

Remaillage conforme, capture exacte d'interface et contraintes géométriques pour l'optimisation topologique de structures mécaniques

C. Nardoni¹, F. Bordeu², J. Cortial², C. Mang¹

¹ IRT SystemX, France, {chiara.nardoni,chetra.mang}@irt-systemx.fr

² Safran Tech, France, {felipe.bordeu,julien.cortial}@safrangroup.com

Résumé — Cette contribution concerne l'industrialisation de l'optimisation de forme topologique par la méthode des lignes de niveaux. La stratégie d'évolution de domaine est basée sur un double paramétrage de la forme : d'une part, la pièce est décrite de manière implicite par une fonction de ligne de niveaux, d'autre part, elle est discrétisée de manière explicite par un maillage ajusté. Ces deux représentations sont complémentaires : la première autorise des évolutions arbitraires de la forme, incluant des changements topologiques, tandis que la deuxième permet de calculer l'état du système sans nécessiter d'artifice numérique et facilite l'évaluation des contraintes de fabrication exprimées sous forme géométrique.

Mots clés — optimisation topologique ; méthode des lignes de niveaux ; adaptation de maillage ; contrainte de fabrication.

1 Introduction

L'optimisation topologique de forme consiste à déterminer, au sein d'un volume de conception donné, la distribution de matériau la plus efficace possible telle que la solution obtenue respecte le cahier des charges. Plusieurs méthodes d'optimisation topologique ont été développées, parmi lesquelles la méthode des densités intermédiaires (dite aussi méthode SIMP), la méthode d'homogénéisation, la méthode de champs de phase et la méthode des lignes de niveaux. Dans ce travail nous privilégions cette dernière approche pour son aptitude à fournir une caractérisation non-ambiguë de la géométrie de la pièce à chaque itération, résultant en un processus de conception plus naturel pour l'utilisateur et moins sensible à la subjectivité. La méthode de ligne de niveau classique [1] repose sur la notion de dérivée de forme et d'évolution de la fonction implicite à l'aide d'une équation de type Hamilton-Jacobi. En général, un algorithme d'optimisation différentiable est employé pour minimiser une fonction coût $J(\Omega)$ dans un ensemble O de domaines admissibles. En général, les critères d'optimisation (fonction coût et contraintes) et les sensibilités associés dépendent du domaine de manière complexe et nécessitent l'évaluation des états direct et adjoint. Un exemple classique dans le cadre de l'élasticité linéaire est la minimisation sous contrainte de volume de la *compliance* (ou de manière équivalente, de l'énergie de déformation élastique) :

$$C(\Omega) = \int_{\Omega} \sigma(u_{\Omega}) : \varepsilon(u_{\Omega}) dx,$$

où $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est le tenseur des déformations linéarisé et σ est le tenseur des contraintes vérifiant la loi de Hooke paramétrée par les coefficients de Lamé λ, μ :

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u))I.$$

En combinant la méthode des lignes de niveaux avec des techniques de remaillage, il est possible de générer un maillage conforme à l'interface de la pièce à chaque itération du processus de conception [2]. La stratégie d'évolution de domaine est basée sur un double paramétrage de la forme : d'une part, la pièce est décrite de manière implicite par une fonction de ligne de niveaux, d'autre part, elle est discrétisée de manière explicite par un maillage ajusté. Ces deux représentations sont complémentaires : la première autorise des évolutions arbitraires de la forme, incluant des changements topologiques, tandis que la deuxième permet de calculer l'état du système sans nécessiter d'artifice numérique et facilite l'évaluation des contraintes de fabrication exprimées sous forme géométrique [4, 3, 13].

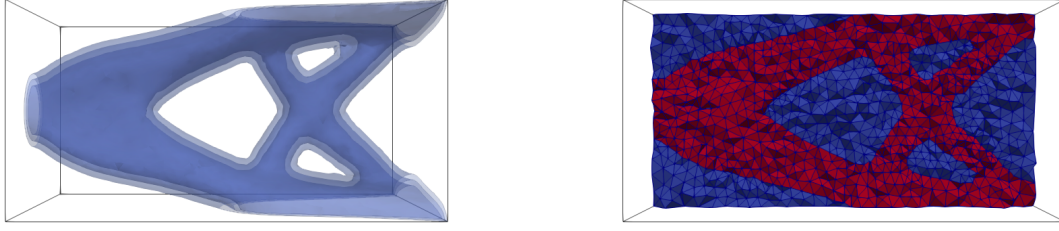


FIGURE 1 – Lignes de niveau d’un domaine (gauche) et remaillage conforme du domaine implicite (droite). La région où la fonction ligne de niveau est négative est représentée en rouge.

La présente contribution concerne la mise en œuvre de cette technologie dans un démonstrateur d’optimisation topologique développée dans le cadre du projet TOP hébergé à l’IRT SystemX¹. En alternant étapes de remaillage du domaine implicite et étapes de déformation lagrangienne du maillage, il est possible de réduire significativement l’effort de calcul nécessaire pour mener à bien l’optimisation, et ainsi de s’approcher du délai de réponse qu’exige une utilisation dans un contexte industriel.

2 Paramétrage implicite de la forme

Dans l’approche lignes de niveaux, le bord d’une forme est représenté en terme de la ligne de niveau zero d’une fonction à valeurs scalaires définie sur la totalité du volume de conception. La description implicite de la forme permet de traiter les changements de topologie autorisant de manière naturelle opérations telles que la fusion ou la séparation d’interfaces.

Definition 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné. Une fonction ligne de niveau d’un domaine Ω est une fonction scalaire $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \phi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega, \\ \phi(x) > 0 & \text{si } x \in {}^c\Omega. \end{cases}$$

La ligne de niveau est généralement initialisée avec un champ de distance (ou plus précisément *distance signée* d_Ω) en raison de la propriété de gradient unitaire :

$$|\nabla d_\Omega(x)| = 1,$$

qui est vérifiée pour chaque x où d_Ω est différentiable. D’un point de vue numérique, nous considérons un domaine de calcul D doté d’un maillage non structuré \mathcal{D} . La distance signée d_Ω est générée comme une fonction linéaire par morceaux définie sur l’ensemble des nœuds de \mathcal{D} , utilisant par exemple l’algorithme décrit dans [8]. A partir de la donnée discrète de la fonction ligne de niveau, il est possible de modifier \mathcal{D} pour obtenir un maillage du domaine implicite correspondant à la région où la fonction ϕ est négative [9] (voir la Figure 1).

3 Analyse de sensibilité : dérivée de forme au sens de Hadamard

Pour mettre en œuvre un algorithme d’optimisation différentiable comme la méthode du gradient, il est nécessaire d’évaluer la sensibilité de la fonction objectif par rapport aux perturbations du domaine. Plusieurs notions de différentiation par rapport au domaine ont été proposées dans la littérature scientifique. Ici nous faisons référence à la méthode de variation de frontières de Hadamard [1, 12, 10]. L’idée générale est d’établir une correspondance entre variations du domaine et difféomorphismes de \mathbb{R}^d . Ainsi, les variations d’un domaine donné Ω sont considérés sous la forme :

$$\Omega_\theta = (I + \theta)(\Omega),$$

1. <https://www.irt-systemx.fr/project/top>

où $\theta : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est un 'petit' difféomorphisme. Une variation admissible Ω_θ de Ω est paramétrée par une transformation de la forme $I + \theta$, qui est proche de l'identité. Le champ vecteur admissible θ appartient à l'espace de Banach $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ de fonctions bornées et Lipschitziennes muni de la norme :

$$\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)} := \|\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)^d} + \|\nabla\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)^{d \times d}}, \forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d).$$

Ainsi la dérivée de forme au sens de Hadamard est définie à l'aide de la notion de dérivation classique dans un espace fonctionnel.

Definition 2. Une fonction du domaine $J(\Omega)$ admet une dérivée de forme sur Ω si l'application $\theta \mapsto J(\Omega_\theta)$, de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ à \mathbb{R} , est différentiable au sens de Fréchet sur $\theta = 0$. Le différentiel de Fréchet associé est noté $\theta \mapsto J'(\Omega)(\theta)$ et appelé dérivée de forme de J ; nous avons le développement limite suivant :

$$J(\Omega_\theta) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\theta), \text{ où } \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)}} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0.$$

D'après le théorème de Structure (voir par exemple [12]), la dérivée de forme dépend de la trace normale $\theta \cdot n$ de la perturbation θ sur $\partial\Omega$. Pour une large classe de fonctions objectifs la dérivée de forme J' admet la structure suivante [1] :

$$\forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v_\Omega(s) \theta n_{\partial\Omega} ds, \quad (1)$$

où $n_{\partial\Omega}$ est la normal unitaire externe à $\partial\Omega$ et v_Ω est un champ scalaire qui dépend de J via la solution d'un état direct et éventuellement un adjoint.

4 Stratégie d'évolution du domaine

Le champ $\theta = -v_\Omega n_{\partial\Omega}$ est une direction de descente pour J puisque $J'(\theta) \leq 0$. Ainsi, un algorithme itératif de type gradient peut générer une suite de domaines $\{\Omega_k\}_{k=0,\dots}$ (ainsi que les fonctions ligne de niveaux $\{\phi_k\}_{k=0,\dots}$ et les maillages $\{\mathcal{T}_k\}_{k=0,\dots}$) tels que $J(\Omega_k)$ décroît. Le domaine est mis à jour itérativement selon la relation :

$$\Omega_{k+1} = (I + \theta_k)\Omega_k \text{ où } \theta_k \text{ est une extension sur } \Omega \text{ de } \theta = -v_\Omega n_{\partial\Omega_k} \quad (2)$$

Nous allons maintenant décrire l'étape d'actualisation du nouveau domaine, qui est cruciale du point de vue numérique. On se donne \mathcal{T}_k un maillage de Ω_k . Au moins deux stratégies sont envisageables :

1. Déplacement de maillage Le domaine est actualisé par déformation du maillage :

$$x \rightarrow x + \theta_k(x) \text{ pour chaque } x \in \mathcal{T}_k. \quad (3)$$

Cette étape est accomplie par régularisation et extension de la direction de descente [11]. Pour contourner les difficultés potentielles liées à la déformation du maillage (dégradation de la qualité voire inversion d'éléments), la vitesse θ est paramétrée à l'aide d'un déplacement élastique. Voir [5] pour un exemple d'utilisation de l'élasticité pour déplacement de maillage dans le contexte de l'appariement de forme. Cette étape ne nécessite pas de modifier la connectivité du maillage et ne permet évidemment pas de changer la topologie.

2. Advection de la ligne de niveau et remaillage Pour tenir compte des changements de topologie dans le processus de conception, le domaine est actualisé à l'aide d'une équation d'advection :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \theta_k = 0 \text{ dans } D. \quad (4)$$

La nouvelle forme est donc définie implicitement par $\Omega_{k+1} = \{x \in D : \phi_{k+1}(x) < 0\}$. Un maillage explicite du domaine Ω_{k+1} est obtenu par une étape de remaillage et discrétisation de la ligne de niveau zéro de ϕ_{k+1} [2, 9].

Les deux stratégies d'évolution du domaine sont utilisées pour calculer le point courant dans le cadre d'un algorithme d'optimisation (méthode de la plus grande pente, Lagrangien augmenté). La résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (4) est réalisée par la méthode des caractéristiques [2].

5 Prise en compte des contraintes de fabrication

La méthode d'optimisation décrite dans la Section 4 permet de disposer à chaque itération du processus de conception d'un maillage explicite de la pièce mécanique. Cette caractéristique est particulièrement intéressante car elle permet d'envisager un couplage faiblement invasif avec un solveur éléments finis. Le deuxième avantage notable est la facilité à évaluer de manière précise de critères géométriques.

5.1 Contrôle des épaisseurs minimale et maximale

Il est extrêmement important d'imposer des contraintes de fabrication (épaisseurs maximale et minimale, démoulage) pour qu'une forme optimisée puisse effectivement correspondre à un concept viable de pièce industrielle. Plusieurs formulations des contraintes de fabrication disponibles dans la littérature scientifique sont exprimées en termes de propriétés géométriques (comme par exemple, les courbures) de l'interface de la pièce [4, 3, 13]. Toutefois le calcul numérique des dérivées de deuxième ordre de la fonction ligne de niveau est très oscillatoire et ne donne pas une approximation précise de la courbure de l'interface [13]. Le choix est fait ici d'exploiter la connaissance d'une triangulation explicite de l'interface pour le calcul discret de ces quantités. Pour expliquer notre approche, nous faisons référence à Allaire et al. [4]. L'idée générale derrière l'approche suivie est de restreindre les valeurs maximales et/ou minimales de la fonction distance signée à la pièce, évaluée sur le squelette de la pièce. Dans ce contexte le squelette d'un domaine Ω correspond à l'ensemble des points internes à Ω où la distance signée n'est pas différentiable. Ici, le rayon sortant de $x \in \partial\Omega$ est le segment reliant x et le squelette dans la direction de la normale $n(x)$. On dit que un domaine Ω admet un épaisseur plus petit que $d_{max} > 0$ si la condition suivante est satisfaite

$$d_{\Omega}(x) \geq -\frac{d_{max}}{2}, \forall x \in \Omega, \quad (5)$$

où $d_{\Omega}(\cdot)$ dénote la distance signée à Ω . La définition d'épaisseur minimale s'appuie sur la notion d'ensemble offset. Étant donné un réel positif d_{off} , l'ensemble $\partial\Omega_{off} = \{x - d_{off}n(x), x \in \partial\Omega\}$ dénote l'ensemble offset de $\partial\Omega$ à distance d_{off} dans la direction $-n(x)$. On dit que un domaine Ω admet un épaisseur supérieur à $d_{min} > 0$ si la condition suivante est satisfaite

$$d_{\Omega}(x - d_{off}n(x)) \leq 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall d_{off} \in [0, d_{min}]. \quad (6)$$

Les contraintes (6),(5) sont incorporées dans le problème d'optimisation comme des pénalisations quadratiques. La contrainte d'épaisseur minimale d_{min} admet donc la forme suivante [4] :

$$P_{min}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \int_0^{d_{min}} [(d_{\Omega}(s - \xi n(s)))^+]^2 d\xi ds, \quad (7)$$

où d_{min} est la taille minimale d'épaisseur souhaitée. La fonction (7) admet la dérivée de forme suivante :

$$\begin{aligned} P'_{min}(\Omega)(\theta) &= \int_{\partial\Omega} \int_0^{d_{min}} \theta(x) \cdot n(x) [H(x)((d_{\Omega}(x_m))^+)^2 + 2(d_{\Omega}(x_m))^+ \nabla d_{\Omega}(x_m) \cdot \nabla d_{\Omega}(x)] dz dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \int_0^{d_{min}} \theta(p_{\partial\Omega}(x_m)) \cdot n(p_{\partial\Omega}(x_m)) 2(d_{\Omega}(x_m))^+ dz dx, \end{aligned} \quad (8)$$

où H est la courbure moyenne de l'interface $\partial\Omega$, $p_{\partial\Omega}(x_m)$ dénote la projection de x_m sur le bord $\partial\Omega$ et x_m dénote le point $x - zn(x)$. La contrainte d'épaisseur maximale d_{max} est [4] :

$$P_{max}(\Omega) = \int_{\Omega} \left[\left(d_{\Omega}(x) + \frac{d_{max}}{2} \right)^- \right]^2 dx. \quad (9)$$

La contrainte (9) admet la dérivée de forme suivante :

$$P'_{max}(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \theta(x) \cdot n(x) \int_{ray(x) \cap \Omega} 2 \left(d_{\Omega}(z) + \frac{d_{max}}{2} \right)^- \prod_{i=1}^{d-1} (1 + d_{\Omega}(z) \kappa_i(x)) dz dx, \quad (10)$$

où κ_1, κ_2 sont les courbures principales évaluées sur l'interface $\partial\Omega$ et $ray(x)$ est le rayon sortant de $x \in \partial\Omega$.

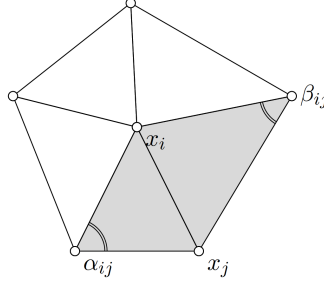


FIGURE 2 – Angles α_{ij} et β_{ij} opposés à l’arête $x_i x_j$.

5.2 Calcul des courbures discrètes

Dans cette section nous décrivons comment évaluer numériquement des grandeurs géométriques telles que les courbures à partir de la donnée discrète d’une triangulation. Les courbures principales sont calculées à partir des courbures moyenne et gaussienne de l’interface. Une idée générale [6] est d’évaluer une quantité différentielle discrète sur un sommet x d’un maillage comme une moyenne spatiale sur un voisinage $N(x)$ de x . Plusieurs notions de voisinage d’un sommet sur une triangulation sont disponibles dans la littérature scientifique [6]. Ici, $N(x)$ représente le polygone fermé obtenu en connectant les barycentres de tous les triangles qui partagent le sommet x . Soit Δ_S l’opérateur de Laplace Beltrami pour la surface S . Une approximation discrète K_H de l’opérateur de Laplace Beltrami Δ_S pour une surface S est classiquement calculée à l’aide de la formule de la cotangente [6]. Lorsque l’opérateur est appliqué sur les fonctions coordonnées, la formule est la suivante :

$$K_H(x_i) = \frac{1}{2m(N(x_i))} \sum_{j \in N(x_i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(x_i - x_j),$$

où la somme est étendue sur le voisinage $N(i)$ du sommet x_i , $m(N(x_i))$ est la mesure de $N(x_i)$ et α_{ij} , β_{ij} sont les angles opposés à l’arête $x_i x_j$ (voir la Figure 2). A partir de cette expression la courbure moyenne scalaire $H(x)$ est :

$$H(x) = \frac{1}{2} \|K_H(x)\|. \quad (11)$$

L’opérateur de courbure gaussienne $K_g(x_i)$ est calculé en terme du déficit angulaire :

$$K_g(x_i) = \frac{2\pi - \sum_{T_j \in N(x_i)} \theta_j}{m(N(x_i))}, \quad (12)$$

où θ_j est l’angle contenant le sommet x_i du triangle T_j de $N(x_i)$. Les courbures principales κ_1 , κ_2 sont déduites aisément à partir de (11) et (12).

6 Résultats numériques

Nous présentons un cas test de référence [4]. Considérons un domaine de conception de dimensions $2 \times 2 \times 1$. Les conditions aux limites ainsi que l’initialisation sont représentées sur la Figure 3. L’objectif est de minimiser la compliance élastique de la structure sous contrainte de volume. Le volume cible imposé est égal à 0.15. La Figure 4 représente la forme optimale après $k = 100$ itérations de l’algorithme.

Ensuite, nous considérons le même cas d’application sous contrainte de volume et d’épaisseur maximale avec $d_{max} = 0.1$. Dans ce cas, le volume cible imposé est égal à 0.5. La Figure 5 illustre une comparaison entre les formes obtenues par l’algorithme avec et sans imposition de la contrainte d’épaisseur maximale. Dans le cas avec contrainte d’épaisseur, la convergence est atteinte après $k = 200$ itérations de l’algorithme.

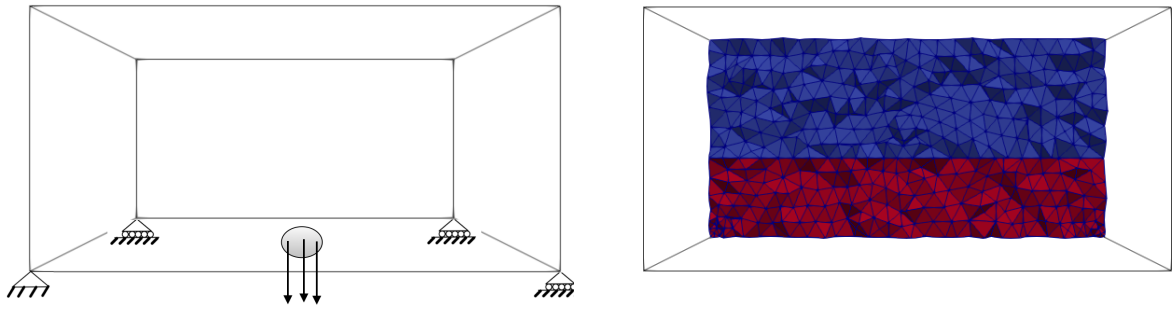


FIGURE 3 – Conditions aux limites (à gauche) et initialisation (à droite) pour les cas d’application de la section 6. L’intérieur de la forme initiale est représenté en rouge.

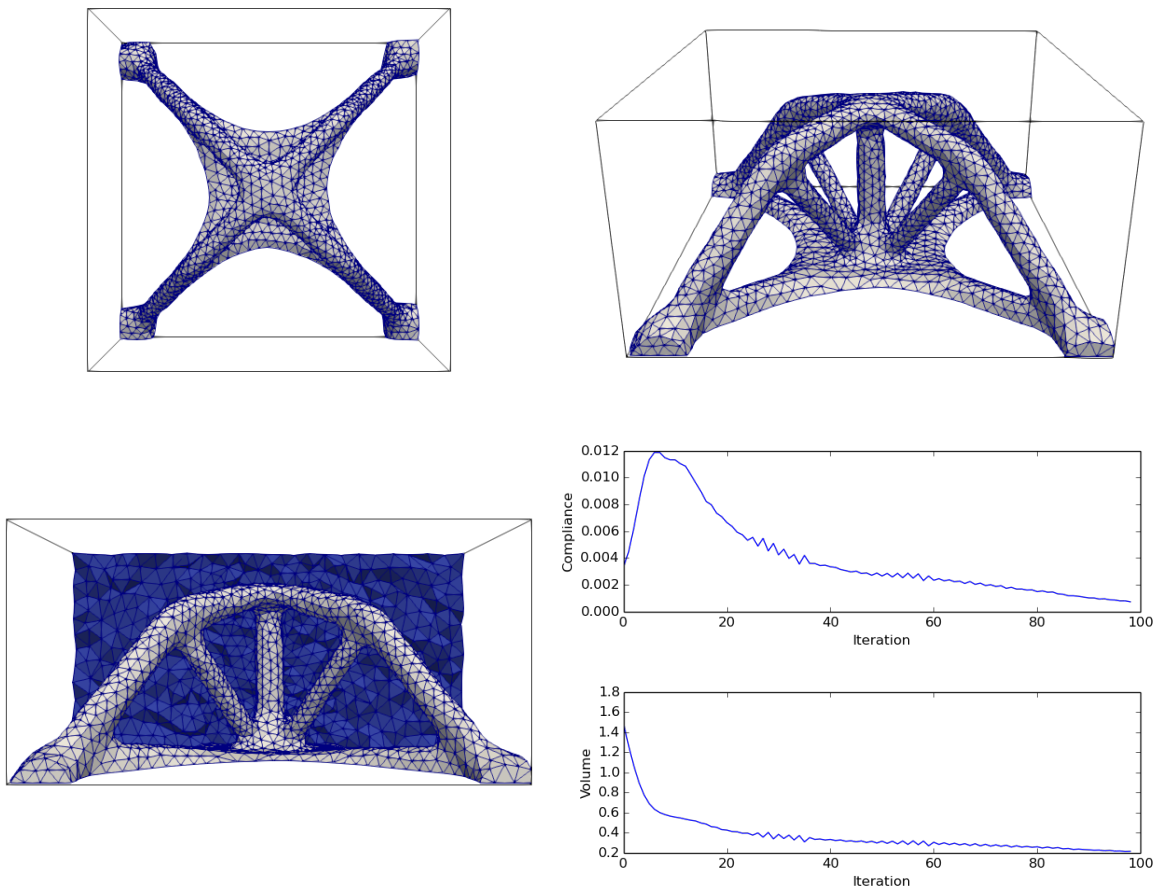


FIGURE 4 – Deux vues de la forme obtenue pour un volume cible égal à 0.15 (en haut). Coupe du maillage du domaine de conception et courbe d’évolution de la fonction objectif (en bas).

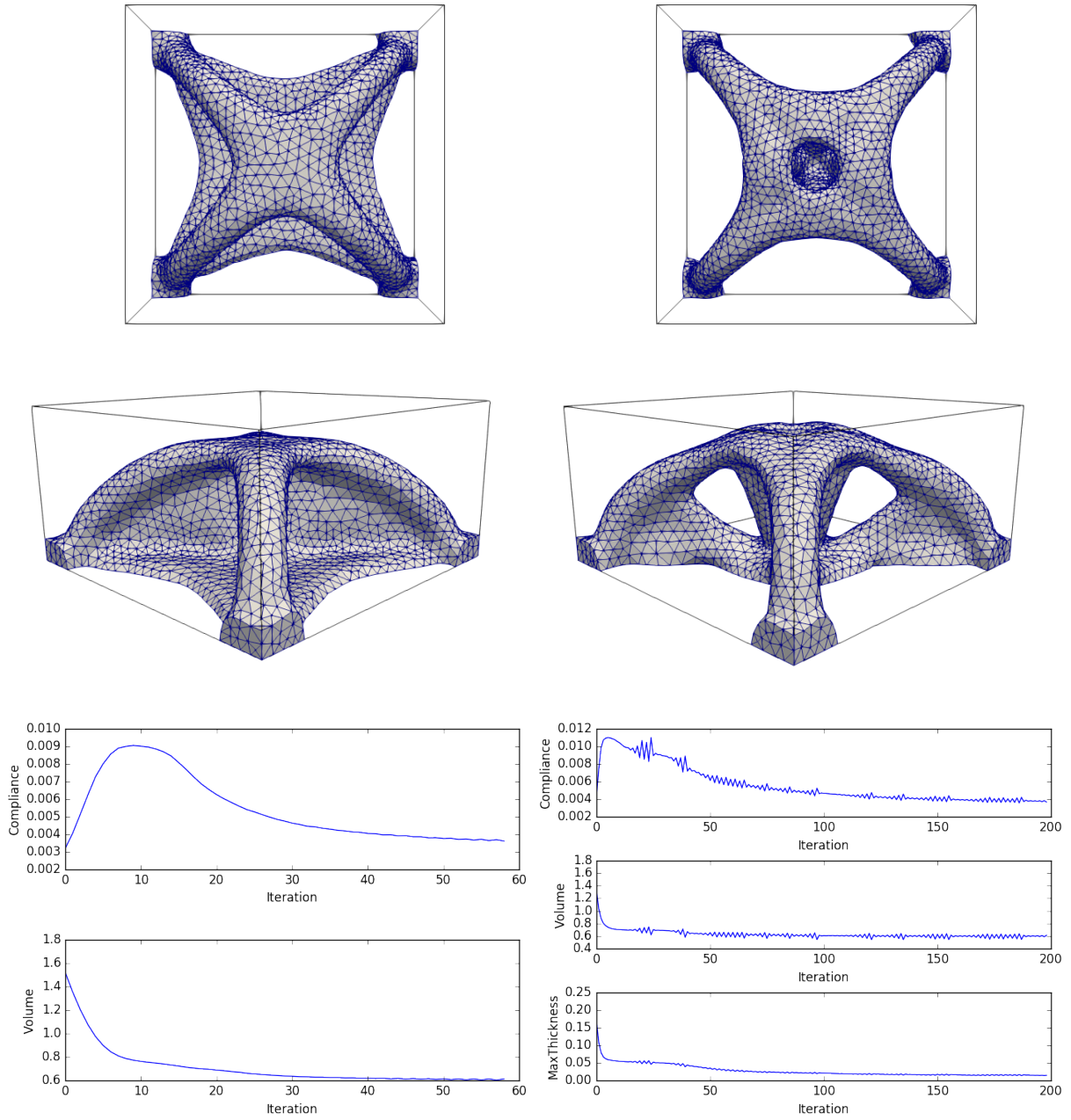


FIGURE 5 – Formes obtenues et courbes d'évolution pour le cas d'application décrit dans la Section 6 sans (à gauche) et avec (à droite) imposition de la contrainte d'épaisseur maximale et volume cible égal à 0.5.

7 Conclusions et perspectives

Dans cette communication, nous avons présenté une méthode d'optimisation topologique et mis l'accent sur son attractivité d'un point de vue industriel. Un travail en cours vise à coupler cette approche avec des solveurs éléments finis commerciaux et d'en éprouver la robustesse pour des géométries complexes issues du cadre des applications industrielles.

Références

- [1] G. Allaire. *Conception optimale de structures*, Springer Verlag, Heidelberg, 2006.
- [2] G. Allaire, Ch. Dapogny, P. Frey. *A mesh evolution algorithm based on the level set method for geometry and topology optimization*, Struct. Multidisc. Optim., 711-715, 2013.
- [3] G. Allaire, F. Jouve, G. Michailidis. *Molding direction constraints in structural optimization via a level-set method*, Variational Analysis and Aerospace Engineering, Mathematical Challenges for the Aerospace of the Future, Frediani, A., Mohammadi, B., Pironneau, O., Cipolla, V. (Eds.), Springer Optimization and Its Applications 116,1-39, 2016.
- [4] G. Allaire, F. Jouve, G. Michailidis. *Thickness control in structural optimization via a level set method*. SMO 53, 1349-1382, 2016.
- [5] M. de Buhan, C. Dapogny, P. Frey, C. Nardoni. *An optimization method for elastic shape matching*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 354, 783-787, 2016.
- [6] M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, A. Barr. *Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds*, Visualization and mathematics III, Springer, 35-57, 2003.
- [7] A.N. Christiansen, J.A. Bærentzen, M. Nobel-Jørgensen, N. Aage, O. Sigmund. *Combined shape and topology optimization of 3D structures*, Computers and Graphics, 46, 25-35, 2015.
- [8] Ch. Dapogny, P. Frey. *Computation of the signed distance function to a discrete contour on adapted triangulation*, Calcolo, Volume 49, Issue 3,193-219, 2012.
- [9] Ch. Dapogny, C. Dobrzynski, P. Frey. *Three-dimensional adaptive domain remeshing, implicit domain meshing, and applications to free and moving boundary problems*, J. Comput. Phys, 262, 358-378, 2014.
- [10] F. Murat, J. Simon. *Sur le contrôle par un domaine géométrique*, Technical Report RR-76015, Laboratoire d'Analyse Numérique, 1976.
- [11] F. de Gournay, *Velocity extension for the level-set method and multiple eigenvalues in shape optimization*, SIAM J. Control Optim., 343-367, 2006.
- [12] A. Henrot, M. Pierre. *Variation et optimisation de formes, une analyse géométrique*, Springer, Heidelberg, 2005.
- [13] W. Yiqiang, L. Zhang, M. Yu Wang. *Length scale control for structural optimization by level sets*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 305,891-909, 2016.