

# Un cadre Arlequin généralisée en réduction de modèle pour la fabrication additive

R. Ruysen<sup>1</sup>, A. Barbarulo<sup>1</sup>, H. Ben Dhia<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux, CentraleSupélec. {romain.ruysen, andrea.barbarulo, hachmi.ben-dhia}@centralesupelec.fr

**Résumé** — Depuis leurs créations, les procédés de fabrication d'additive (FA) ont initié un changement de paradigme pour les processus de fabrication. Néanmoins, en raison du jeune âge de la FA et de l'absence de maîtrise des procédés, les propriétés mécaniques des pièces produites sont encore imprévisibles, ce qui limite considérablement leur utilisation. Dans ce papier une version généralisée du cadre Arlequin, couplée à une méthode de réduction de modèle, a été introduite dans le contexte de la fabrication additive SLM afin d'ouvrir une voie vers des simulations fiables et performantes.

**Mots clés** — ROM, PGD, Multi-échelle, Méthode Arlequin, Selective Laser Melting.

## 1 Introduction

Depuis leurs créations, le procédé de fusion laser sur lit de poudre (SLM) et de fusion par faisceau d'électrons (EBM), en tant qu'exemples de choix pour la fabrication d'additive (FA), ont initié un changement de paradigme pour les processus de fabrication. Ils consistent en la fusion sélective de couches de poudre métallique superposées grâce à une source d'énergie en mouvement commandée par machine. De par leur nature, ces procédés permettent une liberté sans précédent dans la conception, la personnalisation et l'optimisation des pièces mécaniques. De plus, ils sont particulièrement adaptés à l'intégration logiciel-procédé lorsque la géométrie souhaitée est conçue à l'aide d'un outil de conception assistée par ordinateur (CAO) et produite directement par un processus automatisé, éliminant ainsi toutes les étapes intermédiaires entre la vision des concepteurs et le monde physique.

Néanmoins, en raison du jeune âge de la FA et de l'absence de maîtrise du procédé, les propriétés mécaniques des pièces produites sont souvent imprévisibles, ce qui limite considérablement leur utilisation. Pour cette raison, des méthodes numériques capables de prédire les caractéristiques finales de la pièce, de repérer les points critiques au cours du processus et d'aider le processus de conception lui-même, semblent être nécessaires. Malheureusement, les processus SLM et EBM englobent un grand nombre de physiques complexes (thermique, mécanique, électromagnétique, métallurgique, changement de phase) et posent un gigantesque problème multi-échelles en espace et en temps, requérant une attention particulière dans leur traitement numérique [1].

Il est donc évident qu'une méthode multi-échelle, capable de simuler de façon fiable et détaillée la réponse du système, avec un temps de calcul compatible aux exigences des industriels. Dans ce contexte, le cadre Arlequin [2, 3, 4] à été récemment appliqué à la fabrication additive [5]. Cette méthode a permis le calcul fin du champ thermique, nécessaire pour déterminer la micro-structure du matériau et la tenue mécanique de la pièce, en considérant toutes les échelles significatives du procédé. Ceci représente une première pour les méthodes numériques en fabrication additive et ses performances inégalées (si toutes les échelles sont prises en compte).

Néanmoins, les temps de calcul restent fortement dépendant de la taille de la pièce à simuler et ils sont particulièrement significatifs si toutes les non-linéarités introduites par les paramètres thermiques du matériaux, le phénomène de changement de phase et les conditions aux bords sont prises en compte.

L'objectif de ce travail est d'introduire un cadre Arlequin généralisé qui permet de découpler les calculs à l'intérieur des patches destinés à une échelle bien déterminée. De telle façon les calculs non-linéaires sur un maillage très raffiné, qui représentent la partie la plus onéreuse du calcul, pourront être confiné sur une zone très restreinte du domaine en proximité de la source de chaleur concentrée. Une fois que cette zone est découplée du reste du domaine, des méthodes hautes performances basées sur la

réduction de modèle [6] pourront être utilisées.

## 2 Formulation Arlequin généralisée pour la fabrication additive

L'objectif est de résoudre l'équation de la chaleur dans un domaine simplifié, figure 1, dans lequel une source de chaleur laser bouge au cours du temps. Le domaine en bleu est un substrat fixe dans l'espace, le domaine rouge suit le laser délimitant ainsi une zone fine à son voisinage.

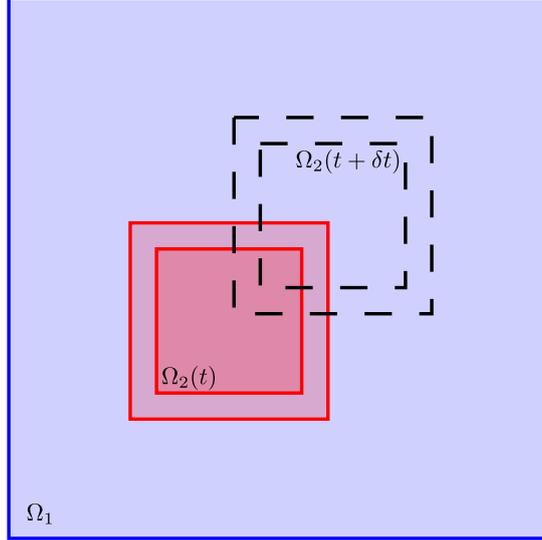


FIGURE 1 – Domaine de résolution de l'équation de la chaleur

La formulation Arlequin de ce problème prend la forme :

Trouver  $(T_1, T_2, \lambda) \in W_1 \times W_2 \times M$  tels que :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} a_1(T_1, T_1^*, \alpha_1) + b_1(T_1, T_1^*, \alpha_1) + C(\lambda, T_1^*) = 0 & \forall T_1^* \in W_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} a_2(T_2, T_2^*, \alpha_2) - d_2(T_2, T_2^*, \alpha_2) + b_2(T_2, T_2^*, \alpha_2) - C(\lambda, T_2^*) = l_2(T_2^*) & \forall T_2^* \in W_2 \\ C(\mu, T_1 - T_2) = 0 & \forall \mu \in M \end{cases} \quad (1)$$

où :

$$a_i(T_i, T_i^*, \alpha_i) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \rho c_p (T_i T_i^*) d\Omega \quad (2)$$

$$b_i(T_i, T_i^*, \alpha_i) = \int_{\Omega_i} \alpha_i k (\nabla T_i \cdot \nabla T_i^*) d\Omega \quad (3)$$

$$d_2(T_2, T_2^*, \alpha_2) = \int_{\Omega_2} \alpha_2 (\mathbf{v} \cdot \nabla T_2) T_2^* d\Omega \quad (4)$$

$$l_2(T_2^*) = \int_{\Omega_2} f_l T_2^* d\Omega \quad (5)$$

$$(6)$$

Où le terme de convection  $d_2(T_2, T_2^*, \alpha_2)$  permet le calcul de la solution thermique dans le patch sans projection entre chaque étape temporelle du champ thermique du substrat sur le patch fin.

Afin de pouvoir utiliser des techniques de résolution numériques différentes dans chaque sous-domaine, une méthode itérative de type Uzawa est utilisée. Elle consiste à imposer un multiplicateur de Lagrange, à résoudre les équations de conservation d'énergie sur chacun des patches et à finalement vérifier la compatibilité des solutions sur la zone de couplage comme en figure 2. Si celle-ci n'est pas suffisante, une correction du multiplicateur de Lagrange est réalisée et on itère à nouveau.

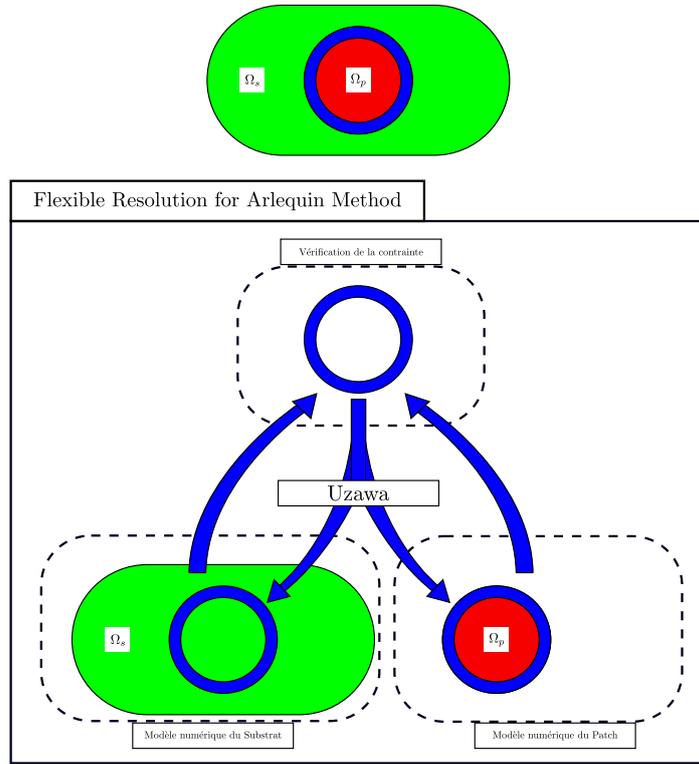


FIGURE 2 – Chemin de résolution Arlequin généralisé

Ce type de résolution permet de coupler de façon simple et efficace des méthodes de nature profondément différente, il est possible par exemple de coupler du linéaire à du non-linéaire, des chemins en temps différents ou des méthodes FEM à des modèles réduits. Ceci permet d’adapter, dans le cadre Arlequin, chaque patch vis-à-vis de la problématique spécifique à la fois en termes de maillage et de méthode de résolution.

Dans le contexte de la fabrication additive il est d’importance vitale de traiter la zone de champ proche du laser de la façon la plus précise possible, et en tenant compte des non-linéarités le tout en cherchant une performance maximale. Pour cette raison l’application des techniques de réduction de modèle et en particulier la Proper Generalized Decomposition (PGD) [7, 8], semble très adaptée pour avoir des solutions précises à moindre coût dans la zone critique du problème.

Une fois que la solution thermique du patch est déterminée sous forme PGD en bases réduites et variables séparées espace-temps  $T_2 = \sum_1^N \phi(x)\lambda(t)$ , elle peut être couplée au champ thermique trouvé par éléments finis linéaires dans le substrat.

### 3 Exemple

Dans cette section la faisabilité de l’approche en figure 2 a été testée sur un cas simplifié :

- la convection, présente dans l’équation 1, n’est pas considérée ;
- une simple Galerkin PGD est utilisée ;
- l’équation dans la zone d’intérêt autour du laser est linéaire.

Cependant la PGD est en soi une méthode non-linéaire, et même dans ce contexte simplifié, l’exemple numérique suivant permet de valider le faisabilité d’un couplage linéaire vs. non-linéaire pour deux méthodes différentes.

Considérons le domaine en figure 3

avec une condition de flux nul aux bords, un terme source de chaleur représentant le laser, de type gaussien et immobile dans ce cas. Le maillage grossier en bleu est de taille  $4 \times 10^{-4} m$ , le maillage fin en rouge est de taille  $10^{-4} m$  et le couplage est assuré sur une zone d’épaisseur  $0.1 \times 10^{-4} m$ . Le champ thermique de la zone en bleu est calculé par EF triangulaires linéaires et chemin en temps implicite. La zone en rouge est résolue avec une Progressive Galerkin PGD. La convergence du point fixe est obtenue

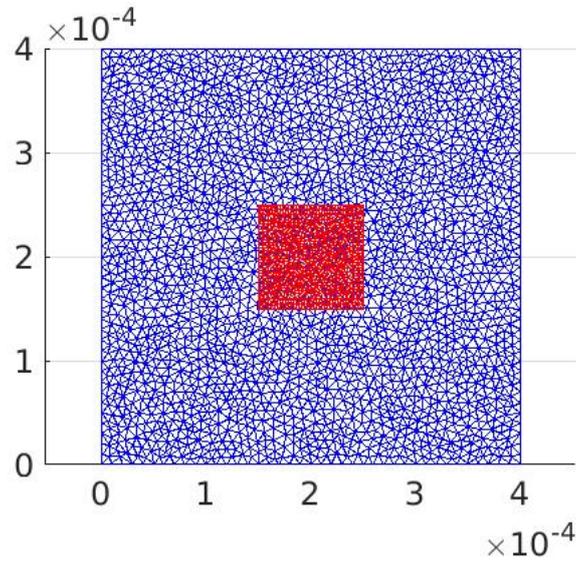


FIGURE 3 – Domaine d'étude et maillage

en 8 itérations avec un résidu de  $2 \times 10^{-3}$  sur la correction du multiplicateur de Lagrange et 4 modes PGD. La figure 4 présente la solution au temps final sur le patch fin, le grossier et la somme des deux.

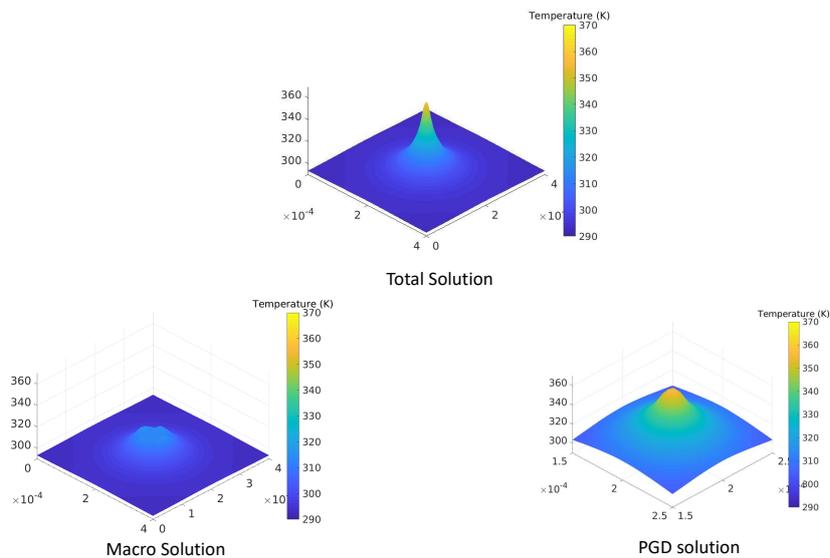


FIGURE 4 – Solution totale et détail des champs du patch micro et macro.

La solution PGD (PGD solution donnée par la figure 4) est obtenue avec 4 modes PGD dont les fonctions d'espace et de temps sont affichées en figure 5.

## 4 Conclusions et perspectives

Dans ce papier une version généralisée du cadre Arlequin a été introduite pour le procédé de fabrication additive SLM. Dans ce contexte, où la performance de calcul est primordiale, ce travail permet de coupler différentes échelles avec des méthodes haute performance comme la PGD. Ces premiers résultats encourageants seront suivi par un couplage avec des techniques plus récentes de réduction de modèle pour les équations thermiques non-linéaires à haut gradient [9].

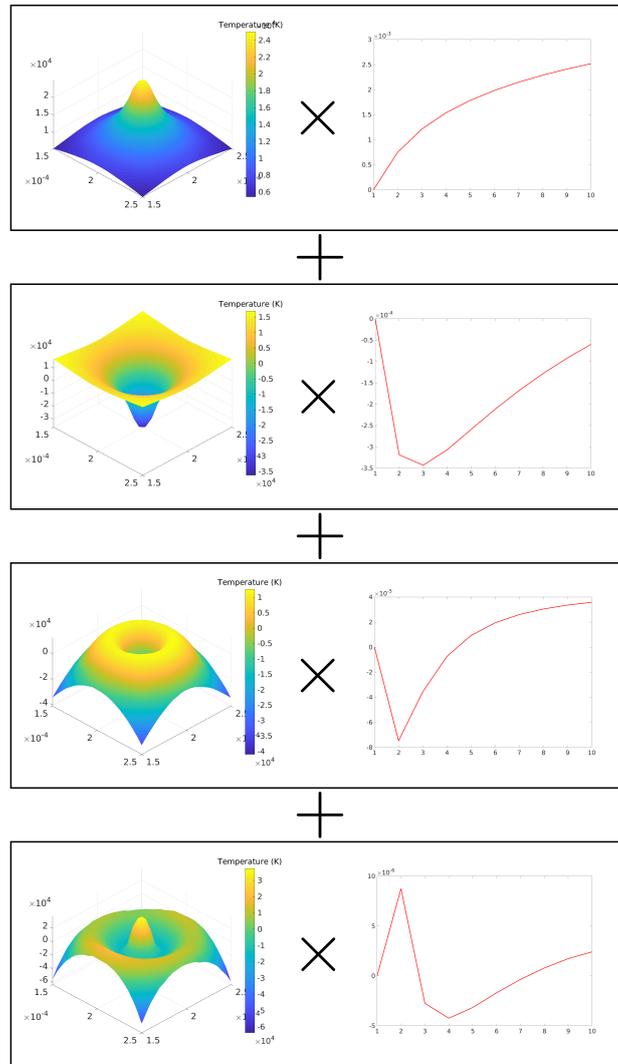


FIGURE 5 – Solution PGD en espace et temps pour les premiers 4 modes

## Références

- [1] Christoph Meier, Ryan W. Penny, Yu Zou, Jonathan S. Gibbs, and A. John Hart. Thermophysical Phenomena in Metal Additive Manufacturing by Selective Laser Melting : Fundamentals, Modeling, Simulation and Experimentation. sep 2017.
- [2] Hachmi Ben Dhia and Guillaume Rateau. Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 332(7) :649 – 654, 2001.
- [3] Hachmi Ben Dhia. Further insights by theoretical investigations of the multiscale arlequin method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3) :215–232, 2008.
- [4] Hashmi Ben Dhia and Guillaume Rateau. The arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(11) :1442–1462, 2005.
- [5] Romain Ruysen, Andrea Barbarulo, and Hachmi Ben Dhia. Multiscale thermal simulation of additive manufacturing process : Selective laser melting (slm). *Submitted to Journal for Multiscale Computational Engineering*.
- [6] Francisco Chinesta, Antonio Huerta, Gianluigi Rozza, and Karen Willcox. Model reduction methods. *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*, pages 1–36, 2017.
- [7] A. Nouy. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1603–1626, April 2010.
- [8] P. Ladevèze. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1603–1626, April 2010.

- [9] B. Favoretto, C.A. de Hillerin, O. Bettinotti, V. Oancea, and A. Barbarulo. Reduced order modeling via pgd for highly transient thermal evolutions in additive manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019 accepted for publication.