :

$$S(\Omega_e) = \{p_e / \Delta p_e + k^2 p_e = 0 \text{ sur } \Omega \times I_\omega\} \quad (3)$$

La norme énergétique associée est notée  $\|p\|_S^2 = \|\nabla p\|_{L^2}^2 + |k|^2 \|p\|_{L^2}^2$ . Les champs de  $S(\Omega_e)$  peuvent être représentés par des fonctions de Herglotz, c'est-à-dire par une superposition d'ondes planes dans toutes les directions :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e : L^2(C) &\rightarrow S(\Omega_e) \\ A &\rightarrow p_e = \mathcal{H}_e(A_e) = \int_{\theta=0}^{2\pi} A_e(\theta) e^{iks_\theta(x-x_e)} d\theta \end{aligned} \quad (4)$$

avec  $s_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ . Les  $A_e(\theta)$  correspondent aux inconnues du problème. Leur représentation en fonction de  $\theta$  est appelée portrait. Elles sont déterminées à partir de la prise en compte des conditions de bords

et de continuité à travers une formulation variationnelle : trouver  $(\dots, p_e, \dots) \in \dots \times S(\Omega_e) \times \dots$  tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_e} \frac{1}{2} \int_{\partial_e \Omega} (Z p_e + \frac{\partial p_e}{\partial n} - h_e)(q_e^* + \frac{1}{Z} \frac{\partial q_e^*}{\partial n}) dS + \sum_{\Omega_e} \int_{\partial_p \Omega} (p_e - p_{de}) \frac{\partial q_e^*}{\partial n_e} dS + \sum_{\Omega_e} \int_{\partial_v \Omega} (\frac{\partial p_e}{\partial n_e} - v_{de}) q_e^* dS \\ + \sum_{\Gamma_{e'e'}} \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{e'e'}} [(p_e - p_{e'}) (\frac{\partial q_e^*}{\partial n_e} - \frac{\partial q_{e'}^*}{\partial n_{e'}}) + (\frac{\partial p_e}{\partial n_e} + \frac{\partial p_{e'}}{\partial n_{e'}}) (q_e^* + q_{e'}^*)] dS = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\forall (\dots, q_e, \dots) \in \dots \times S(\Omega_e) \times \dots$$

Le symbole \* correspond à l'opération complexe conjugué. Une approximation numérique du problème est effectuée en choisissant une représentation de dimension finie de  $A_e(\theta)$ . Plusieurs représentations peuvent être choisies, mais dans ce travail l'espace d'approximation retenu est celui appelé espace des rayons. Pour un nombre de rayons  $N_e$  dans le domaine  $\Omega_e$ , l'approximation du portrait  $A_e$  s'écrit :

$$A_e \approx \sum_{n=1}^{N_e} A_e^n \delta_{\theta}^{\theta_n} \quad (6)$$

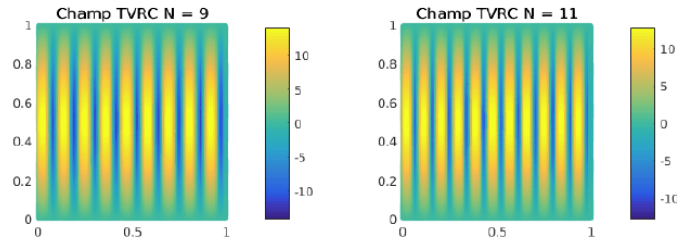
où  $\{\theta_n\}$  correspond à une discrétisation régulière de  $[0, 2\pi]$ . L'approximation du champ  $p_e$  dans  $S^h(\Omega_e)$  s'écrit alors :

$$p_e = \mathcal{H}_e(A_e) \approx \sum_{n=1}^{N_e} A_e^n e^{iks_{\theta_n}(x-x_e)} \quad (7)$$

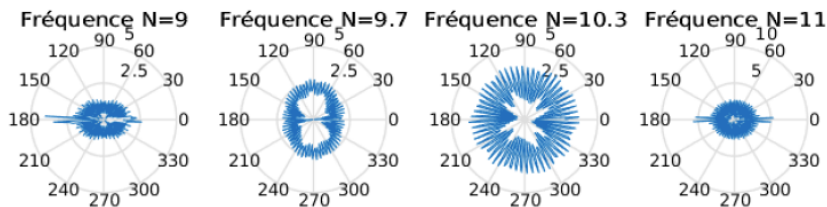
À une fréquence  $\omega$  fixée, les  $A_e^n$  sont les degrés de liberté inconnus du problème du sous domaine  $e$  et correspondent aux amplitudes des ondes planes à déterminer. La substitution de (7) dans (5) conduit au système matriciel :

$$K_{\omega} A_{\omega} = L_{\omega} \quad (8)$$

où  $K_{\omega}$  et  $L_{\omega}$  sont respectivement les formes linéaires et bilinéaires associée à la formulation variationnelle (5). La taille de  $A$ , notée  $N$  correspond au nombre total de rayons choisis pour l'ensemble des éléments. Le problème de base de l'irrégularité du portrait en fonction du nombre d'onde réduit est illustré dans le cas simple le plus simple possible d'une cavité acoustique rectangulaire.



(a) Champ  $p$  pour deux nombre d'onde



(b) Portraits associés  $A$

FIGURE 1 – Evolution du portrait en fonction du nombre d'ondes réduit dans une cavité acoustique

Le problème de la réduction de la solution en fonction de la fréquence est celui de la recherche d'une approximation efficace du portrait sous d'une somme de "modes" en  $\theta$  multiplié par une amplitude

dépendant de  $\omega$  sous la forme PGD :

$$A(\omega; \theta) \approx \sum_{m=1}^M \lambda^m(\omega) \Lambda^m(\theta), \quad (9)$$

Pour être efficace le nombre  $M$  de modes doit être "petit". On conçoit aisément que cela ne peut-être le cas si l'on part de portraits évoluant aléatoirement comme ceux décrits sur la figure 1. On cherche donc dans la suite tout d'abord à construire une version robuste de ces portraits, version appelée "portrait effectif" permettant d'en effectuer une SVD servant de référence.

## 2 Réductibilité du problème : portrait effectif et SVD

Si le portrait issu de la TVRC n'est pas stable la solution elle est tout à fait régulière. L'idée est donc de définir le portrait dit effectif à partir de cette solution. Ce portrait est défini à partir du portrait initial de façon à ce que :  $\|p\|_{S(\Omega_\omega)} = A_{\omega \text{ ef}}^T A_{\omega}$ . Pour l'obtenir on introduit la matrice  $M_\omega$  telle que :

$$\|p\|_{S(\Omega_\omega)} = (A_\omega)^H M A_\omega \quad (10)$$

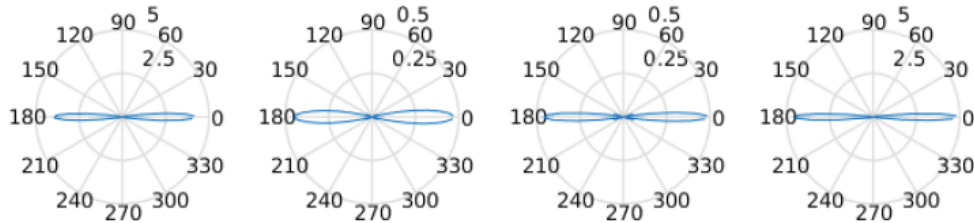
L'opérateur  $^H$  correspond à l'opération transposée conjugué. Une technique de construction de la matrice  $M$  pour un domaine à géométrie quelconque à partir d'un maillage éléments finis du domaine est proposée dans [8].  $M_\omega$  est une matrice symétrique définie positive, il existe donc  $D_\omega$  une matrice diagonale et  $S_\omega$  une matrice orthogonale telles que :

$$M_\omega = S_\omega D_\omega (S_\omega)^H \quad (11)$$

Le portrait effectif  $A_{\omega \text{ ef}}$  vaut alors :

$$A_{\omega \text{ ef}} = S_\omega D_\omega^{1/2} S_\omega^H A_\omega \quad (12)$$

Le portrait effectif obtenu ainsi est tracé figure 2 sur l'exemple traité précédemment présenté figure 1. On constate comme attendu sa grande régularité sur la plage de fréquence considérée.



(a) Portraits effectifs aux fréquences  $N = 9, 9.7, 10.3$  et  $11$

FIGURE 2 – Evolution du portrait effectif en fonction du nombre d'ondes réduit dans une cavité acoustique

La réductibilité du problème est ensuite étudiée en approchant le portrait effectif sous la forme PGD au moyen d'une SVD classique. Il est ensuite possible de revenir au portrait classique en inversant  $S_\omega D_\omega^{1/2} S_\omega^H$ . La qualité de la réduction associée considérée comme référence est illustrée dans la partie suivante ou une méthode directe lui est comparée.

## 3 Résolution large bande de fréquences PGD : a priori

### 3.1 Pré-conditionnement du problème

La technique de transformation du portrait en portrait effectif et particulièrement lourde en temps de calcul. En effet elle nécessite la construction et la diagonalisation de la matrice  $M$  à chaque fréquence.

L'étude des valeurs propres de la matrice  $M$  nous a amené à construire un sous espace conditionnant le problème à partir des vecteurs propres associés aux hautes valeurs propres de la matrice moyenne  $\langle M \rangle$  définie par :

$$\langle M \rangle = \int_{I_\omega} M_\omega d\omega \quad (13)$$

L'approche est similaire à celle proposée dans [8] mais en travaillant cette fois sur la matrice  $\langle M \rangle$  ce qui permet d'avoir une base commune à chaque fréquence. En pratique nous construisons  $\langle M \rangle$  à partir de quelques matrices  $M_\omega$  réparties sur  $I_\omega$ . Les nouvelles fonctions de forme utilisées sont des vecteurs propres de cette matrice ce qui redéfinit le problème par :

$$\mathbb{V}^H K_\omega \mathbb{V} B_\omega = \mathbb{V}^H L_\omega \quad (14)$$

Avec  $\mathbb{V}$  la matrice de concaténation des  $N_{\mathbb{V}}$  vecteurs propres à haute valeur propre de  $\langle M \rangle$  et  $B_\omega$  le nouveau vecteur inconnu tel que  $A_\omega = \mathbb{V} B_\omega$ .

### 3.2 Principe de la résolution large bande

La résolution PGD de la VTCR consiste à rechercher a priori une solution approchée de rang faible. Plutôt que de rechercher la solution fréquence par fréquence la solution est directement recherchée comme une somme de produit de fonctions à variable séparée, et plus précisément comme une somme de portraits constants pondérés par des fonctions scalaires de la fréquence. La solution est recherchée sur une bande de fréquences  $I_\omega$  sous la forme :

$$B_\omega \approx \tilde{B}_\omega^M = \sum_{m=1}^M \Lambda^m \lambda^m(\omega) \quad (15)$$

avec  $\Lambda^m$  un vecteur dans  $\mathbb{C}^{N_{\mathbb{V}}}$  et  $\lambda^m$  une fonction de la fréquence intégrable sur  $I_\omega$ . Le problème consiste à déterminer la décomposition optimale de l'approximation (15), les couples  $(\Lambda^m, \lambda^m)$  étant inconnus. L'opérateur  $K_\omega$  n'est pas hermitien, nous optons pour une recherche des modes par une minimisation du résidu  $\mathbb{R}$  tels que :

$$(\Lambda^m, \lambda^m)_{m=[1..M]} = \operatorname{argmin}(\mathbb{R}(\tilde{B}_\omega^M)) \quad (16)$$

$$\text{avec } \mathbb{R}(\tilde{B}_\omega^M) = \int_{I_\omega} (\mathbb{V}^H K_\omega \mathbb{V} \tilde{B}_\omega^M - \mathbb{V}^H L_\omega)^H (\mathbb{V}^H K_\omega \mathbb{V} \tilde{B}_\omega^M - \mathbb{V}^H L_\omega) d\omega.$$

La méthode classique de détermination de ces modes est appelée Glouton et consiste à déterminer itérativement les couples  $(\Lambda^m \lambda^m)$  jusqu'à la convergence souhaitée. Les couples  $(\Lambda_\omega^m \lambda^m)_{m=[1..M-1]}$  étant supposés connus, le couple  $(\Lambda_\omega^M \lambda^M)$  est déterminé de sorte que :

$$(\Lambda^M, \lambda^M) = \operatorname{argmin}(\mathbb{R}(\tilde{B}_\omega^{M-1} + \Lambda^M \lambda^M(\omega))) \quad (17)$$

Ce qui revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \Lambda^M = \left( \int_{I_\omega} \lambda(\omega)^H \lambda(\omega) \mathbb{V}^H K_\omega \mathbb{V} \right)^{-1} \int_{I_\omega} \lambda(\omega)^H (\mathbb{V}^H L_\omega - \mathbb{V}^H K_\omega \mathbb{V} \tilde{B}_\omega^{M-1}) \\ \lambda^M(\omega) = \frac{\Lambda^M H (\mathbb{V}^H L_\omega - \mathbb{V}^H K_\omega \mathbb{V} \tilde{B}_\omega^{M-1})}{\Lambda^M H \mathbb{V}^H K_\omega \mathbb{V} \Lambda^M} \end{cases} \quad (18)$$

Pour améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme et diminuer le nombre de modes nécessaire pour atteindre une erreur souhaitée, chaque calcul de mode est suivi d'une actualisation des fonctions de la fréquence. Les fonctions  $(\lambda^m)_{m=[1..M]}$  sont recalculées après chaque nouveau mode de sorte que :

$$(\lambda^m)_{m=[1..M]} = \operatorname{argmin}(\mathbb{R}(\tilde{B}_\omega^M)) \quad (19)$$

La mise en place de cet algorithme a montré des convergences limitées en terme de nombre de modes, notamment pour des amortissements  $\eta$  petits. Nous avons été amenés à définir des stratégies d'actualisation pour optimiser cette convergence.

Deux approches ont été proposées :

- L’actualisation des fonctions de la fréquence à chaque nouveau calcul de mode est suivie d’une actualisation des portraits  $\Lambda_M$ . Itérativement de  $m = 1$  à  $M$ , les portraits sont calculés tel que :

$$\Lambda^m = \operatorname{argmin}(\mathbb{R}(\tilde{B}_\omega^M)) \quad (20)$$

- Les modes sont calculés par bloc plutôt qu’itérativement en cherchant directement  $M$  modes vérifiant (16). Cet algorithme PGD globale est particulièrement coûteux et sert principalement de référence.

### 3.3 Résultats de convergence

Les différentes méthodes sont appliquées à la résolution large bande d’une cavité carrée à 1 élément VTQR. Elle est remplie d’un fluide de célérité a-dimensionnée  $c = 1/2\pi$ , de densité a-dimensionnée  $\rho = 1$ , et d’amortissement  $\eta = 10^{-3}$ . La bande de fréquence a-dimensionnée est  $I_\omega = [9, 11]$ . L’erreur en énergie de la solution approximée est définie par :

$$\varepsilon(\tilde{B}) = \sqrt{\frac{\int_{I_\omega} \|\mathcal{H}(A_\omega - A_{\omega \text{ approche}})\|_S^2}{\int_{I_\omega} \|\mathcal{H}(A_\omega)\|_S^2}} \quad (21)$$

Le portrait de référence  $A_\omega$  est calculé par la méthode VTQR classique,  $A_{\omega \text{ approche}}$  correspond au portrait approché par la méthode testée. Les résultats de convergence pour les différents algorithmes proposés sont illustrés dans les figures 3, 4 et 5. Les énergies des différentes approximations sont illustrées figure 3 pour une approximation à seulement 2 modes. Il est intéressant de noter qu’avec seulement deux modes les énergies sont relativement bien approchées, ce qui ne peut pas être le cas avec une décomposition modale classique qui impose l’orthogonalité des modes propres de vibrations (orthogonalité des modes spatiaux). La figure 4 représente les portraits de la solution approchée à 2 modes. Les portraits par résolution PGD sont sensiblement similaires. La convergence des différentes approches est illustrée figure 5. La PGD glouton à une convergence lente et loin d’être optimale au vu de la réduction a posteriori SVD du portrait effectif. Cette courbe traduit bien la nécessité de l’actualisation des modes pour avoir une convergence optimale. La PGD globale est proche la réduction à posteriori, mais ne peut être utilisé en pratique car trop lourd en terme de coût de calcul. La PGD avec actualisation des fonctions de la fréquence et des portraits semble être le meilleur compromis convergence/coût de calcul. L’erreur 21 est particulièrement sévère, en effet deux modes permettent de traduire l’allure de l’énergie illustrée figure 3 malgré une erreur importante de 33% et 32% pour la résolution PGD avec actualisation des fonctions de la fréquence et des portraits et pour la PGD globale.

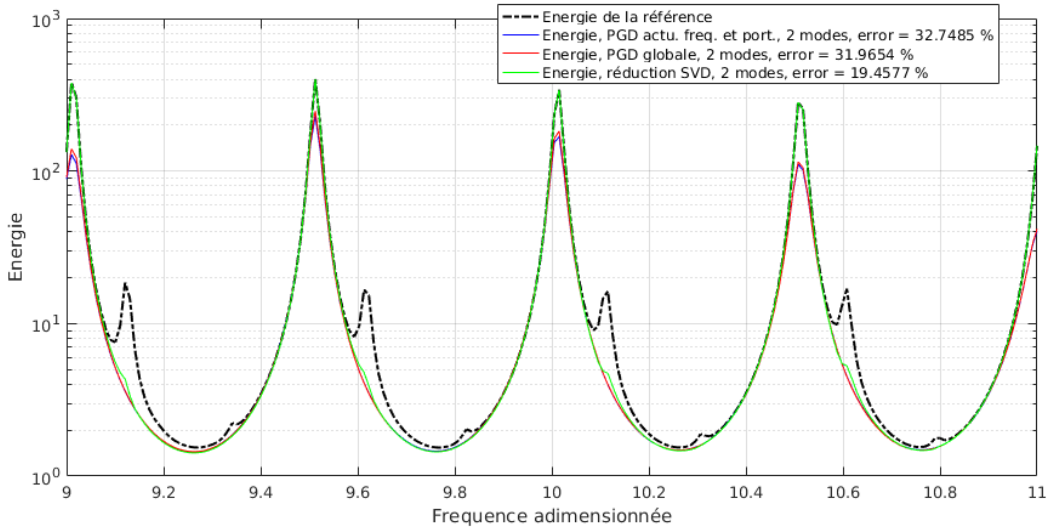


FIGURE 3 – Energie dans la cavité acoustique pour les différents algorithmes proposés

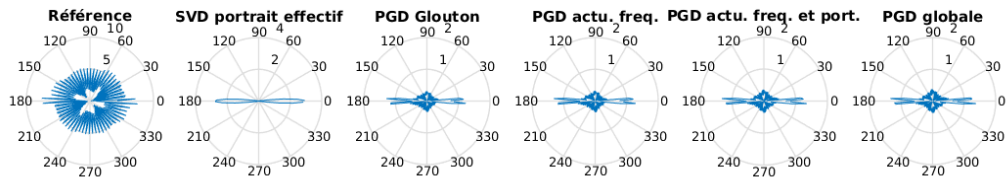


FIGURE 4 – Portraits approchés à la fréquence  $\omega = 2\pi \times 10$  avec 2 modes pour les différentes approches proposées. A gauche le portrait calculé par la VTCR classique.

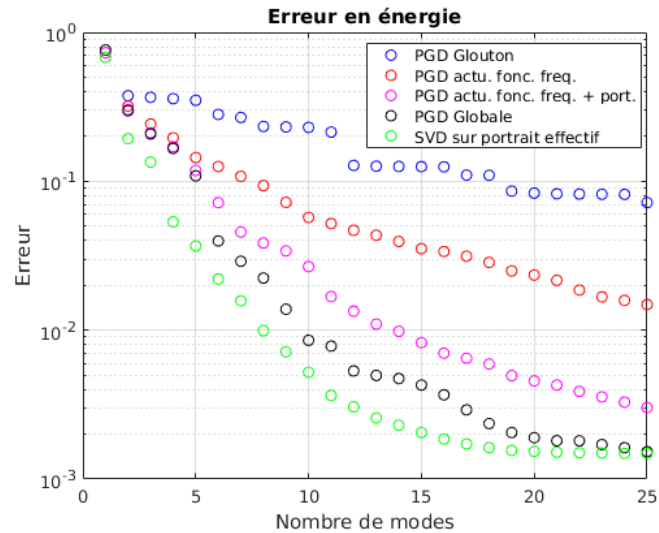


FIGURE 5 – Courbe de convergence en fonction du nombre de modes pour les algorithmes proposés

## 4 Conclusion

Le premier aspect traité a été la réductibilité du problème, ce qui consiste à déterminer une approximation de rang faible a posteriori d'un problème d'acoustique 2D. La définition d'un portrait régularisé, appelé portrait effectif, qui converge avec la discrétisation, est validées numériquement sur plusieurs cas de tests. L'approche est coûteuse mais efficace et permet de réduire le problème a posteriori avec une SVD. Ces travaux permettent de conclure sur la réductibilité d'un problème et donnent une référence pour les algorithmes de résolution a priori.

La résolution a priori est basée sur un algorithme PGD qui nécessite un pré-conditionnement sur une large bande de fréquence. Nous avons montré que l'algorithme classique de recherche itérative des modes n'est pas efficace pour ce type de problème. Il a clairement été mis évidence l'importance de l'actualisation des modes pour une convergence optimale de l'algorithme : un algorithme basé sur une actualisation des fonctions de la fréquence puis des portraits semble être le meilleur compromis entre l'erreur de convergence et le coût de calcul.

## Références

- [1] Barbarulo, A. Ladeveze, P.; Riou, H.; et al. Proper Generalized Decomposition applied to linear acoustic : A new tool for broad band calculation, Journal of sound and vibration (333- 11) Pages : 2422-2431, 2014.
- [2] P. Bouillard and S. Suleau. Element-free galerkin solutions for helmholtz problems : formulation and numerical assessment of the pollution effect. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 162 :317- 335, 1998.
- [3] A. Cattabiani, H. Riou, A. Barbarulo, P. Ladevèze, Guillaume Bézier, B. Troclet, The Variational Theory of Complex Rays applied to the shallow shell theory, Computers and Structures, Volume 158, Pages 98-107, 2015.

- [4] O. Cessenat and B. Despres. Application of an ultra weak variational formulation of elliptic pdes to the two-dimensional helmholtz problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35 :255-299, 1998.
- [5] W. Desmet, B. Van Hal, P. Sas, and D. Vandepitte. A computationally efficient prediction technique for the steady-state dynamic analysis of coupled vibro-acoustic systems. *Advances in Engineering Software*, 33 :527-540, 2002.
- [6] C. Farhat, I. Harari, and L.P. Franca. The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6455-6479, 2001.
- [7] L. Kovalevsky, H. Riou, P. Ladevèze, On the use of the Variational Theory of Complex Rays for the analysis of 2-D exterior Helmholtz problem in an unbounded domain, *Wave Motion*, Volume 50, Issue 3, Pages 428-436, 2013.
- [8] L. Kovalevsky, P. Gosselet, A quasi-optimal coarse problem and an augmented Krylov solver for the Variational Theory of Complex Rays, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, 107 (11), pp.903-922. 2016.
- [9] P. Ladevèze. A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range. *Comptes Rendus Académie des Sciences Paris*, 332(2b) : 849-856, 1996.
- [10] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics-new approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer, Berlin, 1999.
- [11] Li, H. ; Ladevèze, P. ; Riou, H., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 328, Pages 201-21, 2018
- [12] Lyon, R. H. and Maidanik, G.. Power flow between linearly coupled oscillators. *Journal of Acoustical Society of America*, 34 :640-647. 1962
- [13] P. Monk and D.Q. Wang. A least-squares method for the helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175 :121-136, 1999.
- [14] E. Perrey-Debain, J. Trevelyan, and P. Bettess. Wave boundary elements : a theoretical overview presenting applications in scattering of short waves. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28 :131-141, 2004.
- [15] H. Riou, P. Ladevèze, and P. Rouch. Extension of the variational theory of complex rays to shells for medium-frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 272(1-2) :341-360, 2004.
- [16] T. Strouboulis and R. Hidajat. Partition of unity method for helmholtz equation : q-convergence for planewave and wave-band local bases. *Applications of Mathematics*, 51 :181-204, 2006.
- [17] O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1977.