

# Étude comparative de la méthode Local Defect Correction et des méthodes h-adaptatives

D. Koliesnikova<sup>1,2</sup>, I. Ramière<sup>1</sup>, F. Lebon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> CEA Cadarache, DEN, DEC, SESC, LSC, {daria.koliesnikova, isabelle.ramiere}@cea.fr

<sup>2</sup> Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LMA, {koliesnikova, lebon}@lma.cnrs-mrs.fr

**Résumé** — Les méthodes de raffinement adaptatif de maillage sont des outils prometteurs offrant une possibilité d'atteindre une précision souhaitée lors de la résolution numérique des problèmes complexes tout en limitant le coût de calcul. Ce travail présente une étude comparative des techniques de raffinement de pas de maillage : les méthodes h-adaptatives et la méthode multi-grilles Local Defect Correction, effectuée dans le cadre de l'élasticité linéaire pour des éléments finis quadrangulaires. Ces méthodes sont comparées en terme de temps de calcul et d'espace mémoire utilisé pour une précision fixée.

**Mots clés** — Raffinement adaptatif de pas de maillage, Estimateur d'erreur, Méthode des éléments finis.

## 1 Introduction

Actuellement, les techniques de raffinement adaptatif de maillage (AMR) constituent un outil numérique largement utilisé pour la simulation de problèmes physiques et industriels. Ces problèmes sont souvent caractérisés par la présence de concentrations ou de singularités locales (conditions aux limites discontinues, forces concentrées, coins rentrants, fissures, etc.). Une solution numérique fiable de ces problèmes peut être obtenue en raffinant uniformément le maillage, ce qui peut être numériquement inefficace, voire parfois inabordable. Une autre possibilité est de s'appuyer sur des méthodes AMR. Ces méthodes permettent de réduire l'effort de calcul en enrichissant automatiquement le maillage dans des régions locales, où la solution est moins régulière et l'erreur est élevée.

De façon générale, l'erreur de discrétisation par éléments finis est de la forme  $O(h^p)$ , où  $h$  est le pas de maillage, et  $p$  est le degré d'interpolation des fonctions de base. Parmi les techniques d'AMR, qui ont pour objectif de réduire cette erreur, on peut distinguer au moins deux groupes principaux : les méthodes adaptatives (Fig.1a) et les méthodes multi-grilles locales (Fig.1b). L'objectif des techniques adaptatives est de fournir un maillage global raffiné, soit en déplaçant les noeuds (r-adaptative) [10], soit en ajustant la taille des éléments (méthodes h-adaptatives locale ou globale) [7], soit en modifiant le degré d'interpolation des fonctions de forme (p-adaptative) [2], soit en résolvant un problème composite à l'aide d'un maillage additionnel (s-adaptative) [9], ou en combinant ces approches (h-p, h-r, r-s, etc.).

L'idée des méthodes multi-grilles locales [5] est d'améliorer la précision de la solution en ajoutant progressivement des sous-niveaux de pas de maillage de plus en plus petit. Ces techniques permettent de "zoomer" le domaine de calcul dans les zones critiques. Le couplage entre les sous-niveaux générés est effectué par un processus itératif qui permet de transférer les informations entre les sous-grilles en utilisant des opérateurs de prolongement et de restriction. Il existe une grande variété des méthodes multi-grilles locales disponibles dans la littérature [1]. Parmi celles-ci, la méthode Local Defect Correction semble représenter le choix le plus pertinent pour les problèmes de mécanique des solides avec des effets localisés [3].

Les stratégies basées sur le raffinement du pas de maillage sont généralement considérées comme étant les plus adaptées aux applications industrielles, car les solveurs industriels sont principalement conçus pour traiter des éléments impliquant des fonctions de forme du premier ou du second ordre maximum. C'est pourquoi, le but du présent travail est de fournir une étude comparative de méthodes, basées sur le raffinement local du pas de maillage. Dans [8] la comparaison des approches h-adaptatives, méthodes AMR les plus utilisées dans la littérature, a été effectuée pour les éléments finis triangulaires. Par contre, ces méthodes n'ont pas été à ce jour comparées avec la méthode LDC, qui travaille également

sur le pas de maillage. On propose ici de comparer les techniques de raffinement h-adaptatives, à la fois locale (grille non-conforme) et globale (grille conforme), avec l’approche multi-grille Local Defect Correction dans le cadre de l’élasticité linéaire pour les éléments finis quadrangulaires. L’intérêt de l’utilisation des éléments quadrangulaires croît ces dernières années notamment par la possibilité d’utiliser des solveurs linéaires rapides (maillages structurés réguliers).

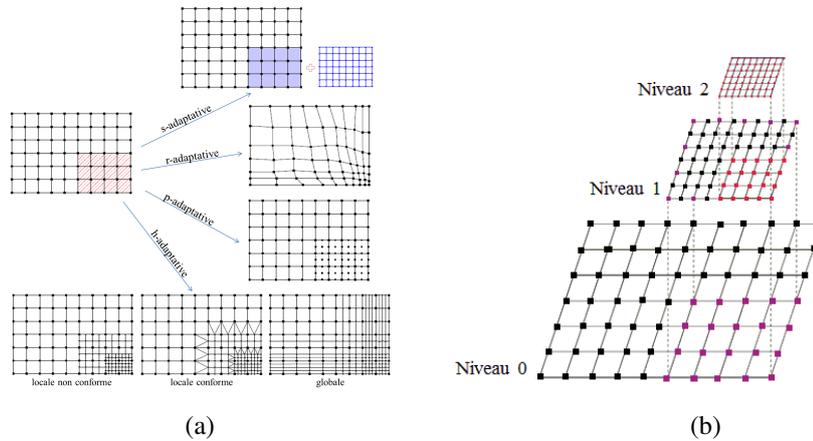


FIGURE 1 – (a) Méthodes adaptatives : s-, r-, p-, h-raffinement; (b) Méthode multi-grilles locale : exemple de sous-niveaux

Afin de détecter automatiquement les zones à raffiner, des estimateurs d’erreur *a posteriori*, permettant d’estimer l’erreur de discrétisation, sont généralement utilisés. Dans cette étude, les stratégies d’AMR envisagées sont couplées avec l’estimateur d’erreur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu basé sur le lissage des contraintes [17, 18]. Si on introduit de plus un critère d’optimalité de maillage, basé sur différentes considérations concernant la distribution de l’erreur élémentaire, on peut déterminer le maillage raffiné. Il a été choisi dans ce travail, d’exploiter ces critères de deux manières différentes afin d’obtenir le nouveau maillage : (i) détecter les éléments à raffiner, puis appliquer un ratio de raffinement fixé a priori (raffinement à ratio fixe), (ii) détecter les éléments à raffiner, puis calculer la nouvelle fonction de densité de maillage (raffinement à ratio ajusté). La première stratégie permet de raffiner progressivement le maillage, l’objectif de la seconde est d’atteindre une taille d’élément optimale plus rapidement en partant d’un maillage initial grossier.

Dans la littérature, la solution élément finis est considérée comme étant acceptable quand la *précision globale* prescrite est atteinte [13]. Par contre, du point de vue pratique, un aspect qui semble plus important est de capturer avec précision les effets localisés. Ainsi, l’analyse des *erreurs locales* est un élément important pour la construction d’un maillage approprié, garantissant de concentrer un nombre suffisant d’éléments dans les régions où la solution varie considérablement, ou bien là où une représentation géométrique plus précise est nécessaire. C’est pourquoi, dans cette étude une comparaison des critères d’optimalité de maillage est également effectuée afin de définir celui qui permet de fournir une solution acceptable dans les zones d’intérêt.

## 2 Méthodes de raffinement de pas de maillage

La procédure de raffinement adaptatif de maillage consiste à construire à partir d’une triangulation (ou quadrangulation) initiale  $\mathcal{T}_0$  du domaine  $\Omega$ , une suite de maillages de plus en plus raffinés localement  $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^k$  permettant de respecter la précision requise sur la solution. En utilisant un estimateur d’erreur *a posteriori*, permettant d’évaluer la qualité de la solution obtenue, un ensemble  $\mathcal{M}_i \in \mathcal{T}_i$  d’éléments assignés au raffinement, est défini. En raffinant les éléments détectés  $\mathcal{M}_i$  avec un ratio  $\beta$ , qui peut être variable par élément, le maillage  $\mathcal{T}_{i+1}$  est obtenu. Le raffinement continue tant qu’une tolérance fixée sur l’erreur n’est pas atteinte, ou qu’un critère d’arrêt imposé ne soit pas satisfait.

- Les méthodes h-adaptatives consistent à construire une suite de maillages raffinés *globalement*. Dans le cadre des éléments finis quadrangulaires, trois manières principales permettant de construire les maillages  $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^k$  peuvent être considérées. La plus naturelle consiste à subdiviser les éléments dans les

zones d'intérêt, en autorisant l'apparition de noeuds non-conformes (h-adaptative locale non-conforme). Une autre possibilité est d'ajouter une zone de transition (généralement en impliquant d'autres types d'éléments) afin d'éviter la non-conformité de maillage (h-adaptative locale conforme). La troisième possibilité est de construire un maillage conforme en utilisant des éléments de même type, ce qui implique la propagation de raffinement en-dehors de l'ensemble des éléments détectés  $\mathcal{M}_i$  (h-adaptative globale). Dans le cadre de cette étude, il a été choisi de se limiter aux maillages composés uniquement d'éléments quadrangulaires. On va donc considérer seulement les méthodes h-adaptative locale non-conforme et h-adaptative globale.

- La méthode Local Defect Correction consiste à améliorer la solution en ajoutant progressivement dans des zones d'intérêt des sous-grilles locales ( $\mathcal{T}_i$  avec  $1 \leq i \leq k$ ) de taille de maille de plus en plus fines. Les problèmes définis sur chaque sous-grille sont traités de manière séquentielle, et sont reliés grâce à un processus itératif (Fig.2), incorporant des opérateurs de prolongement et de restriction [11]. L'opérateur de prolongement sert à définir les conditions aux limites du problème fin à partir du problème grossier, alors que l'opérateur de restriction a pour but de calculer un résidu du problème grossier à partir de la solution fine restreinte.

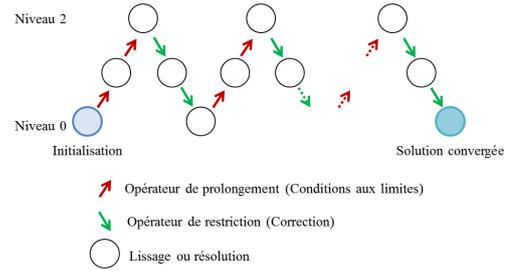


FIGURE 2 – Processus itératif de la méthode multi-grilles Local Defect Correction

### 3 Estimateur d'erreur et critères de raffinement

#### 3.1 Estimateur d'erreur

Dans cette étude, l'estimateur d'erreur basé sur le lissage des contraintes proposé par Zienkiewicz et Zhu [17, 18] est considéré. Cet estimateur est largement utilisé dans les codes de calculs industriels grâce à son bon rapport qualité/coût et à la simplicité de son implémentation. L'idée principale est de reconstruire une solution en contrainte lissée  $\sigma^*$ , supposée être une meilleure approximation de la solution réelle que celle obtenue à partir de la solution éléments finis  $\sigma^h$ . Deux méthodes permettant d'obtenir les contraintes lissées ont été proposées dans la littérature : la méthode de projection [17] et la méthode appelée 'Superconvergent Patch Recovery' [18]. Les deux conduisent à des résultats comparables, mais l'approche SPR semble être légèrement plus coûteuse, donc l'approche de projection a été retenue. L'erreur élémentaire, calculée en moyennant sur chaque élément  $\Omega_e$  les différences nodales entre les deux champs de contrainte ( $\sigma^*$  et  $\sigma^h$ ), est alors exprimée dans la norme énergie de la manière suivante :

$$\|\mathbf{e}\|_{\Omega_e} = \left( \int_{\Omega_e} (\sigma^* - \sigma^h) : (\varepsilon^* - \varepsilon^h) d\Omega_e \right)^{1/2} \quad (1)$$

avec  $\sigma^h$  et  $\varepsilon^h$  respectivement les champs de contraintes et de déformations calculés par la méthode éléments finis,  $\sigma^*$  et  $\varepsilon^*$  - respectivement les contraintes lissées et les déformations élastiques correspondantes.

#### 3.2 Critère d'optimalité de maillage

A partir du champ d'erreur élémentaire estimée (Eq.1), en tenant compte de considérations concernant la distribution de l'erreur dans le maillage optimal (*critère d'optimalité de maillage*), un nouveau maillage peut être obtenu. Trois critères d'optimalité de maillage sont étudiés dans cette étude. Le maillage peut être considéré optimal quand (i) soit l'erreur globale est distribuée uniformément entre les éléments (critère ZZ) [17], (ii) soit l'erreur dite spécifique est égale entre les éléments (critère OB) [15], (iii) soit l'erreur locale respecte la tolérance fixée (critère LOC).

Pour les critères provenant de la littérature (ZZ et OB), l'erreur relative élémentaire de la forme suivante va être utilisée par la suite :

$$\|\mathbf{e}\|_{\Omega_e}^{rel} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{\Omega_e}}{\left( \int_{\Omega} \sigma^h : \varepsilon^h d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma^h) : (\varepsilon^* - \varepsilon^h) d\Omega \right)^{1/2}} \quad (2)$$

Comme il a été mentionné dans l'introduction, d'un point de vue utile pour l'ingénierie, la manière plus appropriée de construire un maillage optimal est de satisfaire la précision requise localement. Ainsi, pour le critère LOC on utilise l'erreur relative locale, définie de la manière suivante :

$$\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{\Omega_e}^{rel} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{\Omega_e}}{\left( \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}^h : \boldsymbol{\varepsilon}^h d\Omega_e + \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h) : (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^h) d\Omega_e \right)^{1/2}} \quad (3)$$

### Raffinement à ratio fixe

Le raffinement à ratio fixe consiste à appliquer un taux de raffinement constant défini *a priori* (ici  $\beta = 1/2$ ) à tous les éléments qui nécessitent un raffinement. Ceci permet de raffiner progressivement le maillage afin de mieux respecter la tolérance fixée  $\varepsilon_\Omega$ . Les éléments à raffiner  $\mathcal{M}_i$  sont détectés en se basant sur les trois critères d'optimalité du maillage définis précédemment :

- **ZZ** : *Distribution égale de l'erreur globale* :  $\mathcal{M}_i^{ZZ} = \{\cup_{j=1}^{\#\mathcal{T}_i} T_{i,j} \in \mathcal{T}_i; \quad \|\mathbf{e}\|_{T_{i,j}}^{rel} (\#\mathcal{T}_i)^{1/2} > \varepsilon_\Omega\}$  avec  $\#\mathcal{T}_i$  le nombre d'éléments du maillage  $\mathcal{T}_i$ ;

- **OB** : *Distribution égale de l'erreur spécifique* :  $\mathcal{M}_i^{OB} = \{\cup_{j=1}^{\#\mathcal{T}_i} T_{i,j} \in \mathcal{T}_i; \quad \|\mathbf{e}\|_{T_{i,j}}^{rel} \left( \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega_{T_{i,j}})} \right)^{1/2} > \varepsilon_\Omega\}$ , où  $\mu(\Omega_{T_{i,j}})$  est la mesure de l'élément  $T_{i,j}$  et  $\mu(\Omega)$  représente la mesure totale du domaine ;

- **LOC** : *Erreur estimée locale respectant le seuil* :  $\mathcal{M}_i^{LOC} = \{\cup_{j=1}^{\#\mathcal{T}_i} T_{i,j} \in \mathcal{T}_i; \quad \|\tilde{\mathbf{e}}\|_{T_{i,j}}^{rel} > \varepsilon_\Omega\}$ .

### Raffinement à ratio ajusté

Dans le cas de raffinement à ratio ajusté, à partir d'un maillage  $\mathcal{T}_i$  contenant les éléments de taille caractéristique  $h_{T_{i,j}}$ , un taux de raffinement optimal  $\beta_j$  par maille, est prescrit. La nouvelle distribution de taille d'éléments  $h_{T_{i+1,j}}$  est obtenue, telle que  $h_{T_{i+1,j}} = \beta_j h_{T_{i,j}}$ . Le ratio de raffinement  $\beta_j$  est défini en se basant sur les critères d'optimalité de maillage choisis de la façon suivante :

- **ZZ** : *Distribution égale de l'erreur globale* :  $\beta_j^{ZZ} = (\varepsilon_\Omega)^{1/p} (\|\mathbf{e}\|_{T_{i,j}}^{rel} (\#\mathcal{T}_i)^{1/2})^{-1/p}$ ;

- **OB** : *Distribution égale de l'erreur spécifique* :  $\beta_j^{OB} = (\varepsilon_\Omega)^{1/p} (\|\mathbf{e}\|_{T_{i,j}}^{rel} \left( \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega_{T_{i,j}})} \right)^{1/2})^{-1/p}$ ;

- **LOC** : *Erreur estimée locale respectant le seuil* :  $\beta_j^{LOC} = (\varepsilon_\Omega)^{1/p} (\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{T_{i,j}}^{rel})^{-1/p}$ , avec  $p$  le taux de convergence maximal de la solution éléments finis en contrainte.

Pour la méthode LDC, afin de garder la philosophie de la méthode inchangée (génération des sous-grilles avec un rapport de raffinement constant par niveau), un ratio ajusté constant est défini comme la moyenne de la distribution de rapport de raffinement calculé :  $\beta = \text{moy}_{T_{i,j} \in \mathcal{M}_i} \beta_j$ .

## 3.3 Critère d'arrêt du raffinement

Un critère d'arrêt basé sur des considérations géométriques est utilisé [16]. Le processus de génération de nouveaux maillages ou de nouveaux sous-niveaux est arrêté quand la mesure de l'ensemble des éléments détectés  $\mathcal{M}_i$  est petit comparativement à la mesure totale du domaine :  $\frac{\mu(\mathcal{M}_i)}{\mu(\Omega)} \leq \delta$  avec  $\delta$  défini par l'utilisateur.

## 4 Résultats numériques de l'étude comparative

Pour cette étude, le code de calcul d'analyse de structures par la méthode des éléments finis CAST3M [6], développé par CEA, est utilisé. Les méthodes considérées (h-adaptatives et LDC) sont comparées en se basant sur les aspects suivants :

- erreur réelle globale relative  $\|\mathbf{e}\|_{\Omega}^{ex}$ , obtenue en sommant les contributions élémentaires d'erreur relative  $\|\mathbf{e}\|_{\Omega}^{ex} = \left( \sum_{j=1}^{\#\mathcal{T}_i} (\|\mathbf{e}\|_{T_{i,j}}^{rel})^2 \right)^{1/2}$  où  $\|\mathbf{e}\|_{T_{i,j}}^{rel}$  est calculé par l'Eq.2, en appliquant la solution analytique  $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}^{ex}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}^{ex}$ ;

- erreurs réelles locale relatives (obtenues avec Eq.3 en utilisant la solution exacte), évaluées qualitativement avec le ratio suivant :

$$\eta = \frac{\mu(\mathcal{D}_k)}{\mu(\Omega)} \cdot 100\%, \quad (4)$$

où  $\mathcal{D}_k = \{\cup_j T_{k,j} \in \tilde{\mathcal{T}}_k; \|\tilde{\mathbf{e}}\|_{T_{k,j}}^{rel} > \varepsilon_\Omega\}$  est l'ensemble des éléments où l'erreur relative locale dépasse le seuil.  $\tilde{\mathcal{T}}_k = \mathcal{T}_k$  représente le maillage obtenu à la dernière étape de raffinement pour les approches h-

adaptatives, ou la grille composite  $\tilde{\mathcal{T}}_k = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{T \in \mathcal{T}_{i-1} \setminus \mathcal{T}_i} T$  avec  $\mathcal{T}_{k+1} = \emptyset$  pour la méthode LDC, où  $k$  est le nombre de remaillages, ou de sous-niveaux générés;

- espace mémoire utilisé : nombre de noeuds  $N_{tot}$  (représentant le nombre de noeuds du maillage final  $\mathcal{T}_k$  pour les méthodes h-adaptatives, et la somme de noeuds de toutes les sous-grilles pour LDC);
- temps CPU : temps total englobant la construction des maillages globaux pour les méthodes h-adaptatives ou des sous-grilles locales pour la méthode LDC, la définition et la résolution de problèmes définis sur les maillages générés.

Comme exemple numérique, nous nous intéressons au problème d'une plaque infinie avec un trou circulaire (de rayon  $R$ ), soubissant une charge  $\sigma_{\infty} = 1 \text{ N/m}^2$  dans la direction  $e_1$  (cf. Fig.3). La solution analytique de ce problème est connue, cf. [8] notamment. Le matériau est supposé élastique linéaire de module d'Young  $E = 10^3 \text{ N/m}^2$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Pour des raisons de symétrie, uniquement un quart de la plaque (cf. Fig.3) est considéré. Des conditions aux limites de Dirichlet traduisant la symétrie ( $u = 0$ ) sont prescrites sur les bords I et IV, les valeurs de la solution analytique en contrainte sont imposées sur les bords II et III (Fig.3). Comme application numérique, nous choisissons  $a = 10 \text{ m}$ ,  $R = 1 \text{ m}$ .

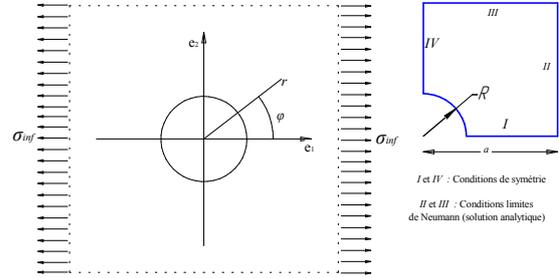


FIGURE 3 – Cas test : plaque infinie avec un trou circulaire / domaine de calcul et conditions aux limites

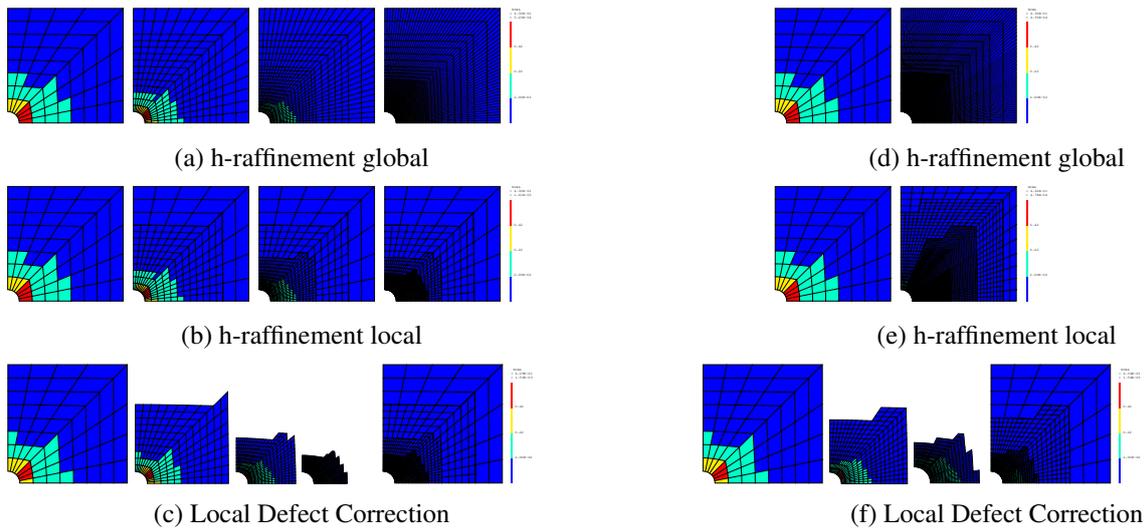


FIGURE 4 – Plaque trouée / cartes d'erreur locale réelle relative / critère d'optimalité de maillage LOC / tolérance sur l'erreur  $2 \cdot 10^{-2}$  / (a), (b), (c) raffinement à ratio fixe; (d), (e), (f) raffinement à ratio ajusté.

Pour toutes les méthodes de raffinement étudiées, une même triangulation grossière initiale (la plus uniforme possible)  $\mathcal{T}_0$  du domaine  $\Omega$ , à base d'éléments  $Q_1$ , est utilisée. Les différents maillages raffinés sont obtenus grâce aux méthodes et critères de raffinement décrits en section 2 et 3. Il est important de souligner que la géométrie du cercle est redéfinie à chaque remaillage (même pour les méthodes h-locale et LDC) afin d'éviter une stagnation de l'erreur. À chaque étape  $i$  de raffinement, l'ensemble d'éléments assignés au raffinement  $\mathcal{M}_i$  est sélectionné parmi les éléments raffinés pendant étape précédente (raffinement de  $\mathcal{M}_{i-1}$ ), ce qui mène à des zones de raffinement imbriquées. De plus, pour la méthode h-locale, un raffinement progressif est assuré en limitant la non-conformité à 1 noeud non-conforme par bord d'élément [12].

À titre d'exemple, les cartes d'erreurs locales relatives pour le critère LOC sont présentées sur la Fig.4 et pour le critère ZZ sur la Fig.5 pour chacune des méthodes de raffinement. On peut observer, que les maillages générés par les trois méthodes de raffinement sont cohérents et raffinent les éléments dans les mêmes zones (notamment h-locale et LDC). Pour la méthode LDC, les cartes d'erreur, obtenues après la convergence du processus itératif, sont présentées sur chaque sous-grille  $\{\mathcal{T}_i\}_{i=0}^k$  séparément et

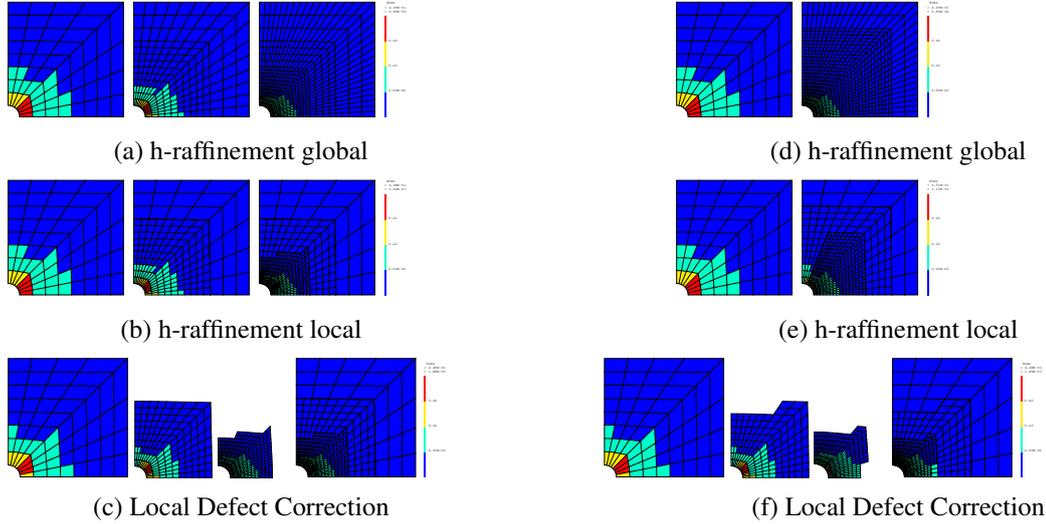


FIGURE 5 – Plaque trouée / cartes d’erreur locale réelle relative / critère d’optimalité de maillage ZZ / tolérance sur l’erreur  $2 \cdot 10^{-2}$  / (a), (b), (c) raffinement à ratio fixe ; (d), (e), (f) raffinement à ratio ajusté.

sur la grille composite  $\tilde{\mathcal{T}}_k$ . On peut remarquer qu’en raffinant le maillage, les zones  $\mathcal{D}_i$  où l’erreur locale dépasse la tolérance fixée se concentrent de plus en plus vers le trou central, comme attendu. Dans la partie dominante du domaine (les éléments en bleu) l’erreur locale relative respecte la tolérance fixée. Il peut être vu qu’avec le critère LOC, la zone du maillage où l’erreur locale est contrôlée est plus grande qu’avec le critère ZZ (plus global).

TABLE 1 – Plaque trouée / raffinement à ratio fixe

Tolérance $2.5 \cdot 10^{-3}$	Raffinement uniforme	h-raffinement global			h-raffinement local			Local Defect Corection		
		ZZ	OB	LOC	ZZ	OB	LOC	ZZ	OB	LOC
$\ e\ _{\Omega}^{ex}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$3.11 \cdot 10^{-3}$	$1.69 \cdot 10^{-3}$	$1.67 \cdot 10^{-3}$	$3.40 \cdot 10^{-3}$	$2.11 \cdot 10^{-3}$	$2.09 \cdot 10^{-3}$	$3.40 \cdot 10^{-3}$	$2.11 \cdot 10^{-3}$	$2.10 \cdot 10^{-3}$
$\eta, \%$	2.3	5.07	2.4	2.3	10.8	2.7	2.3	10.9	2.7	2.3
$N_{tot}$	263169	30326	92853	102087	13424	48508	48752	18112	65121	65525
$k$	6	5	6	6	5	6	6	5	6	6
CPU total	88s	6.3s	27.1s	30.2s	8.6s	38.9s	41.1s	3.6s	19.9s	19.2s
CPU (définitions)	1.92s	0.54s	1.19s	1.16s	4.71s	6.91s	7.14s	0.14s	0.25s	0.24s
CPU (résolutions)	29.3s	3.22s	8.18s	9.05s	2.34s	5.79s	4.51s	1.19s	3.16s	3.66s

TABLE 2 – Plaque trouée / raffinement à ratio ajusté

Tolérance $2.5 \cdot 10^{-3}$	Raffinement uniforme ( $h_{T_{i,j}} = 1/64h_{T_{0,j}}$ )	h-raffinement global			h-raffinement local			Local Defect Corection		
		ZZ	OB	LOC	ZZ	OB	LOC	ZZ	OB	LOC
$\ e\ _{\Omega}^{ex}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$2.77 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$	$3.88 \cdot 10^{-3}$	$2.07 \cdot 10^{-3}$	$2.02 \cdot 10^{-3}$	$5.41 \cdot 10^{-3}$	$2.50 \cdot 10^{-3}$	$2.46 \cdot 10^{-3}$
$\eta, \%$	2.3	3.7	2.5	1.7	4.8	2.8	2.5	12.5	3.1	2.9
$N_{tot}$	263169	63869	149468	255150	32145	92361	101609	10221	32446	35732
$k$	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
CPU total	71.5s	12.8s	35.3s	83.7s	16.8s	42.5s	50.4s	2.7s	11.5s	12.9s
CPU (définitions)	1.5s	0.39s	0.97s	1.94s	2.71s	15.50s	18.08s	0.05s	0.13s	0.14s
CPU (résolutions)	24.2s	6.61s	10.99s	49.10s	3.83s	16.62s	21.58s	0.75s	1.85s	2.13s

Le tableau 1 ainsi que la figure 6 présentent les résultats obtenus pour un raffinement à ratio fixe, tandis que le tableau 2 et la figure 7 reportent les principaux résultats obtenus avec la stratégie en ratio ajusté. On peut constater, que globalement toutes les méthodes de raffinement ont atteint la tolérance sur l’erreur globale fixée, même si un léger dépassement du seuil peut être constaté pour le critère ZZ. Pour une comparaison pertinente des méthodes de raffinement, il a été choisi d’appliquer le même critère d’arrêt géométrique ( $\delta = 0.03$ ) pour tous les critères d’optimalité de maillage (ZZ, OB, LOC), même si le critère ZZ, en étant plus global, nécessiterait un critère d’arrêt additionnel afin de pouvoir respecter le seuil global [8].

Pour toutes les approches, comme attendu, le critère de raffinement local (LOC) permet de contrôler plus précisément l’erreur locale ( $\eta$  plus petit), mais nécessite généralement un peu plus de noeuds. Pour cet exemple, le critère LOC donne les résultats assez proches du critère OB.

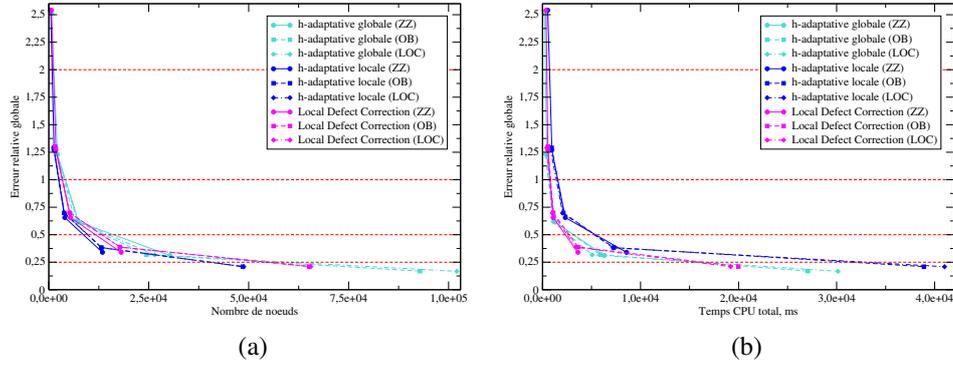


FIGURE 6 – Plaque trouée / raffinement à ratio fixe : (a) Erreur relative globale en fonction de nombre de noeuds  $N_{tot}$  ; (b) Erreur relative globale en fonction de temps CPU total

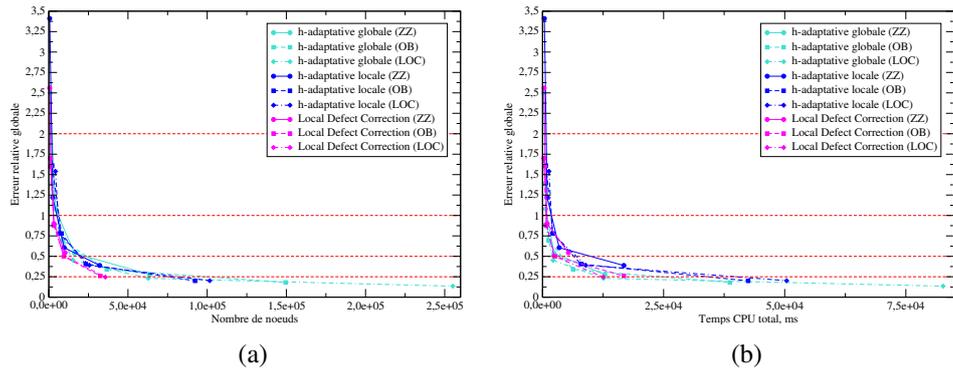


FIGURE 7 – Plaque trouée / raffinement à ratio ajusté : (a) Erreur relative globale en fonction de nombre de noeuds  $N_{tot}$  ; (b) Erreur relative globale en fonction de temps CPU total

Pour les méthodes h-adaptatives, le raffinement à ratio ajusté permet d’atteindre la tolérance sur l’erreur globale avec moins de remaillages, mais avec un nombre total de noeuds plus élevé, et donc un temps de calcul *in fine* plus important, par rapport au raffinement à ratio fixe. On peut remarquer, qu’en appliquant la méthode h-adaptative globale avec le critère LOC et ratio ajusté, le temps total de calcul devient plus grand que celui d’un raffinement uniforme bien choisi. Pour la méthode LDC, il a été choisi de prendre le ratio constant  $\beta$  moyen en tant que ratio ajusté (cf. section 3), et cela conduit à moins de sous-niveaux générés, avec un nombre total de noeuds plus limité comparé au ratio fixe.

En terme de maillages générés, dans le cas du raffinement à ratio fixe, comme attendu, les méthodes h-locale et LDC mènent à des résultats similaires (le nombre total de noeuds de LDC est plus grand à cause des sous-niveaux de maillages imbriqués). Le maillage composite de LDC a quasiment le même nombre de noeuds que le maillage final obtenu avec la méthode h-locale. Par ailleurs, les méthodes h-locale et LDC utilisent toujours un espace mémoire plus limité que la méthode h-globale (remaillage complet). Concernant le raffinement à ratio ajusté, la méthode LDC est plus intéressante que les méthodes h-adaptatives (certainement dû au ratio moyen appliqué). Concernant le temps total de calcul, pour la méthode h-globale le temps du remaillage peut dominer le temps total, ce qui s’explique par la nécessité de remailler le domaine complètement afin d’assurer la conformité du maillage. Pour l’approche h-locale, on voit que le temps utilisé pour la définition des problèmes dépasse le temps de la résolution de ces problèmes. Cela vient des opérations additionnelles effectuées afin de définir les relations de non-conformité. En ce qui concerne la méthode LDC, le temps de calcul est limité par rapport aux méthodes h-adaptatives. Les problèmes définis sur chaque sous-niveau sont rapides à définir et à résoudre. Malgré la nécessité d’effectuer un certain nombre d’itérations, le fait de pouvoir garder les factorisations des matrices (car uniquement les termes sources sont modifiés), rend cette méthode très compétitive.

## 5 Conclusions et perspectives

Cette étude a permis de comparer, pour des maillages linéaires quadrangulaires, trois grandes méthodes de raffinement de pas de maillage :

- La méthode *h-adaptative globale* nécessite un remaillage complet du domaine (surtout pour des éléments quadrangulaires), ce qui peut devenir très vite coûteux et conduire à des éléments dégénérés. Par contre, cette méthode est très peu intrusive et se met en place très facilement.
- La méthode *h-adaptative locale* permet de conserver le caractère local de raffinement. Grâce à cette approche, des maillages plus optimaux en terme de nombre d'éléments sont obtenus, mais l'apparition de noeuds non-conformes est inévitable. Des opérations additionnelles doivent alors être effectuées pour gérer les relations de non-conformité, ce qui rend la méthode très intrusive et possiblement coûteuse.
- La méthode multi-grilles locale *Local Defect Correction* permet de conserver la localité de raffinement tout en contournant les difficultés liées à la non-conformité du maillage. Cette méthode semble la plus compétitive en terme de temps de calcul et d'espace mémoire utilisé. De plus, cette méthode est générique (possibilité de changer le maillage, modèle, etc. entre les sous-niveaux) et non-intrusive (uniquement les opérations de pre- et post-traitement sont à effectuer).

Lors de cette étude, trois critères d'optimalité de maillage ont été testés et comparés. Le critère ZZ, basé sur la distribution élémentaire égale de l'erreur globale, a conduit à des maillages pas suffisamment raffinés localement avec le critère d'arrêt local choisi. Les critères OB et LOC sont plus locaux et ont tendance à concentrer plus d'éléments fins dans des zones locales critiques. Ils permettent de contrôler l'erreur locale d'une façon plus précise. Pour cet exemple, les critères LOC et OB conduisent à des résultats proches, il est donc intéressant de les tester sur un cas test industriel plus réaliste. Il a été également remarqué que le ratio ajusté moyen constant  $\beta$  pris pour la méthode LDC a conduit à des résultats très compétitifs en termes de nombre total de noeuds et de temps total de calcul. Il serait donc intéressant de tester ce ratio moyen ajusté sur les méthodes h-adaptatives.

Les performances de la méthode LDC nous conduisent à vouloir étendre cette méthode à des comportements non linéaires avec effet d'histoire. Les problématiques génériques liées à l'adaptation dynamique de maillage, au raffinement spatio-temporel et à la conservation des variables internes devront être abordées. Si nécessaire, une nouvelle comparaison des méthodes de raffinement de pas de maillage sur un cas test avec non linéarité matérielle sera de nouveau conduite.

## Références

- [1] K. Khadra, Ph. Angot, J-P. Caltagirone, P. Morel. *Concept de zoom adaptatif en architecture multigrille locale ; étude comparative des méthodes L.D.C., F.A.C. et F.I.C.*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, Tome 30, no.1, pages 39-82, 1996.
- [2] I. Babuska, B. Szabo. *On the rates of convergence of the Finite Element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18(3) :323-341, 1982.
- [3] L. Barbié, I. Ramière and F. Lebon. *Strategies involving the Local Defect Correction multi-level refinement method for solving three-dimensional linear elastic problems*, Computers and Structures, 130 :73-90, 2014.
- [4] M.J. Berger, J. Olinger. *Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations*, Journal of Computational Physics, 53(3) :484-512, 1984.
- [5] A. Brandt. *Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems*, Mathematics of Computation, 31(138) :333-390, 1977.
- [6] CAST3M, [www.cast3m.cea.fr](http://www.cast3m.cea.fr), 2018
- [7] L. Demkowicz, Ph. Devloo, J.T. Oden. *On an h-type mesh-refinement strategy based on minimization of interpolation errors*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 53(1) :67-89, 1985.
- [8] W. Ehlers, M. Ammann, S. Diebels. *H-adaptive FE methods applied to single- and multi-phase problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 54(2) :219-239, 2002.
- [9] J. Fish. *The s-version of the Finite Element method*, Computers and Structures, 43(3) :539-547, 1992.
- [10] S. Ghosh, S.K. Manna. *R-adapted Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element method in metal-forming simulation*, Journal of Materials Engineering and Performance, 271-282, 1993.
- [11] W. Hackbusch. *Local Defect Correction method and Domain Decomposition techniques*, pages 89-113, 1984.
- [12] R.H. Nochetto, A. Veeser. *Primer of Adaptive Finite Element Methods*, pages 125-225. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [13] P. Ladavèze, J.P. Pelle, Ph. Rougeot. *Error estimation and mesh optimization for classical finite elements*. Engineering Computations, vol.8, no.1, pages 69-80, 1991.
- [14] S. McCormick. *Fast Adaptive Composite grid (FAC) methods : Theory for the variational case*, pages 115-121, 1984.
- [15] E. Oñate and G. Bugeda. *Mesh optimality criteria for adaptive Finite Element computations*, Engineering Computations, pages 307-321, 1993.
- [16] I. Ramière, H. Liu, F. Lebon. *Original geometrical stopping criteria associated to multilevel adaptive mesh refinement to deal with local singularities*, submitted, 2018
- [17] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24(2) :337-357, 1987.
- [18] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique.*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33(7) :1331-1364, 1992.