

## Certification robuste par des inégalités de concentration de mesure

L. Bonnet<sup>1</sup>, É. Savin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> DTIS, ONERA, Université Paris-Saclay, F-91123 Palaiseau, France ; {luc.bonnet,eric.savin}@onera.fr

**Résumé** — Les fonctions objectifs traduisant une performance cible sont souvent exprimées au travers de concepts statistiques tels que la moyenne et l'écart type déterminés dans le cas de scénarios nominaux ou de scénarios extrêmes. Ces approches montrent très rapidement leur limite dans le cadre de la certification robuste. Le travail proposé ici concerne l'utilisation d'inégalités de concentration de mesure qui bornent la probabilité de défaillance d'une fonction objectif. Ces inégalités seront utilisées au travers d'un premier exemple simple portant sur la flexion d'une poutre encastrée-libre.

**Mots clés** — certification, inégalité de concentration de mesure, optimisation.

### 1 Contexte

La certification des performances d'un aéronef, ou plus généralement d'un système, est souvent formulée à l'aide de concepts statistiques, où les fonctions objectifs sont la moyenne et l'écart-type de fonctions déterminées dans le cas de scénarios nominaux ou de scénarios extrêmes. Cependant, il ne suffit pas de sonder le système en effectuant un nombre limité de calculs, ni même de calculer la performance moyenne et les marges de conception au moyen de calculs intensifs. Il est préférable d'être en mesure de prévoir la performance du système avec des incertitudes rigoureusement quantifiées. Par rigoureux, nous entendons que les mesures de performance (appelées aussi quantités d'intérêt) associées aux processus de conception sont certifiées par des limites mathématiquement démontrables, dont la précision n'est pas compromise par les multiples sources d'incertitudes. Dans ce contexte, la certification est définie comme le processus consistant à garantir que la probabilité de dépasser un seuil donné  $a$  est inférieure à un seuil acceptable  $\epsilon$ , qui est généralement petit. Autrement dit, nous voulons garantir que :

$$P[F(\mathbf{X}) \geq a] \leq \epsilon, \quad (1)$$

où  $F$  est la fonction objectif et  $\mathbf{X}$  des paramètres incertains (aléatoires) dont elle dépend.

Par conséquent, l'exigence d'une quantification d'incertitude rigoureuse est d'évaluer soigneusement la plage dans laquelle la performance du système est susceptible de s'écarter de sa moyenne. Les inégalités de concentration de mesure sont un outil puissant pour reformuler ces besoins en termes mathématiques rigoureux et précis, bien qu'ils soient rarement utilisés dans des applications d'ingénierie. Le phénomène de concentration de la mesure se réfère à l'observation que quand une fonction dépend d'un grand nombre de paramètres variables d'entrée dont la plage de variation est connue, cette fonction est presque constante. Ces variations de la fonction objectif autour de sa valeur moyenne sont données par des inégalités rigoureuses, appelées des inégalités de concentration de mesure [2] (un récapitulatif de ce phénomène peut être trouvé sur le blog de T. Tao [6]). Dans notre étude, nous travaillerons principalement avec des inégalités *bounded-differences* de type McDiarmid [4], qui bornent les fluctuations d'une fonction réelle  $F(\mathbf{X})$  par rapport à sa moyenne  $\mathbb{E}\{F(\mathbf{X})\}$  sans connaissance *a priori* des lois de probabilité des variables aléatoires d'entrée  $\mathbf{X}$ . En supposant que ces variables d'entrée sont indépendantes, nous avons pour tout  $a > 0$  :

$$P[F(\mathbf{X}) \geq a] \leq e^{-2 \frac{(a - \mathbb{E}\{F(\mathbf{X})\})_+^2}{D_F^2}}, \quad (2)$$

où  $x_+ := \max(0, x)$  et  $D_F$  est appelé diamètre de vérification de la fonction  $F$  [3]. Il s'agit d'un paramètre qui mesure les fluctuations de  $F$  si l'on gèle successivement toutes les variables sauf une dans leur intervalle de variation. Dans les faits, son évaluation implique de résoudre autant de problèmes d'optimisation

globale qu'il y a de variables aléatoires d'entrée dans le vecteur  $\mathbf{X}$ . Chaque problème d'optimisation nécessite deux évaluations de la fonction  $F$  pour deux ensembles de paramètres. Néanmoins, le fait que cette inégalité n'exige aucune information sur les lois de probabilité marginales des variables aléatoires d'entrée  $\mathbf{X}$  est clairement un avantage dans la conception des aéronefs, où les données expérimentales peuvent être rares.

## 2 Objectifs scientifiques

Les principaux objectifs de ce travail sont d'appliquer les inégalités de concentration de mesure pour la certification robuste de dimensionnement aérodynamique en mécanique des fluides numérique (CFD). Dans le cadre d'une conception aérodynamique approfondie, la forme de l'avion est optimisée afin d'atteindre les performances souhaitées – mesurées par exemple au travers de la traînée (c'est la fonction  $F$ ). Pour que cette approche soit utilisable dans la réalité, la forme de l'avion doit être robuste vis-à-vis du nombre de Mach, de l'angle d'attaque, de la portance ... (ce sont les variables d'entrée  $\mathbf{X}$ ), en particulier en régime transsonique. La détermination de la robustesse implique généralement de couvrir l'espace de conception par un grand nombre de calculs CFD et par une propagation des lois de probabilité des variables d'entrée  $\mathbf{X}$ . Ces calculs sont généralement très coûteux.

## 3 Démarche et principaux résultats

### 3.1 Inégalités de concentration de mesure

Certains résultats concernant la perforation d'une plaque par un projectile peuvent être trouvés dans la littérature montrant l'intérêt des inégalités de concentration de mesure [1]. En se donnant en paramètres d'entrée l'épaisseur de la plaque, la vitesse initiale du projectile, sa direction, et leurs intervalles de variation, il s'agissait de déterminer la létalité de ce projectile (c'est-à-dire la perforation ou non de la plaque). Afin de se fixer un premier cas d'étude simple, nous nous proposons ici d'étudier la flexion d'une poutre circulaire sous les hypothèses cinématiques de Euler-Bernoulli (voir Fig. 1).

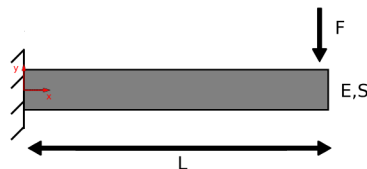


FIGURE 1 – Poutre encastée-libre.

Nous voulons certifier que la probabilité que le maximum de la flèche de la poutre – c'est la fonction objectif  $F$  – dépasse un certain seuil  $a$  soit en dessous d'une tolérance  $\varepsilon$ . Nous choisissons comme paramètres d'entrée le module de Young  $E$  et le diamètre de la poutre  $D$  avec leurs intervalles de variation respectifs (voir table 1). Nous supposons que chaque paramètre d'entrée aléatoire suit une loi uniforme. Ces données d'entrée définissent le vecteur d'entrée  $\mathbf{X}$ . De plus, nous supposons aussi que nous connaissons de façon parfaite la moyenne de notre fonction objectif  $\mathbb{E}\{F(\mathbf{X})\}$ .

Module de Young $E$ (GPa)	Diamètre $D$ (m)
[71.25 ; 78.75]	[0.02475 ; 0.02525]

TABLE 1 – Intervalle de variation de chacune des variables d'entrée définissant le vecteur  $\mathbf{X}$ .

Les différents résultats obtenus sont donnés sur la Fig. 2 montrant la probabilité de défaillance en fonction du seuil  $a$ . Dans une optique de comparaison, nous avons tracé sur le même graphe la probabilité de défaillance obtenue par une simulation de type Monte-Carlo avec  $10^5$  simulations, la probabilité de défaillance obtenue par l'inégalité de McDiarmid (2) et finalement la probabilité de défaillance obtenue par l'inégalité de Markov. Nous pouvons remarquer que la limite obtenue par l'inégalité de McDiarmid est plus resserrée que celle obtenue par l'inégalité de Markov mais elle reste néanmoins encore

non optimale. En effet, la seule hypothèse dont nous avons besoin pour pouvoir utiliser cette inégalité est l'indépendance des variables d'entrée  $\mathbf{X}$ . Nous n'utilisons aucune autre donnée que nous pourrions connaître sur le problème – autre que la connaissance de  $\mathbb{E}\{F(\mathbf{X})\}$  et des diamètres  $D_{F_i}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Nous n'avons pour l'instant, grâce à l'inégalité de McDiarmid, qu'une borne supérieure non optimale de la probabilité que notre fonction objectif  $F$  dépasse le seuil  $a$ .

### 3.2 Bornes optimales

Nous définissons tout d'abord l'ensemble  $\mathcal{A}_{\text{McD}}$  qui correspond aux hypothèses permettant d'obtenir l'inégalité de McDiarmid (2) adapté à notre problème :

$$\mathcal{A}_{\text{McD}} = \left\{ (f, \mu) \left| \begin{array}{l} f : \chi_1 \times \chi_2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \\ \mathbb{E}_\mu\{f(\mathbf{X})\} = \mathbb{E}_\mu\{F(\mathbf{X})\} \\ D_{f_j} \leq D_{F_j}, j = 1, 2 \end{array} \right. \right\}. \quad (3)$$

Il a été montré dans [5] qu'il est possible d'obtenir une borne supérieure plus faible que celle obtenue par l'inégalité de McDiarmid tout en ayant les mêmes connaissances sur le système. Cette borne supérieure est la borne supérieure optimale, en ce sens qu'elle est directement calculée à partir des informations contenues dans l'ensemble  $\mathcal{A}_{\text{McD}}$ . En effet, nous cherchons maintenant à déterminer :

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}_{\text{McD}}) = \sup_{(f, \mu) \in \mathcal{A}_{\text{McD}}} \mu[f(\mathbf{X}) \geq a], \quad (4)$$

avec :

$$P[F(\mathbf{X}) \geq a] \leq \mathcal{U}(\mathcal{A}_{\text{McD}}) \leq e^{-2 \frac{(a - \mathbb{E}\{F(\mathbf{X})\})^2}{D_F^2}}.$$

La recherche de la solution à l'Eq. (4), qui est un problème d'optimisation, est très loin d'être aisée car l'ensemble  $\mathcal{A}_{\text{McD}}$  est un espace de dimension infinie. Néanmoins, Owhadi *et al.* [5] ont montré que la recherche de  $\mathcal{U}(\mathcal{A}_{\text{McD}})$  peut être faite dans un espace de dimension finie noté  $\mathcal{A}_\Delta$  de sorte qu'on ait  $\mathcal{U}(\mathcal{A}_{\text{McD}}) = \mathcal{U}(\mathcal{A}_\Delta)$  avec :

$$\mathcal{A}_\Delta = \left\{ (f, \mu) \in \mathcal{A}_{\text{McD}} \left| \begin{array}{l} \mu_k = \alpha_k \delta_{x_k} + \beta_k \delta_{y_k}, k = 1, 2 \\ \alpha_k, \beta_k \geq 0, \alpha_k + \beta_k = 1 \\ x_k, y_k \in \chi_k \end{array} \right. \right\}. \quad (5)$$

Le vecteur d'entrée  $\mathbf{X}$  étant de dimension 2, nous pouvons exhiber  $\mathcal{U}(\mathcal{A}_{\text{McD}})$  de façon analytique [5] :

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}_{\text{McD}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } D_1 + D_2 \leq a - \mathbb{E}\{F(\mathbf{X})\}, \\ \frac{(D_1 + D_2 - a - \mathbb{E}\{F(\mathbf{X})\})^2}{4D_1D_2} & \text{si } |D_1 - D_2| \leq a - \mathbb{E}\{F(\mathbf{X})\} \leq D_1 + D_2, \\ 1 - \frac{a - \mathbb{E}\{F(\mathbf{X})\}}{\max(D_1, D_2)} & \text{si } 0 \leq a - \mathbb{E}\{F(\mathbf{X})\} \leq |D_1 - D_2|. \end{cases} \quad (6)$$

Nous représentons sur un même graphe les trois courbes précédemment tracées ainsi que  $\mathcal{U}(\mathcal{A}_{\text{McD}})$  en fonction du seuil  $a$  (voir Fig. 2). Nous pouvons observer que nous obtenons une valeur de probabilité de défaillance plus resserrée qu'avec l'inégalité de McDiarmid et cela peu importe la valeur seuil  $a$  (voir la courbe bleue et la courbe verte sur la Fig. 2). Cette valeur de probabilité est optimale et ne peut pas être améliorée d'après les informations  $\mathcal{A}_{\text{McD}}$  que nous connaissons sur le système.

## 4 Perspectives

Comme nous l'avons vu précédemment, l'inégalité de McDiarmid est non optimale car seule une hypothèse d'indépendance des variables d'entrée suffit à l'utiliser. Nous n'utilisons pas directement les connaissances que nous aurions *a priori* sur le système. Des études récentes [5] ont montré que l'on peut trouver une inégalité plus resserrée en prenant en compte maintenant directement les connaissances *a priori* que nous aurions sur le système. La nouvelle borne ainsi obtenue est optimale eu égard aux informations dont nous disposons.

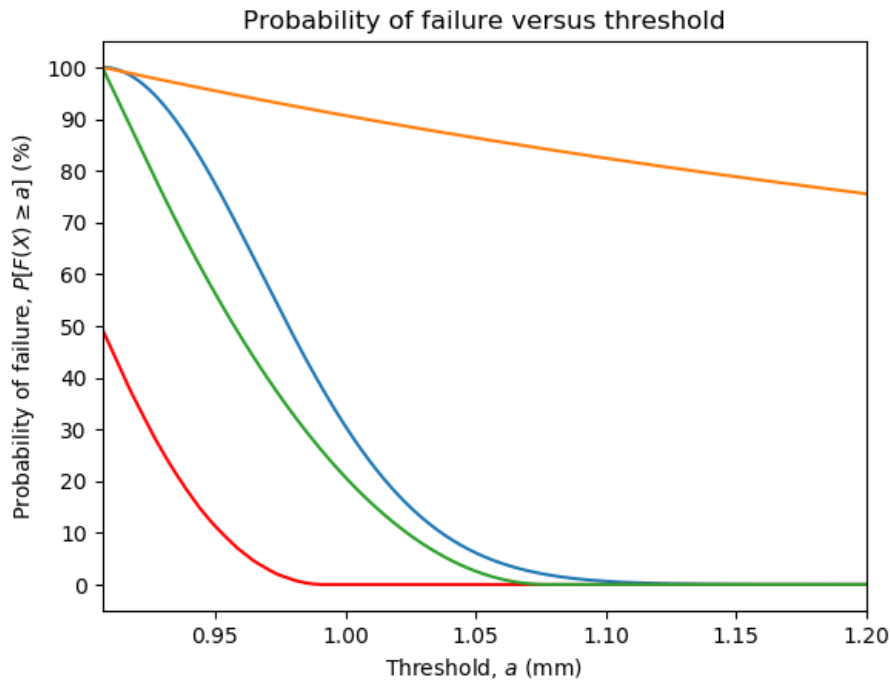


FIGURE 2 – Probabilité  $P$  de dépasser le seuil  $a$  pour l'étude de la flèche maximale d'une poutre encastree-libre. — Probabilité d'échec obtenue par une méthode de Monte-Carlo, — Borne supérieure optimale de la probabilité d'échec, — Borne supérieure de la probabilité d'échec obtenue par l'inégalité de McDiarmid, — Borne supérieure de la probabilité d'échec obtenue par l'inégalité de Markov.

Les configurations aérodynamiques typiques pour la mise en œuvre de la méthodologie proposée pourraient être des profils aérodynamiques à portance élevée ou transsonique (par exemple RAE2822 ou une aile de type M6), ou des missiles génériques (par exemple FG5) pour lesquels des données expérimentales sont disponibles. La détermination de la probabilité d'apparition d'un tremblement de voileure pour un tel profil avec comme variables d'entrée le nombre de Mach et l'angle d'incidence, par exemple, pourra être considérée afin de valider ou non cette approche.

## Références

- [1] A. Kidane, A. Lashgari, B. Li, M. McKerns, M. Ortiz, H. Owhadi, G. Ravichandran, M. Stalzerand, et T. Sullivan, *Rigorous model-based uncertainty quantification with application to terminal ballistics, part I: Systems with controllable inputs and small scatter*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 60(5): 983-1001, 2012.
- [2] S. Boucheron, G. Lugosi, et P. Massart, *Concentration Inequalities: A Nonasymptotic Theory of Independence*, Oxford University Press, Oxford, 2013.
- [3] L.J. Lucas, H. Owhadi, et M. Ortiz, *Rigorous verification, validation, uncertainty quantification and certification through concentration-of-measure inequalities*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 197(51): 4591-4609, 2008.
- [4] C. McDiarmid, *On the method of bounded differences*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 148-188, 1989.
- [5] H. Owhadi, C. Scovel, T. Sullivan, M. McKerns, et M. Ortiz, *Optimal Uncertainty Quantification*, SIAM Review 55(2): 271-345, 2013.
- [6] <https://terrytao.wordpress.com/2010/01/03/254a-notes-1-concentration-of-measure/>