

# Étude de l'identifiabilité des propriétés mécaniques des élastomères par nano-indentation et réduction de modèle

Oumaima Ezzaamari, Guénaél Le Quilliec, Florian Lacroix, Stéphane Méo

Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé - Université de Tours, Université d'Orléans, INSA Centre Val de Loire - EA 7494

oumaima.ezzaamari@etu.univ-tours.fr

---

**Résumé** — Dans le présent travail, nous étudions numériquement la possibilité d'identifier les propriétés de matériaux de comportement hyper-élastique à l'aide de l'indentation instrumentée. La méthode appliquée est basée sur l'approche par variété de formes (ou shape manifold). À cette fin, un modèle réduit est construit à partir d'un plan d'expériences numériques, par décomposition orthogonal aux valeurs propres (POD) combinée à la méthode d'interpolation par krigeage. En plus des paramètres matériaux, l'influence du coefficient de frottement est analysée.

**Mots clefs** — Indentation, élastomère, identification, réduction de modèle, décomposition orthogonale aux valeurs propres, variété de formes, krigeage.

---

## 1. Introduction

De nombreux travaux ont été menés sur la nano-indentation instrumentée dans la littérature. Toutefois, les études portant sur cet essai de caractérisation restent limitées concernant le comportement mécanique local des matériaux élastomères. L'application de la nano-indentation sur ce type de matériaux reste une tâche difficile compte tenu de leurs caractéristiques mécaniques et structurelles complexes.

Dans le présent projet, nous essayons de surmonter ces contraintes expérimentales et de trouver une approche efficace pour la caractérisation mécanique locale de matériaux hyper-élastiques. À cet effet, nous traitons le concept de variété de formes récemment appliqué par L. Meng et al. [3-4-5] à l'identification des propriétés des matériaux métalliques. Dans cette approche, un espace de formes d'ordre réduit des courbes d'indentation et des empreintes issues d'un ensemble de simulations numériques, appelées clichés (ou snapshots), est construit en utilisant une décomposition orthogonale aux valeurs propres [2]. Ensuite, le problème inverse est résolu en utilisant un algorithme minimisant la distance entre la variété de formes et la projection dans l'espace de formes des données expérimentales : courbes d'indentation et / ou empreintes.

En s'appuyant sur la démarche précédente, nous étudions l'identifiabilité numérique des paramètres de lois de comportement des élastomères à partir de données expérimentales issues d'indentations instrumentées : courbes charge-déplacement et empreintes. Cependant, la modélisation par éléments finis du processus d'indentation dans le cas des élastomères (matériaux hyper-visco-élastiques) n'est pas une tâche facile. Néanmoins, nos études de faisabilité en cours (limitées au comportement hyper-élastique) ont montré que l'approche par variété de formes est une solution prometteuse pour estimer la dimensionnalité intrinsèque, détecter le caractère non unique, alléger le coût de calcul et finalement identifier les paramètres du matériau à partir des mesures expérimentales.

Enfin, la méthode est validée par un processus d'identification des paramètres du modèle à partir d'une courbe d'indentation.

## 2. Outils numériques et méthodologie

### 2.1. Indentation sphérique

Les courbes d'indentation sont générées par des essais de nano-indentation, modélisés à l'aide du logiciel d'analyse par éléments finis ABAQUS / CAE. Le modèle consiste en un indenteur sphérique en carbure de tungstène et un matériau indenté de comportement hyper-élastique. La discrétisation de l'indenteur est faite avec des éléments quadratiques en déplacement et le massif est maillé avec des éléments quadratiques en déplacement et linéaires en pression.

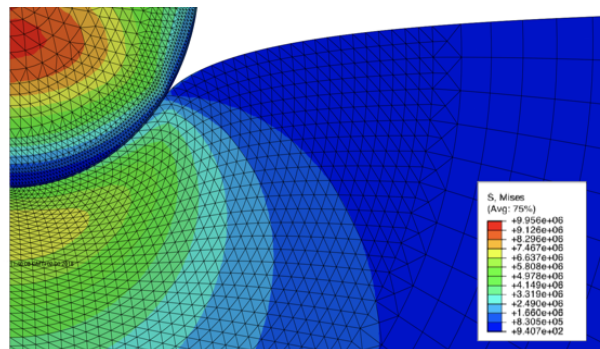


Figure 1 – Simulation axisymétrique de l'essai de nano-indentation.

Un plan d'expériences d'un nombre de points suffisamment importants est obtenu à partir d'un échantillonnage par hyper-cube latin (LHS) [6] en faisant varier les paramètres souhaités du modèle.

Après avoir généré l'ensemble des courbes d'indentation (Figure 2) où chaque courbe correspond à un point (un jeu de paramètres du modèle) du plan d'expériences, on interpole entre les points de chaque courbe en utilisant 1000 points à intervalle régulier du déplacement. Ces valeurs sont sauveés dans un vecteur de dimension 1000 pour chacune des courbes (ou clichés) du plan d'expériences. Cette interpolation transforme des données numériques brutes (courbes) en vecteurs de grande dimensionnalité nommés « snapshots ».

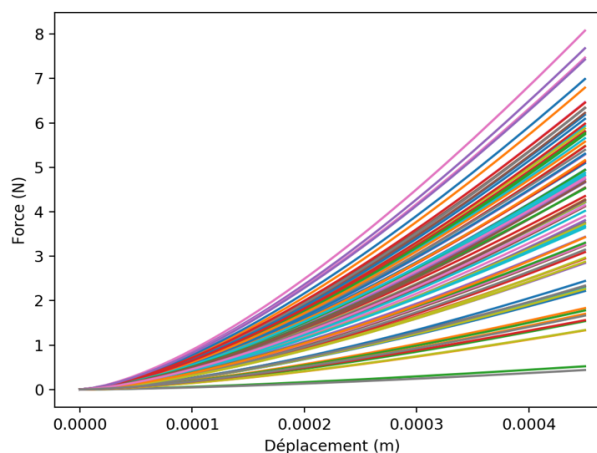


Figure 2 – Exemple de 100 courbes d'indentation (ou snapshots) obtenues dans le cas d'un plan d'expériences de 100 points en faisant varier les deux paramètres de la loi de comportement Mooney-Rivlin  $C_{10}$  et  $C_{01}$ .

## 2.2. Réduction de modèle par la décomposition orthogonale aux valeurs propres

La décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) [2] permet de remplacer un espace de dimensionnalité importante par un espace de dimensionnalité réduite nommé espace des Alpha. La projection des snapshots (courbes d'indentation) dans cette base orthogonale permet de donner pour chaque cliché les coordonnées correspondantes  $\alpha_i$ .

En appliquant la POD, on obtient un nuage de points (Figure 3) qui représente les données de départ (courbes d'indentation) dans l'espace réduit. Sur le plan des deux premières directions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (Figure 4), on peut reconnaître une correspondance de distribution entre les points du plan d'expériences et les snapshots.

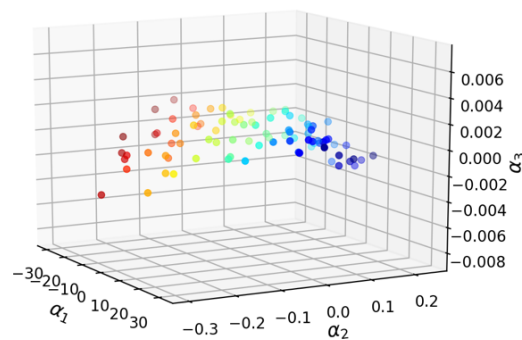


Figure 3 – Exemple de clichés dans les 3 premières directions ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ) de l'espace- $\alpha$  d'ordre réduit correspondant au résultat de la figure 2.

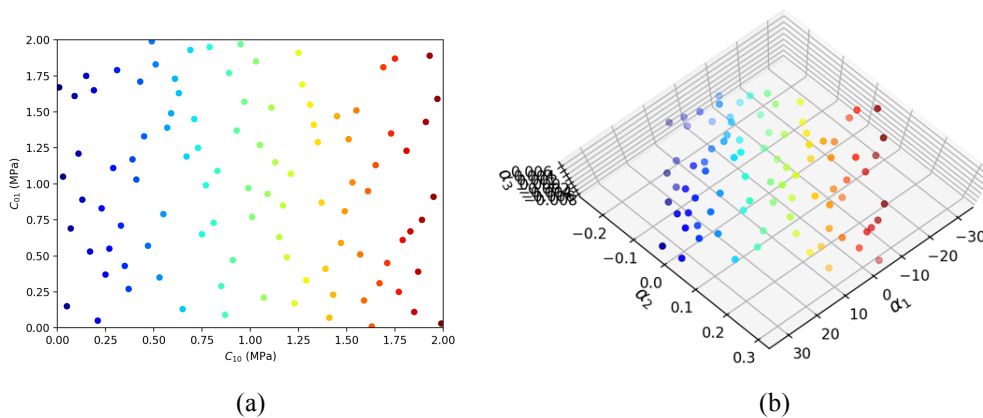


Figure 4 – Correspondance entre le plan d'expériences (a) et le plan de deux premières directions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de l'espace- $\alpha$  (b).

## 2.3. Krigeage

Le krigeage [1] est une méthode permettant d'interpoler entre tous les points sur l'espace réduit. Elle permet d'obtenir une hypersurface continue nommée variété de formes correspondant à notre modèle réduit. Grâce à ce modèle, nous pouvons connaître une estimation de la valeur de la fonction coût (le modèle éléments finis) pour faire l'identification en tout point compris dans le domaine de variation des paramètres du plan d'expériences de départ.

Comme l'identification nécessite de faire énormément d'appels à la fonction coût, ce qui est coûteux en terme de temps, ce modèle réduit résout le problème de façon plus rapide.

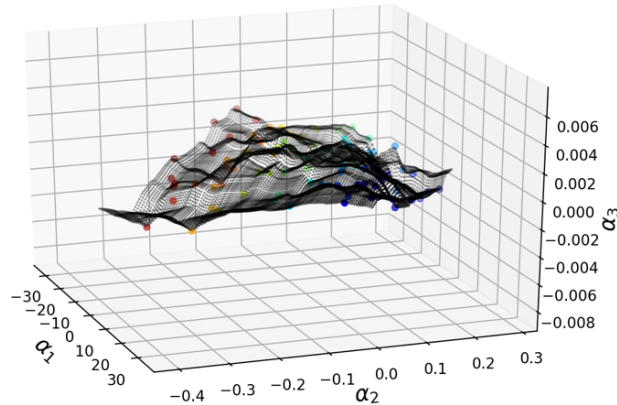


Figure 5 – Exemple de variété obtenue par krigeage dans l'espace-  $\alpha$  de la figure 3.

### 3. Application et validation

#### 3.1. Modèle hyper-élastique polynomiale d'ordre 1 : Loi Mooney-Rivlin

Nous effectuons des essais de nano-indentation numériques sur un matériau de comportement hyper-élastique défini par une loi de type Mooney-Rivlin. La partie déviatorique de la loi de comportement est :

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad (1)$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont les deux premiers invariants du tenseur de Cauchy Green droit associé à la partie déviatorique du gradient de la transformation. La partie sphérique est définie par le choix d'un module de compressibilité (ajusté en fonction de  $C_{10}$  et  $C_{01}$ ) correspondant à un coefficient de Poisson de 0.49.

Sur un plan d'expériences de 100 points, on fait varier les deux paramètres ( $C_{10}$  ;  $C_{01}$ ) de la loi pour obtenir les résultats montrés dans les figures 2, 3 et 4.

Pour valider la présente méthode, nous effectuons un essai de nano-indentation numérique où  $C_{10} = C_{01} = 1$ MPa, afin d'obtenir une courbe d'indentation conforme à ces paramètres que nous projetons ultérieurement sur la variété (le point rouge sur la figure 4).

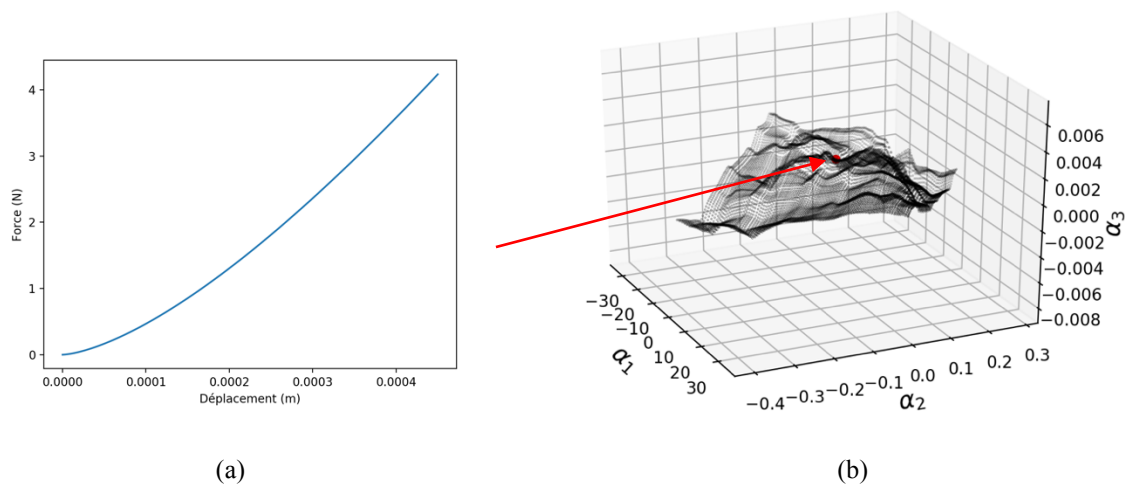


Figure 6 – Projection de la courbe d'indentation (a) du cas-test dans l'espace- $\alpha$  (b).

Après avoir appliqué un processus classique d'optimisation global, on obtient les résultats représentés dans le tableau 1.

Table 1 – Erreurs relatives de l'identification des paramètres  $C_{10}$  et  $C_{01}$

Paramètre	Valeur considérée (MPa)	Valeur identifiée (MPa)	Erreur (%)
$C_{10}$	1	1.002	0.227
$C_{01}$	1	0.997	0.233

### 3.2. Influence du coefficient de frottement

Avec la loi de comportement de Mooney-Rivlin et en plus de  $C_{10}$  et  $C_{01}$ , on fait varier un troisième paramètre qui est le coefficient de frottement dans un plan d'expériences 3D de 500 points. Après avoir simulé les courbes et appliqué la POD, on obtient la variété dans la figure 5.

La variation d'un troisième paramètre conduit habituellement à une variété tridimensionnelle, mais comme le montre la figure 5, la variété tend à n'être 3D que dans le cas d'un coefficient de frottement faible ou nul et 2D quand sa valeur est modérée ou forte.

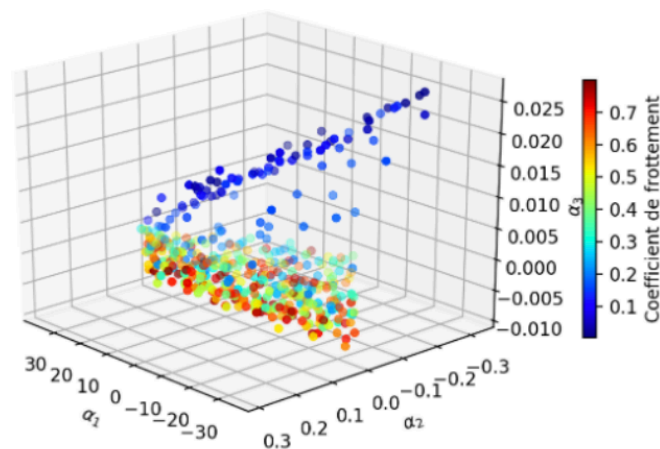


Figure 7 – Influence du coefficient de frottement sur la forme de la variété dans l'espace- $\alpha$ .

Nous pouvons en déduire que le coefficient de frottement n'a plus d'influence au-delà d'un certain seuil. Nous faisons l'hypothèse que ce seuil (situé aux environs de 0.2) correspond à une transition entre un régime de glissement avec frottement et celui d'une adhérence entre l'indenteur et la surface indentée. En d'autres termes, la valeur du coefficient de frottement n'a pas d'influence sur le résultat tant qu'elle est modérée ou forte, ce qui sera très probablement le cas en pratique. Ainsi, sa valeur exacte n'a pas besoin d'être connue.

### 3.3. Modèle hyper-élastique polynomiale d'ordre 2

Compte tenu des observations faites précédemment sur le coefficient de frottement, la valeur de celui-ci est à présent fixée à 0,5 afin d'assurer une adhérence entre l'indenteur et la surface indentée. On

génère un nouveau plan d'expériences 3D de 500 points en ajoutant en complément de  $C_{01}$  et  $C_{10}$ , le paramètre matériau  $C_{11}$  de la loi hyper-élastique polynomiale d'ordre 2 :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \quad (2)$$

L'application de la POD montre qu'on a bien une variété 3D (figure 8-a et 8-b) et donc la possibilité d'identifier 3 paramètres  $C_{01}$ ,  $C_{10}$  et  $C_{11}$  à condition que le coefficient de frottement réel soit dans le domaine d'adhérence.

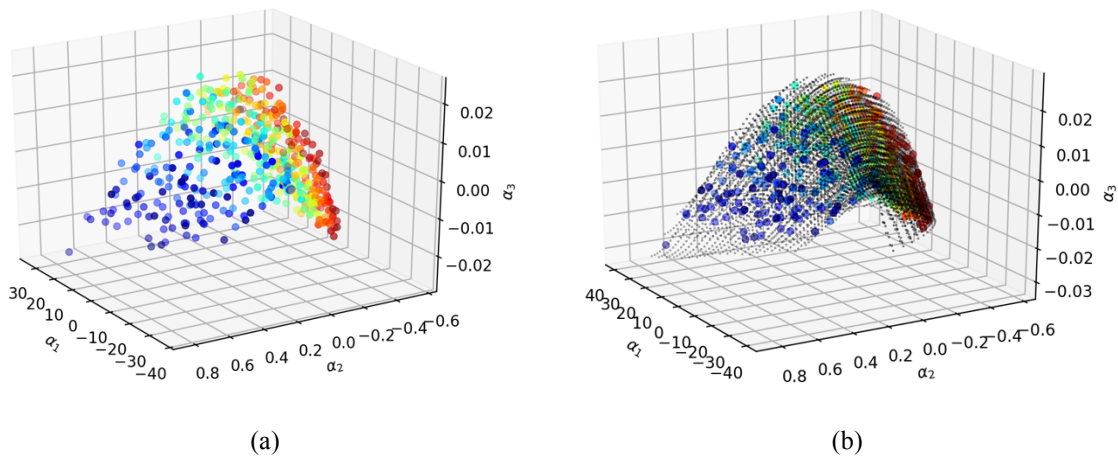


Figure 8 – Ensemble des clichés dans l'espace- $\alpha$  (a) et la variété 3D obtenue par krigeage.

Le processus d'identification a été appliqué pour validation. Les résultats sont présentés dans le tableau 2.

Table 2 – Erreurs relatives de l'identification des paramètres  $C_{10}$ ,  $C_{01}$  et  $C_{11}$

Paramètre	Valeur considérée (MPa)	Valeur identifiée (MPa)	Erreur (%)
$C_{10}$	1	1.009	0.909
$C_{01}$	1	0.991	0.888
$C_{11}$	1	1.005	0.509

## Conclusions

Dans ce travail, une étude a été réalisée afin d'évaluer l'application de la méthode de réduction de modèle basée sur la variété de formes sur l'identifiabilité des paramètres d'une loi de comportement de type Mooney-Rivlin. Malgré la complexité des lois de comportement hyper-élastiques usuelles, nous avons pu identifier jusqu'à trois paramètres des matériaux élastomères à partir des courbes de nano-indentation. Les résultats obtenus sur le coefficient de frottement tendent à démontrer que sa valeur exacte n'a généralement pas besoin d'être connue tant qu'elle est située dans le domaine d'adhérence. Enfin, la démarche proposée pourra être appliquée sur des cas concrets à partir de données issues directement d'essais expérimentaux.

## Références

- [1] DG. Krige, A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy* 52.6, 119-139, 1951.
- [2] G. Le Quilliec, B. Raghavan and P. Breitkopf. A manifold learning-based reduced order model for springback shape characterization and optimization in sheet metal forming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 285, 621-638, 2015.
- [3] L. Meng, P. Breitkopf, B. Raghavan, G. Mauvoisin, O. Bartier and X. Hernot, Identification of material properties using indentation test and shape manifold learning approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 297, 239–257, 2015.
- [4] L. Meng, P. Breitkopf and G. Le Quilliec, B. Raghavan, P. Villon. Nonlinear shape-manifold learning approach concepts, tools and applications. *Archives of Computational Methods in Engineering*, pp. 1-21, 2016.
- [5] L. Meng, P. Breitkopf and G. Le Quilliec, An insight into the identifiability of material properties by instrumented indentation test using manifold approach based on P-h curve and imprint shape, *International Journal of Solids and Structures*, 106(47), 13–26, 2017.
- [6] M. Stein, Large sample properties of simulations using Latin hypercube sampling, *Technometrics* 29, 143–151, 1987.