

Couplage élasticité - endommagement - plasticité dans un cadre explicitement orthotrope pour la modélisation de la maçonnerie sous sollicitations cycliques multiaxiales

P.-J. Tisserand^{1,2}, C. Giry², T T H. Nguyen¹, R. Desmorat², F. Ragueneau²

¹ Division ISM, Département des OA, DG2I, SNCF RESEAU, 15 rue Jean-Philippe Rameau 93212 La-Plaine-Saint-Denis, huyen.nguyen@reseau.sncf.fr

² LMT, ENS Paris-Saclay, CNRS, Université Paris-Saclay, 61 avenue du Président Wilson, F-94235, Cachan, France, giry@lmt.ens-cachan.fr

Résumé — Cette contribution propose le développement d'un modèle de comportement pour la description de la maçonnerie sous chargements cycliques multi-axiaux. Il couple l'élasticité orthotrope, l'endommagement orthotrope et le frottement interne pour représenter efficacement la réponse de la maçonnerie sous chargements complexes.

Mots clés — Maçonnerie, Endommagement, Sismique.

1 Introduction

La maçonnerie est un matériau composite constitué de blocs rigides, avec ou sans mortier de liaison. Ce matériau de construction plurimillénaire est encore beaucoup présent aujourd'hui. SNCF RESEAU est chargé de maintenir et développer le réseau ferré français. Ce réseau comprend des ponts en maçonnerie qui représentent un patrimoine inestimable. Or, ce dernier vieillit, pâtit de la hausse régulière du trafic ferroviaire et subit les aléas naturels. Afin d'investiguer la réponse de ces ouvrages sous chargements complexes (multiaxiales, cycliques, ...), ce travail propose un nouveau modèle basé sur la mécanique de l'endommagement. La première partie de ce document expose les comportements caractéristiques de la maçonnerie. Une seconde partie développe les équations constitutives du modèle de comportement. La dernière partie illustre la réponse du modèle par comparaison avec des réponses expérimentales.

2 Formulation mécanique

2.1 Typologie du comportement mécanique de la maçonnerie

La maçonnerie est un matériau hétérogène, composite, constitué de blocs rigides (briques) liés de mortier. Comme tout composite, son architecture et le comportement de ses constituants influencent son comportement mécanique. Ici est traité un type particulier de maçonnerie (Fig.1) représentatif du patrimoine SNCF RESEAU, les maçonneries assisées régulières.

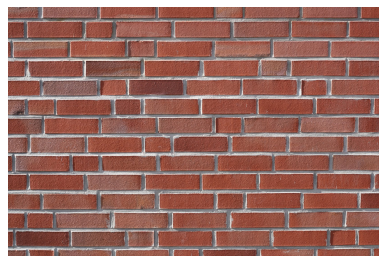


FIGURE 1 – Illustration de maçonnerie assisée régulière

En accord avec les résultats de campagnes expérimentales issus de la littérature (Fig.2), les propositions suivantes peuvent être dégagées sur les principales caractéristiques mécaniques du matériau :

- élasticité orthotrope ([9], [12], [5]);

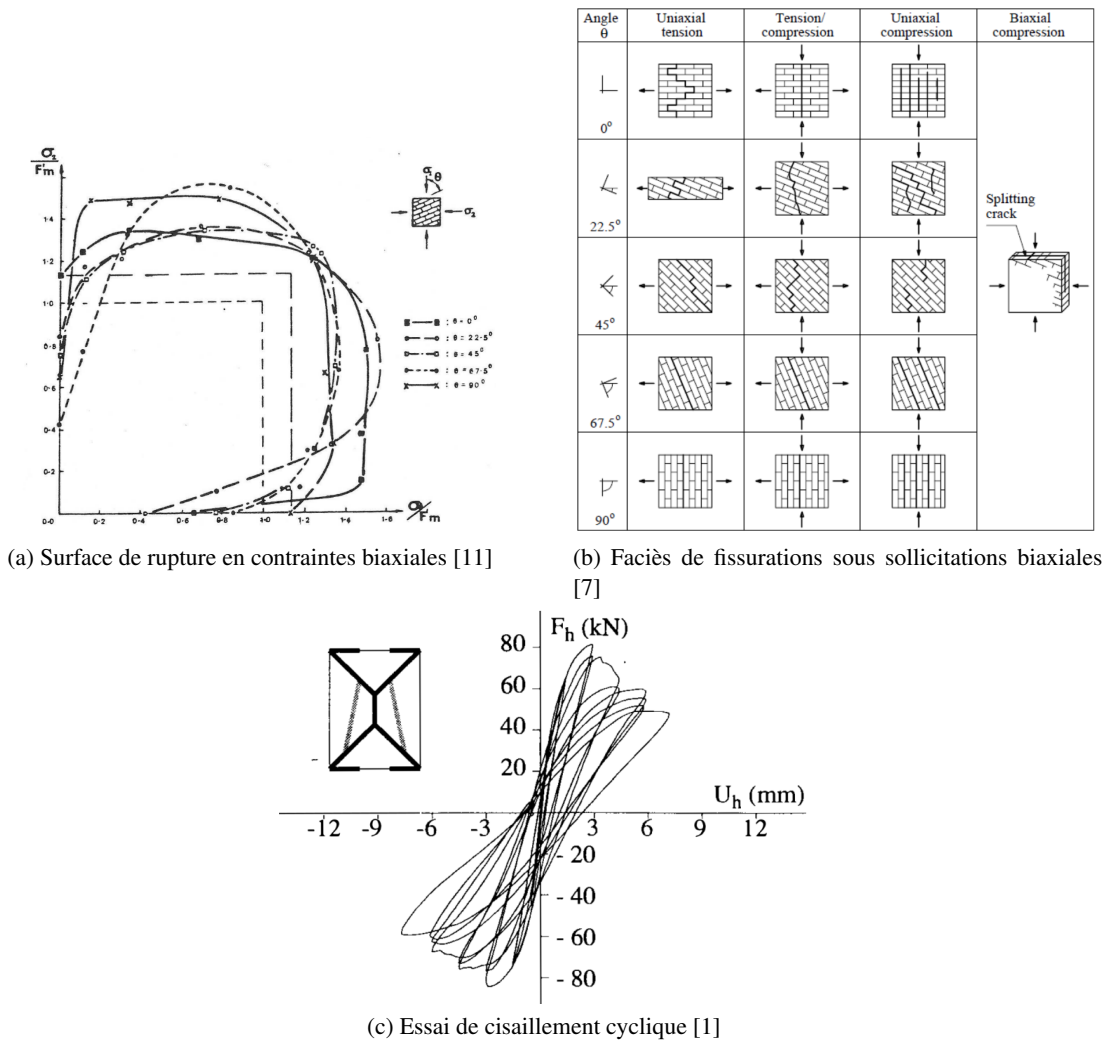


FIGURE 2 – Illustrations des comportements expérimentaux

- influence de l'orientation des joints sur la comportement à rupture (Fig.2(a));
- trois systèmes de fissurations orthogonaux dont les normales des plans de fissuration correspondent aux directions d'orthotropie élastique.(Fig.2(c))[7];
- endommagement dû à l'extension normale au plan d'endommagement (Fig.2(b));
- effet de l'endommagement unilatéral (Phénomène de refermeture des fissures);
- frottement interne dans les fissures soumises au cisaillement.(Fig.2(c))

2.2 Equations constitutives

L'endommagement suivant trois systèmes de fissurations orthogonaux a déjà été traité dans [8]. En reprenant la mesure de l'endommagement proposée dans [4], il est possible d'écrire le tenseur de souplesse effectif comme dans [10] :

$$\mathbf{S}^{eff} = \mathbf{S}^0 + (d_1 \mathbf{A1} : \mathbf{S}^0) + (d_2 \mathbf{A2} : \mathbf{S}^0) + (d_3 \mathbf{A3} : \mathbf{S}^0) \quad (1)$$

Avec : \mathbf{S}^{eff} le tenseur de souplesse effectif; \mathbf{S}^0 le tenseur de souplesse du matériau sain; d_1 , d_2 et d_3 les mesures de l'endommagement (i.e $d_1 = 0$ représente un matériau sain et $d_1 \rightarrow +\infty$ représente un matériau complètement endommagé); $\mathbf{A1}$, $\mathbf{A2}$ et $\mathbf{A3}$ des tenseurs de fabriques permettant de sélectionner les composantes sur lesquelles agissent les endommagements.

L'enthalpie libre totale du système $\rho\Psi^*$ est considérée comme étant la somme de l'enthalpie libre des composantes normales $\rho(\Psi_e^{normal})^*$, l'enthalpie libre des composantes de cisaillement $\rho(\Psi_e^{shear})^*$ et

l'enthalpie libre de frottement $w_s^{friction}$ (Eq.2)

$$\rho\Psi^* = \rho(\Psi_e^{normal})^* + \rho(\Psi_e^{shear})^* + w_s^{friction} \quad (2)$$

Le partitionnement des contraintes positives et négatives pour l'unilatéralité de l'endommagement implique une écriture de $\rho(\Psi_e^{normal})^*$ comme Eq.3

$$\begin{aligned} 2\rho(\Psi_e^{normal})^* = & \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{E_1}(1+d_1) + \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_-^2}{E_1} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2}(1+d_2) + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_-^2}{E_2} \\ & + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3}(1+d_3) + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_-^2}{E_3} - 2\frac{\nu_{21}\sigma_{11}\sigma_{22}}{E_1} - 2\frac{\nu_{31}\sigma_{11}\sigma_{33}}{E_1} - 2\frac{\nu_{32}\sigma_{33}\sigma_{22}}{E_2} \end{aligned} \quad (3)$$

L'écriture de $\rho(\Psi_e^{shear})^*$ (Eq.4) est inspirée par [6] afin de permettre la transcription des phénomènes de frottements internes en cisaillement et leurs couplages avec l'endommagement.

$$\begin{aligned} \rho(\Psi_e^{shear})^* = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\sigma_{12} - \sigma_{12}^\pi)^2 (1 + A_{112}d_1 + A_{212}d_2)}{G_{12}} + \frac{(\sigma_{12}^\pi)^2}{G_{12}g_{12}(d_1, d_2)} \right\} + \\ & \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\sigma_{13} - \sigma_{13}^\pi)^2 (1 + A_{113}d_1 + A_{313}d_3)}{G_{13}} + \frac{(\sigma_{13}^\pi)^2}{G_{13}g_{13}(d_1, d_3)} \right\} + \\ & \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\sigma_{23} - \sigma_{23}^\pi)^2 (1 + A_{223}d_2 + A_{323}d_3)}{G_{23}} + \frac{(\sigma_{23}^\pi)^2}{G_{23}g_{23}(d_2, d_3)} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

$g_{ij}(d_i, d_j)$ (Eq.5) est une fonction de couplage entre l'endommagement et le frottement, et σ_{ij}^π la contrainte de frottement.

$$g_{ij}(d_i, d_j) = \frac{A_{ij}d_i + A_{ji}d_j}{1 + A_{ij}d_i + A_{ji}d_j} \quad (5)$$

Enfin, $w_s^{friction}$ (Eq.6) découle de l'emploi d'écroissements cinématiques dans le comportement en frottement interne et correspond à une densité d'énergie stockée.

$$w_s^{friction} = \frac{1}{2} \{ b_{12}\alpha_{12}^2 + b_{13}\alpha_{13}^2 + b_{23}\alpha_{23}^2 \} \quad (6)$$

Les lois d'états suivantes dérivent de l'enthalpie libre totale de Gibbs.(Eq. 7).

$$\begin{aligned} i \neq j \neq k : & \\ \varepsilon_{ii} = \rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_{ii}} = & \frac{\langle \sigma_{ii} \rangle_+}{E_i}(1+d_i) + \frac{\langle \sigma_{ii} \rangle_-}{E_i} - \frac{\nu_{ij}\sigma_{jj}}{E_i} - \frac{\nu_{ik}\sigma_{kk}}{E_i} \\ \varepsilon_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_{ij}} = & \frac{(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^\pi)}{G_{ij}}(1 + A_{ij}d_i + A_{ji}d_j) \\ \varepsilon_{ij}^\pi = -\rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma_{ij}^\pi} = & \frac{(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^\pi)}{G_{ij}}(1 + A_{ij}d_i + A_{ji}d_j) - \frac{\sigma_{ij}^\pi}{G_{ij}g_{ij}(d_i, d_j)} \\ X_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial \alpha_{ij}} = & b_{ij}\alpha_{ij} \\ Y_i = \rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial d_i} = & \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ii}^2}{E_i} d_i + \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^\pi)^2 A_{ij}d_i}{G_{ij}} + \frac{(\sigma_{ij}^\pi)^2}{G_{ij}} \frac{\partial [g_{ij}(d_i, d_j)]^{-1}}{\partial d_i} \end{aligned} \quad (7)$$

2.3 Lois d'évolutions

2.3.1 Endommagement

La variable d'endommagement d_i est pilotée par une déformation équivalente d'extension du matériau associée à chacune des directions d'orthotropie ($\tilde{\epsilon}_i$) (Eq.8).

$$\tilde{\epsilon}_i = \sqrt{\langle \epsilon_{ii} \rangle_+^2 + \beta_{ij} \epsilon_{ij}^2 + \beta_{ik} \epsilon_{ik}^2} \quad (8)$$

Ici, β_{ij} et β_{ik} sont des paramètres matériaux représentant la contribution des déformations de cisaillement dans la mesure de l'extension.

Le seuil élastique est écrit sur chaque direction d'orthotropie. Cette forme (Eq.9) est liée à la possibilité de régularisation en énergie, et donc d'intégration de la loi.

$$f_i = S_i^t (\tilde{\epsilon}_i - k_i^t) - \ln\left[(1 + d_i) \frac{k_i^t}{\tilde{\epsilon}_i}\right] \leq 0 \quad (9)$$

Avec k_i^t représentant le seuil d'extension dans la direction i et S_i^t la sensibilité de l'endommagement d_i . Ces paramètres seront à identifier par l'expérience. En posant $f_i = 0$, l'endommagement s'écrit de manière explicite (Eq.10).

$$d_i = \frac{\tilde{\epsilon}_i}{k_i^t} e^{S_i^t (\tilde{\epsilon}_i - k_i^t)} - 1 \quad (10)$$

Cette écriture respecte les conditions de Kuhn-Tucker ($f_i \leq 0$, $\dot{d}_i \geq 0$ et $d_i \geq 0$ et $\dot{d}_i f_i = 0$), $\dot{d}_1 \geq 0$, $\dot{d}_2 \geq 0$ et $\dot{d}_3 \geq 0$

2.3.2 Frottement interne

Les fonctions critères f_{12}^π , f_{13}^π et f_{23}^π sont définies pour piloter les effets de chargement/déchargement (Eq. 11). Le mécanisme frottant des fissures en cisaillement implique l'utilisation d'un critère de type Mohr-Coulomb.

$$f_{ij}^\pi = |\sigma_{ij}^\pi - X_{ij}| + \mu_{ij} (\langle \sigma_{ii} \rangle_- + \langle \sigma_{jj} \rangle_-) \leq 0 \quad (11)$$

Les lois d'évolution dérivent du pseudo-potential F^π via la règle de normalité. Le modèle de frottement interne est non-associé comme dans [2] et chaque composante de l'écoulement est découplée (Eq. 12).

$$F_{ij}^\pi = |\sigma_{ij}^\pi - X_{ij}| + \frac{1}{2} a_{ij} X_{ij}^2 \quad (12)$$

Eq. 13 exprime la règle de normalité avec l'introduction du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}_{ij}^\pi$.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^\pi &= \dot{\lambda}_{ij}^\pi \frac{\partial F_{ij}^\pi}{\partial \sigma_{ij}^\pi} = \dot{\lambda}_{ij}^\pi \frac{\sigma_{ij}^\pi - X_{ij}}{|\sigma_{ij}^\pi - X_{ij}|} \\ \dot{\alpha}_{ij} &= -\dot{\lambda}_{ij}^\pi \frac{\partial F_{ij}^\pi}{\partial X_{ij}} = \dot{\lambda}_{ij}^\pi \left(\frac{\sigma_{ij}^\pi - X_{ij}}{|\sigma_{ij}^\pi - X_{ij}|} - a_{ij} X_{ij} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

3 Applications

Dans cette partie du document, il s'agira de montrer les capacités du modèle à représenter les comportements observés expérimentalement ainsi que de définir des limites d'application.

3.1 Comportement numérique.

3.1.1 Essai de traction uniaxiale

Ce premier test correspond à une sollicitation de traction simple en déplacement imposé [3].

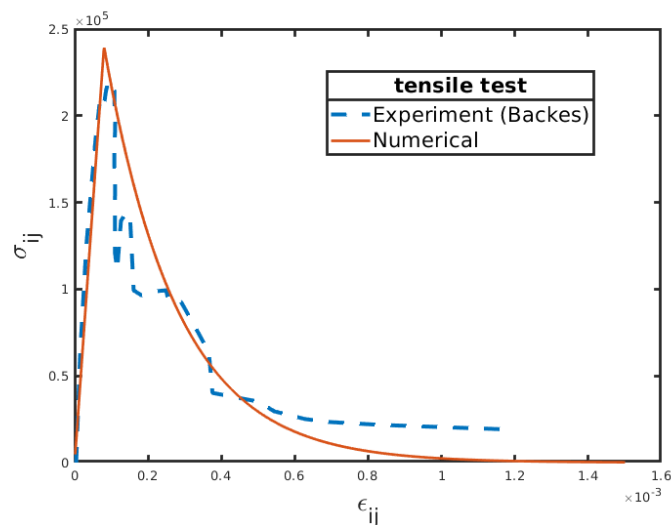
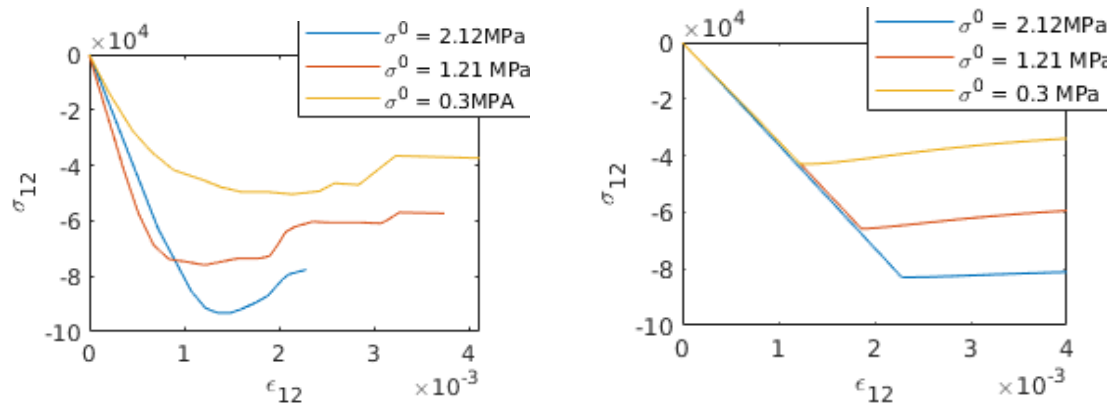


FIGURE 3 – Traction simple numérique et expérimental [3]

Le modèle représente bien le comportement de traction. Il est à noter que le pic expérimental est moins fragile que celui du modèle, une amélioration de la loi d'évolution de l'endommagement peut mener à ce résultat.

3.1.2 Cisaillement monotone avec pression de confinement



(a) Réponses expérimentales en cisaillement monotone pour plusieurs niveaux de confinement [9]

(b) Réponse du modèle en cisaillement monotone pour plusieurs niveaux de confinement

FIGURE 4 – Illustrations des comportements en cisaillement monotone sous diverses pressions de confinement

Cet essai a pour objectif d'analyser l'influence d'une contrainte de confinement sur la réponse en cisaillement monotone d'un mur en maçonnerie. Dans la modélisation effectuée, le mur en maçonnerie est représenté par un point de Gauss. La comparaison des figures 4(a) et 4(b) montre que le comportement n'est pas parfaitement représenté, cela vient du fait que la campagne expérimentale [9] ne permet pas telle quelle une identification optimale des paramètres matériaux, ainsi, certains sont pris par défaut. Une campagne expérimentale complète permettrait l'obtention de meilleurs résultats.

3.1.3 Cisaillement cyclique

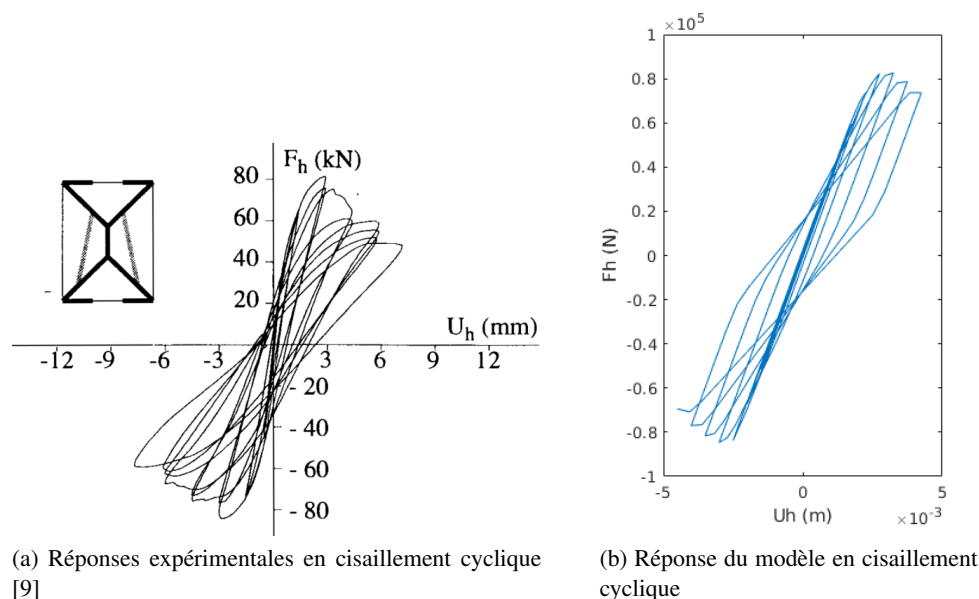


FIGURE 5 – Illustrations des comportements en cisaillement cyclique

Ce dernier test permet d'analyser l'énergie dissipée par la maçonnerie sous une sollicitation en cisaillement cyclique. La figure 5 montre le développement d'hystérèses qui augmentent avec l'endommagement. Ce phénomène est bien reproduit par le modèle.

4 Conclusions et perspectives

La loi de comportement proposée ici est basée sur un couplage élasticité - endommagement et plasticité dans un cadre explicitement orthotrope. La maçonnerie est d'abord considérée comme élastique orthotrope. Son endommagement est considéré comme gouverné par un système de plans orthogonaux, dont les normales sont colinéaires aux directions d'orthotropie de la maçonnerie. Ensuite, ces plans de fissuration sont considérés comme engendrant un frottement interne représenté par de la plasticité induite par l'endommagement. Cette loi ainsi formulée représente bien le comportement de la maçonnerie sous des chargements monotones et cycliques. Une procédure d'identification des paramètres matériaux ainsi qu'une base expérimentale fiable sont des leviers de perfectionnement des résultats obtenus. Le développement de cette loi de comportement prend place dans un projet plus global et plus large dont la prochaine étape est le calcul d'ouvrages d'art ferroviaires sous sollicitations sismiques.

Références

- [1] A. Anthoine, G. Magonette, and G. Mageses. Shear-compression testing and analysis of brick masonry walls. *Tenth European Conference on Earthquake Engineering*, 3 :1657–1662, 01 1995.
- [2] P. J. Armstrong and C. O. Frederick. *A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect*. Berkeley Nuclear Laboratories, 1966.
- [3] H.-P. Backes. Tensile strength of masonry. *Proc. 7th IBMaC*, 1985.
- [4] B. Budiansky and R. J. O'connell. Elastic moduli of a cracked solid. *International Journal of Solids and Structures*, 12(2) :81 – 97, 1976.
- [5] K. Chaimoon and M. Attard. Modeling of unreinforced masonry walls under shear and compression. *Engineering Structures*, 29(9) :2056 – 2068, 2007.
- [6] R. Desmorat, F. Ragueneau, and H. Pham. Continuum damage mechanics for hysteresis and fatigue of quasi-brittle materials and structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(2) :307–329.

- [7] M. Dhanasekar, A. Page, and PW. Kleeman. The failure of brick masonry under biaxial stresses. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 79(2) :295–313, 1985.
- [8] M. Kachanov. Elastic solids with many cracks and related problems. volume 30 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 259 – 445. Elsevier, 1993.
- [9] PB. Lourènço, R. De Borst, and JG. Rots. A plane stress softening plasticity model for orthotropic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(21) :4033–4057, 1997.
- [10] L. Marcin. *Behaviour modelling up to rupture of woven fabric composite for a reliable design of structures*. These, Université Bordeaux 1, January 2010.
- [11] A. Page. The biaxial compressive strength of brick masonry. *Ice Proceedings*, 71 :893–906, 01 1981.
- [12] L. Pelà. *Continuum damage model for nonlinear analysis of masonry structures*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 03 2009.