

Modèles d'ordre réduit de structures avec non linéarités de type géométrique et contact frottant

M. Balmaseda^{1,2}, D.-M. Tran¹, A. Placzek³, G. Jacquet-Richardet²

¹ DMAS/ONERA, Université Paris-Saclay, {mikel.balmaseda, tran}@onera.fr

² Université de Lyon, CNRS INSA Lyon, LaMCoS UMR 5259, georges.jacquet@insa-lyon.fr

³ DAAA/ONERA, Université Paris-Saclay, antoine.placzek@onera.fr

Résumé — Cette étude a pour but de développer des modèles réduits pour des structures tournantes géométriquement non linéaires avec du contact frottant. Les vibrations autour de l'équilibre statique induit par la rotation sont considérées comme non linéaires. Une base de projection de type Craig-Bampton est utilisée. Le contact frottant est implémenté sur les nœuds d'interface avec la méthode de pénalisation et la loi de frottement de Coulomb. L'influence de ces non linéarités est étudiée sur un oscillateur de Duffing. Un modèle réduit linéaire prenant en compte le contact frottant a été également mis en œuvre.

Mots clés — Modèles d'ordre réduit, non linéarité géométrique, contact frottant.

1 Introduction

Les structures tournantes sont largement utilisées dans des applications industrielles telles que les turbomachines, les pales d'hélicoptères et les éoliennes. La tendance à la conception des composants structuraux plus minces, plus souples et plus légers sous des excitations d'intensité plus élevée augmente le comportement non linéaire de ces composants. Ainsi, la nécessité de prédire avec précision la réponse dynamique des structures géométriquement non linéaires devient essentielle pour le concepteur.

Pour réduire le coût de calcul des modèles non linéaires d'éléments finis de grande précision, certains chercheurs ont développé la construction de modèles non linéaires d'ordre réduit (ROM). Cependant, sans techniques spéciales pour créer des modèles réduits efficaces et capables d'évaluer les matrices du système de façon autonome lorsque la structure se déforme, le coût de calcul devient équivalent au temps nécessaire pour effectuer l'analyse d'éléments finis de grande taille, ce qui diminue les avantages de la réduction de modèles. Une approche efficace de l'analyse structurale non linéaire réalisée dans [1] permet de représenter les forces internes par une formulation polynomiale du troisième ordre en fonction des déplacements. Cette méthode est connue sous le nom de "Stiffness Evaluation Procedure" (STEP). Les coefficients de la représentation polynomiale sont obtenus par une série de calculs statiques obtenus avec le modèle éléments finis complet. Comme une extension de la méthode STEP, les modèles d'ordre réduit "non intrusifs" ont été examinés par [2] et validés pour la prédiction de la fatigue, les calculs stochastiques non linéaires, les analyses de flambement et les structures complexes. La procédure d'évaluation de la rigidité des éléments (E-STEP) généralise la procédure STEP aux problèmes d'optimisation permettant la paramétrisation de la procédure d'évaluation de la raideur. L'hyper-réduction et la linéarisation par morceaux [3, 4] sont des techniques alternatives pour faciliter les problèmes de calcul des matrices du système.

Dans le cadre des structures tournantes les vibrations des poutres linéaires ont été largement étudiées, étendues à l'étude de modèles de poutres géométriquement non linéaires encastées et adaptées aux structures tournantes. L'effet de la rotation crée un couplage entre les mouvements axiaux et transversaux. Basé sur une formulation de von Karman, un modèle réduit pour une poutre en rotation est effectué grâce aux modes non linéaires et des variétés invariantes [5]. Une étude de comparaison entre plusieurs modèles d'une poutre tournant en termes de précision et de validité est présentée par [6]. Ces modèles sont principalement utilisés dans l'étude des pales d'hélicoptères, de turbomachines [7], des modélisations de poutres minces, de coques minces et des interactions fluide-structure. Une formulation par éléments finis des structures tournantes est présentée dans [8]. La nécessité de développer des modèles

éléments finis 3D pour l'étude dynamique de structures tournantes est mis en évidence dans [9].

Les phénomènes de contact frottant ont été largement étudiés dans la littérature. Une des applications des techniques de synthèse modale [10, 11] est la réduction de la taille du système qui permet d'inclure certains déplacements physiques dans les coordonnées généralisées du modèle réduit. Ces techniques sont largement utilisées pour l'étude mécanique de structures assemblées. Le modèle d'hystérésis d'Iwan [12] est utilisé pour modéliser le contact. Petrov [13] a proposé une formulation analytique pour représenter les vecteurs de forces de contact et la matrice de rigidité du frottement non linéaire dans le domaine fréquentiel pour l'analyse des vibrations multi-harmoniques. Puis une étude expérimentale et numérique pour analyser les réponses forcées dans les roues d'aubages désaccordées a été mise en œuvre [14].

Dans cette étude un modèle réduit de structures tournantes qui prend en compte à la fois les non linéarités géométriques ainsi que les non linéarités de contact frottant est développé. Une étude paramétrique sur l'influence de ces non linéarités est mise en œuvre en utilisant un oscillateur de Duffing. La réponse forcée d'une poutre mince avec contact frottant est étudiée (de manière préliminaire) avec un modèle réduit linéaire.

2 Construction du modèle réduit

Cette section présente une introduction des concepts théoriques pour le développement du modèle réduit proposé. Dans un premier temps l'équation de la dynamique des structures tournantes avec non linéarités de type géométrique et contact frottant est introduite. Deuxièmement, la base réduite utilisée pour diminuer la taille du modèle éléments finis est présentée. Troisièmement, les forces non linéaires réduites sont définies. Finalement, le modèle d'ordre réduit est construit et son équation de mouvement est définie.

2.1 Dynamique du modèle éléments finis haute fidélité

L'équation de la dynamique discretisée par éléments finis dans le repère tournant [8] avec non linéarités de type géométrique et de contact frottant s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_p + [\mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega)]\dot{\mathbf{u}}_p + \mathbf{K}_c(\Omega)\mathbf{u}_p + \mathbf{g}(\mathbf{u}_p) = \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}_{ei}(\Omega) + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}_p, \dot{\mathbf{u}}_p), \quad (1)$$

en fonction de la vitesse de rotation, Ω . Les vecteurs \mathbf{u}_p , $\dot{\mathbf{u}}_p$ et $\ddot{\mathbf{u}}_p$ représentent les déplacements, vitesses et accélérations physiques des nœuds de la structure. Ces derniers ont une dimension égale au nombre de degrés de liberté (d.d.l.) du modèle élément finis de grande taille (FOM). Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} , $\mathbf{G}(\Omega)$ et $\mathbf{K}_c(\Omega)$ sont les matrices de masse, d'amortissement visqueux, de couplage gyroscopique et d'assouplissement centrifuge. Les forces non linéaires internes (dont la non linéarité géométrique) sont représentées par le vecteur $\mathbf{g}(\mathbf{u}_p)$. $\mathbf{f}_e(t)$ est le vecteur des forces externes appliquées sur la structure, $\mathbf{f}_{ei}(\Omega)$ est le vecteur des efforts inertiels et $\mathbf{f}_c(\mathbf{u}_p, \dot{\mathbf{u}}_p)$ est le vecteur des forces de contact frottant.

Dans un premier temps, l'état statique \mathbf{u}_s de la structure sous l'effet de la rotation seule est obtenu en tenant compte des non linéarités géométriques, ce qui permet d'obtenir la matrice de raideur tangente $\mathbf{K}_s(\mathbf{u}_s)$ composée de la raideur élastique \mathbf{K}_e et la raideur géométrique de précontrainte $\mathbf{K}_g(\mathbf{u}_s)$.

On considère les déplacements relatifs \mathbf{u} de la structure autour de l'état statique \mathbf{u}_s , $\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}$.

Les forces non linéaires autour de la position d'équilibre (2) sont développées comme la somme d'une partie linéaire et d'une partie purement non linéaire.

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_s + \mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}_s) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{u}_p)}{\partial \mathbf{u}_p} \right|_{\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_s} \mathbf{u} + \mathbf{g}_{nl}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}_s) + \mathbf{K}_s \mathbf{u} + \mathbf{g}_{nl}(\mathbf{u}). \quad (2)$$

L'équation de mouvement de la structure en rotation en fonction des déplacements relatifs s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega)]\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}(\Omega)\mathbf{u} + \mathbf{g}_{nl}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}_c(\mathbf{u}_s + \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}), \quad (3)$$

avec $\mathbf{K}(\Omega) = \mathbf{K}_c(\Omega) + \mathbf{K}_s(\mathbf{u}_s) + \mathbf{K}_e$ la matrice de rigidité totale. $\mathbf{g}_{nl}(\mathbf{u})$ est le vecteur d'efforts de type géométrique purement non linéaires et $\ddot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{u}}$ et \mathbf{u} sont les vecteurs d'accélération, de vitesse et de déplacement aux nœuds autour de la position d'équilibre statique.

La résolution répétitive des équations du système haute fidélité conduit à des temps de calculs prohibitifs pour des configurations industrielles complexes avec beaucoup de d.d.l. C'est pour cela que l'utilisation de modèles réduits s'avère intéressante.

2.2 Base de projection de type Craig-Bampton

Pour l'étude du contact frottant dans le modèle réduit il est nécessaire que les coordonnées généralisées du modèle réduit incluent certains déplacements physiques. Pour cela la base réduite de synthèse modale Craig-Bampton [15] a été utilisée pour projeter le FOM. Cette dernière est formée par les modes propres encastrés Φ_c et les modes statiques de liaison Ψ_c :

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{q} = \Phi_{CB} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = [\Phi_c \ \Psi_c] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{c_i} & \Psi_{c_i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

où \mathbf{u}_b sont les déplacements aux d.d.l. d'interface.

2.3 Forces non linéaires réduites

Les forces non-linéaires sont évaluées au cours de l'intégration temporelle du modèle réduit. C'est pour cela que ce modèle doit être capable de reproduire avec précision le comportement non-linéaire de la structure. Ci-après, les forces non-linéaires géométriques corrigées par une base POD et les forces de contact frottant avec la méthode de pénalisation et la loi de Coulomb sont introduites.

2.3.1 Forces non-linéaires géométriques

Les forces non-linéaires géométriques sont obtenues par la méthode "Stiffness Evaluation Procedure" (STEP) [1] et sont approximées par un polynôme du troisième degré :

$$\tilde{g}_{nl}^p(q_1, \dots, q_r) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=i}^r A_{ij}^p q_i q_j + \sum_{i=1}^r \sum_{j=i}^r \sum_{m=j}^r B_{ijm}^p q_i q_j q_m, \quad (5)$$

les coefficients A_{ij}^p et B_{ijm}^p sont évalués dans la phase "hors ligne" en mettant en œuvre $(r^3 + 6r^2 + 5r) / 6$ évaluations statiques des forces non-linéaires. Un exemple de la manière de calculer ces coefficients est présenté par Lülfi et al. [16].

La méthode STEP ne permet pas la représentation des forces non-linéaires géométriques pour structures de type poutre élancée [17]. Cette dernière conduit à des réponses très amorties et avec des composantes fréquentielles parasites. Afin de corriger ces effets indésirables un filtrage des forces non linéaires reposant sur une base tronquée Φ_f construite à partir de la Décomposition Orthogonale Propre d'un ensemble représentatif de forces non-linéaires est implémenté [18]. Les forces non-linéaires utilisées pour la construction de la base des forces Φ_f sont caractéristiques de la dynamique de la structure. Cette méthode est non intrusive puisqu'elle n'agit que pendant la projection du système. Premièrement, un ensemble de forces non-linéaires est évalué à partir d'un calcul FOM représentatif de la dynamique du système. Deuxièmement, la base tronquée de forces non-linéaires Φ_f est calculée. Finalement, les forces généralisées sont calculées dans l'espace du modèle d'ordre réduit :

$$\tilde{\mathbf{g}}_{nl}(\mathbf{q}) = \Phi_{CB}^T \mathbf{g}_{nl}^f(\mathbf{u}) = \Phi_{CB}^T \Phi_f \Phi_f^T \mathbf{g}_{nl}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}^T \mathbf{g}_{nl}(\mathbf{u}). \quad (6)$$

2.3.2 Forces non-linéaires de type contact frottant

Quand deux solides sont en contact l'un avec l'autre des efforts non-linéaires supplémentaires apparaissent à l'interface entre ces solides afin d'éviter l'interpénétration. Grâce à la base réduite de Craig-Bampton, les degrés de liberté d'interface sont gardés dans le système réduit ce qui permet d'aborder le problème de contact frottant en utilisant les méthodes classiques de régularisation utilisées dans les codes éléments finis FOMs (pénalisation, Lagrangien et Lagrangien augmenté). Ce problème est abordé en deux temps : validation des conditions du contact unilatéral, conditions de Signorini et calcul des efforts tangents en utilisant une loi de contact frottant.

Loi de contact Dans un assemblage mécanique, la distance entre deux solides Ω_1 et Ω_2 est obtenue par la fonction écart (7) qui évalue la distance normale minimale. Cette dernière est calculée en fonction du type d'appariement (nœud-nœud, segment-nœud).

$$\mathbf{d} = (\mathbf{u}_{esclave} - \mathbf{u}_{maître}) \mathbf{n} - \mathbf{d}_0, \quad (7)$$

avec le vecteur normal \mathbf{n} sortant de la surface esclave et le vecteur d'écart initial \mathbf{d}_0 . Les nœuds de la surface esclave sont alors contraints à ne pas pénétrer la surface maître.

La loi de contact de Signorini (8) impose une interpénétration nulle entre les deux solides et les forces répulsives de contact \mathbf{t}_n dans la direction du vecteur \mathbf{n} apparaissent quand les deux solides sont en contact.

$$\begin{cases} \mathbf{d} \leq 0 \\ \mathbf{t}_n \leq 0 \\ \mathbf{d} \circ \mathbf{t}_n = 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Avec la méthode de *pénalisation* une légère pénétration est autorisée entre les deux objets. S'il existe du contact $\mathbf{d} < 0$, chaque composante normale du vecteur des forces répulsives de contact (9) est définie comme le produit entre l'interpénétration et un coefficient de raideur normale ϵ_n .

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } d_n \geq 0 \\ -\epsilon_n d_n & \text{si } d_n < 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Pour obtenir une approximation la plus précise possible, le coefficient de raideur normale tend vers l'infini. Cependant, un coefficient de valeur très élevé induit des problèmes d'instabilité numérique. Par contre, si le coefficient est très faible, les interpénétrations entre les deux objets manqueront de sens physique.

Loi de frottement Le frottement est un phénomène tangentiel qui relie la force de contact tangentielle et la vitesse relative de glissement. La loi la plus répandue pour traiter le contact frottant et celle de Coulomb (10) qui modélise la force tangentielle en fonction de la force normale de contact, de la vitesse relative de glissement, du coefficient de frottement μ et du taux de glissement ξ .

$$\begin{cases} \|\mathbf{t}_t\| < \mu_s t_n & \mathbf{v}_t = 0 & \text{adhérence} \\ \|\mathbf{t}_t\| = \mu_d t_n & \mathbf{v}_t = \xi \frac{\mathbf{t}_t}{\|\mathbf{t}_t\|} & \text{avec } \xi \leq 0 & \text{glissement} \end{cases}. \quad (10)$$

3 Application numérique

Premièrement l'influence de chaque effet non-linéaire (géométrique et contact) est évalué sur un modèle non linéaire de type Duffing. Deuxièmement l'effet du contact unilatéral est étudié avec un modèle réduit linéaire d'une poutre 3D. Ces deux cas d'étude sont évalués avec une vitesse de rotation nulle afin d'observer la phénoménologie de ces non linéarités. Ces analyses seront poursuivies ultérieurement dans le cas en rotation avec/sans contact et avec/sans non-linéarités de type géométrique. Pour ces deux cas d'étude, la méthode d'intégration temporelle HHT- α [19] a été utilisée.

3.1 Étude de l'influence des non-linéarités sur un modèle 1D de type Duffing

Le premier cas correspond à l'étude des déplacements de l'extrémité libre d'une poutre encastree. Le comportement non-linéaire géométrique est modélisé par un oscillateur 1D de Duffing (voir Fig. 1), la force purement non-linéaire étant décrite par $g_{NL}(u) = \alpha_D u^3$, avec α_D le coefficient de rigidité. L'équation du mouvement s'écrit :

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku + \alpha_D u^3 = f(t) + f_c(u, \dot{u}) \quad (11)$$

avec une masse $M = 0.3$ Kg, un amortissement visqueux $C = 0.605$ Nms $^{-1}$, une rigidité $K = 12.19$ kNm $^{-1}$ et une amplitude de l'excitation externe $f_{max} = 50$ N. Les coefficients statique et dynamique de Coulomb sont 0.75 et 0.6 respectivement. Pour identifier les variations entre les différents cas, le cas linéaire a été pris comme référence.

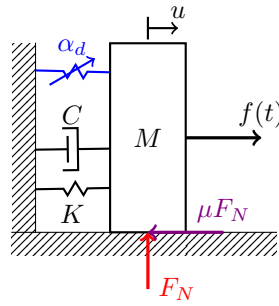


FIGURE 1 – Schema d'un oscillateur non linéaire.

Pour tous les calculs et afin d'assurer la stabilisation de la réponse périodique, le temps final est égal à 500 périodes d'excitation. Les réponses forcées sont calculées autour de la fréquence de résonance du cas linéaire, $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K/M} = 32.08$ Hz, entre les fréquences d'excitation $\omega_e = 25$ Hz et $\omega_e = 80$ Hz. Le balayage en fréquence se fait dans une seule direction (des fréquences plus basses aux plus hautes).

Non linéarités géométriques Le modèle non linéaire géométrique a été évalué en fonction de la rigidité non linéaire α_D . Une série de sept valeurs entre $\alpha_D = 0 \text{ Nm}^{-3}$ (cas linéaire) et $\alpha_D = 10^7 \text{ Nm}^{-3}$, a été utilisée dans cette analyse. La Figure 2 présente la réponse forcée de l'oscillateur non linéaire. Quand la rigidité non linéaire augmente, la fréquence de résonance est décalée vers des fréquences plus élevées. Le maximum des réponses est alors atténué progressivement.

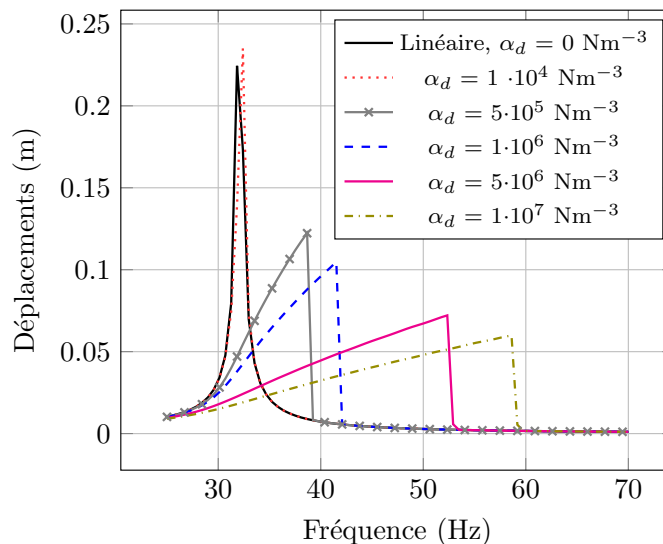


FIGURE 2 – Réponse forcée en fonction de la rigidité non linéaire, α_D .

Non linéarités de frottement La Figure 3 présente l'étude de l'influence du contact frottant avec l'hypothèse de contact permanent, ce qui modélise le comportement d'un frotteur. Les amplitudes de la structure sont amorties quand la force normale augmente. Cette réduction est plus importante que pour le cas des forces géométriques, cependant des pics de résonance secondaires sont observés à basses fréquences. La fréquence de résonance reste inchangée. La force normale de contact est modifiée de 1 N à 65 N.

Non linéarités de frottement et géométrique Le couplage entre les deux non-linéarités est étudié pour la combinaison des paramètres considérés précédemment et présenté dans la Figure 4. Quand la force normale appliquée est faible (10 N, courbes foncées dans la Figure 4.a) l'influence de la non linéarité géométrique reste importante et il existe un décalage de la fréquence de résonance; cependant, cette dernière a une valeur plus proche de celle du cas linéaire. L'amplitude maximale est légèrement

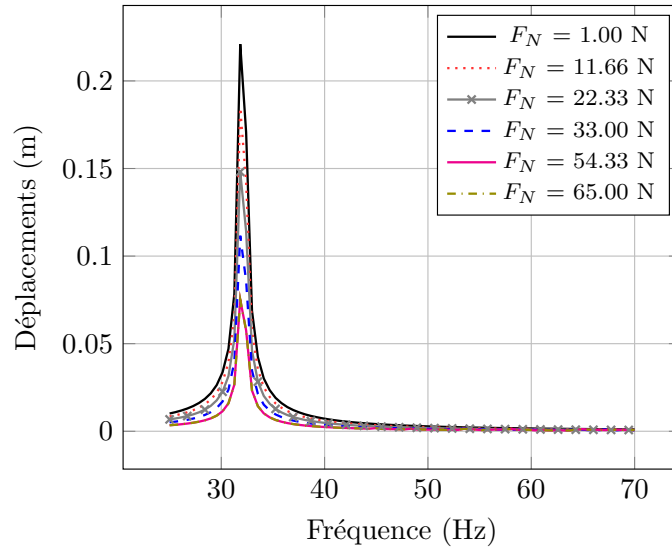
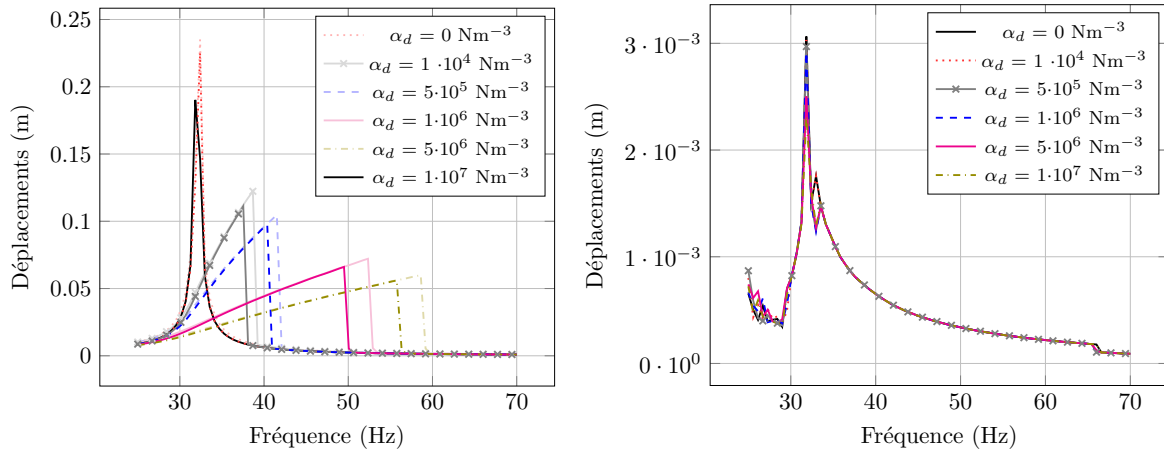


FIGURE 3 – Réponse forcée en fonction de la force normale de contact.

atténuée. Quand la force normale est importante (65 N, Figure 4.b) toutes les fréquences de résonance correspondent à la résonance linéaire et l'amplitude maximale est de l'ordre de 70 fois plus petite.



(a) Courbes foncées : cas avec contact, $F_N = 10\text{ N}$;
Courbes claires : cas sans contact, $F_N = 0\text{ N}$.

(b) Force normale de contact égale à 65 N.

FIGURE 4 – Réponse forcée couplant les effets de type géométriques et de contact frottant.

3.2 Poutre mince

Pour ce deuxième cas d'étude une structure de poutre mince [20, 21] de dimensions $1\text{ m} \times 0.1\text{ m} \times 0.005\text{ m}$ est étudiée. Les coordonnées en mètres du nœud d'interface pour étudier le contact sont $(0.22, 0, -0.0026)$. Le module de Young, E , est 104 GPa, le coefficient de Poisson, ν , est 0.34 et la masse volumique, ρ , est 4500 Kg m^{-3} . Un amortissement visqueux de Rayleigh, $\mathbf{C} = 0.87\mathbf{M}$ est considéré. Le comportement de la structure est linéaire, uniquement les non linéarités de contact frottant sont évaluées. Le modèle éléments finis est formé d'éléments quadratiques hexahédriques (HEXA20) avec 20 nœuds par élément. Le nombre total de d.d.l. de la structure est de 7149. La structure est encastée à l'une de ses extrémités et des forces harmoniques externes sont appliquées à l'autre extrémité selon la direction verticale (voir Figure 5). Avec l'objectif d'étudier la phénoménologie du contact, les résultats obtenus avec le modèle réduit sont présentés.

La Figure 6 présente le spectre de réponse pour les cas avec et sans contact. Quand le contact est présent, sur le nœud de contact l'existence d'harmoniques secondaires est observé. Par ailleurs, l'amplitude de l'harmonique fondamental est atténuée ($\approx 50\%$). Sur un nœud loin de à l'interface de contact, les

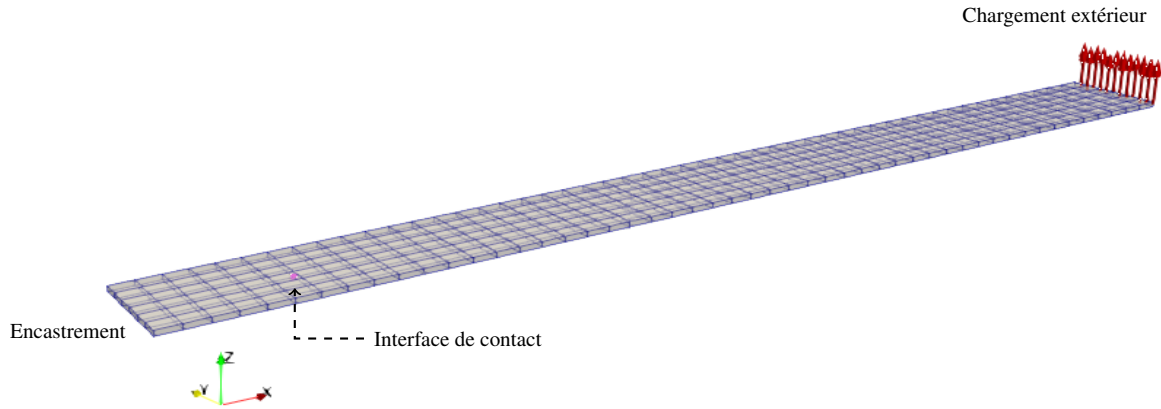


FIGURE 5 – Maillage et conditions aux limites.

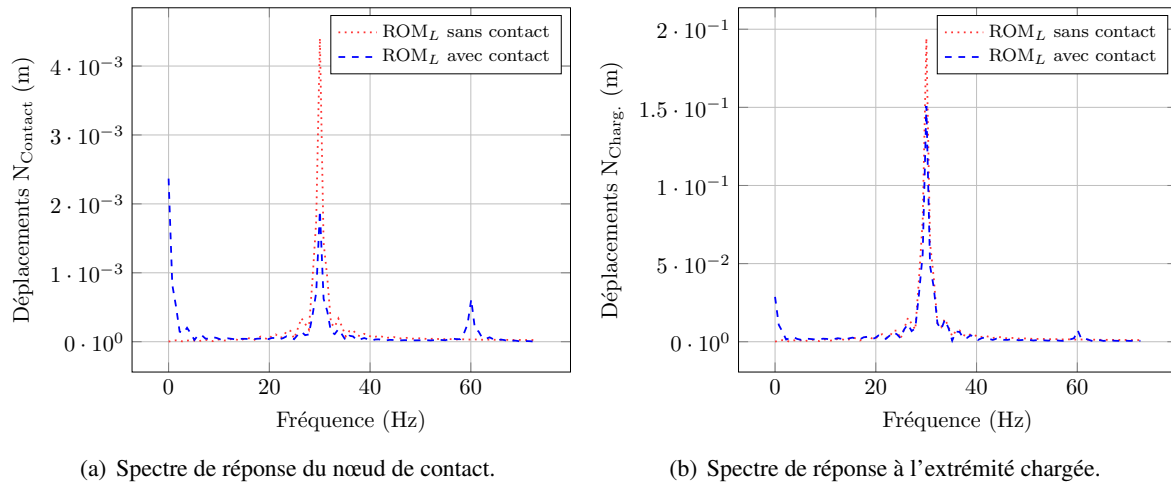


FIGURE 6 – Spectre des réponses temporelles dans le nœud de contact et l'extrémité de chargement.

harmoniques secondaires de contact sont présentes et l'harmonique fondamentale est atténué, cependant, l'influence du contact étant plus faible, le comportement est proche du cas linéaire.

4 Conclusions et perspectives

Un modèle d'ordre réduit qui tient compte à la fois des effets des non-linéarités de type géométrique et de contact frottant a été présenté. Ce modèle est capable de représenter la dynamique de structures avec ou sans rotation. Dans le cas en rotation, les vibrations autour de la position d'équilibre statique sont considérées non-linéaires géométriques. La fréquence de résonance des structures géométriquement non-linéaires dépend de la rigidité non-linéaire. Pour le cas de l'oscillateur de Duffing étudié les déplacements de la réponse pour une excitation résonante sont plus atténués que le cas linéaire de la structure. Le frottement réduit l'amplitude de la réponse proportionnellement à la force normale du frotteur. Quand les deux non linéarités sont couplées, le comportement de la structure dépend principalement de l'influence de chaque type de non linéarité. Quand la force de contact est élevée, l'effet du frottement bloque le décalage des fréquences résonantes.

Le modèle d'ordre réduit proposé sera prochainement utilisé pour l'étude d'une poutre mince en rotation et avec ces deux types de non linéarités. Comme la construction du modèle réduit pour chaque vitesse de rotation peut devenir très coûteuse, une paramétrisation du modèle en fonction de la vitesse de rotation sera mise en œuvre.

Références

- [1] Alexander A Muravyov and Stephen A Rizzi. Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures. *Computers & Structures*, 81(15) :1513–1523, 2003.
- [2] Marc P Mignolet, Adam Przekop, Stephen A Rizzi, and S Michael Spottswood. A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332(10) :2437–2460, 2013.
- [3] D Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of computational physics*, 202(1) :346–366, 2005.
- [4] Charbel Farhat, Todd Chapman, and Philip Avery. Structure-preserving, stability, and accuracy properties of the energy-conserving sampling and weighting method for the hyper reduction of nonlinear finite element dynamic models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(5) :1077–1110, 2015.
- [5] Dongying Jiang, Christophe Pierre, and SW Shaw. The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(5) :729–746, 2005.
- [6] O. Thomas, A. Sénéchal, and J.-F. Deü. Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams. *Nonlinear Dynamics*, 86(2) :1293–1318, Oct 2016.
- [7] Aurélien Grolet and Fabrice Thouverez. Vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 133(2) :022502, 2010.
- [8] Arnaud Sternchüss. *Multi-level parametric reduced models of rotating bladed disk assemblies*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, France, 2009.
- [9] Giancarlo Genta, Mario Silvagni, and Cui Qingwen. Dynamic analysis of rotors : Comparison between the simplified one-dimensional results and those obtained through 3-d modeling. 2013.
- [10] Roy R Craig Jr. A review of time-domain and frequency-domain component mode synthesis method. 1985.
- [11] S Rubin. Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA journal*, 13(8) :995–1006, 1975.
- [12] Wilfred D Iwan. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *Journal of Applied Mechanics*, 33(4) :893–900, 1966.
- [13] EP Petrov and DJ Ewins. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed discs. In *ASME Turbo Expo 2002 : Power for Land, Sea, and Air*, pages 899–908. American Society of Mechanical Engineers, 2002.
- [14] Evgeny Petrov, Luca Di Mare, Holger Hennings, and Robert Elliott. Forced response of mistuned bladed disks in gas flow : A comparative study of predictions and full-scale experimental results. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 132(5) :052504, 2010.
- [15] Roy Craig and Mervyn Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [16] Fritz Adrian LülF, Duc-Minh Tran, Hermann G Matthies, and Roger Ohayon. An integrated method for the transient solution of reduced order models of geometrically nonlinear structures. *Computational Mechanics*, 55(2) :327–344, 2015.
- [17] Aurélien Grolet. *Dynamique non-linéaire des structures mécaniques : application aux systèmes à symétrie cyclique*. PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, France, 2013.
- [18] M Balmaseda, G. Jacquet-Richardet, A. Placzek, and D.-M Tran. Reduced order models for dynamic analysis of nonlinear rotating structures. In *Proceedings of 6th European Conference on Computational Mechanics / 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics*. Glasgow, UK, June 2018.
- [19] Hans M Hilber, Thomas JR Hughes, and Robert L Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5(3) :283–292, 1977.
- [20] H Du, MK Lim, and KM Liew. A power series solution for vibration of a rotating timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 175(4) :505–523, 1994.
- [21] Jean-Daniel Beley, Zihan Shen, Benjamin Chouvion, and Fabrice Thouverez. Vibration non-linéaire de poutre en grande transformation. In *Conference : CSMA 2017, At Giens, France, 05 2017*.