

Analyse unidimensionnelle de la transition « endommagement non local eikonal - fissure cohésive »

F. Thierry¹, G. Rastiello², C. Giry¹, F. Gatuingt¹

¹ LMT, ENS Paris-Saclay, CNRS, Université Paris-Saclay, {flavien.thierry,cedric.giry,fabrice.gatuingt}@ens-paris-saclay.fr

² DEN, Service d'étude mécaniques et thermiques (SEMT), CEA, Université Paris-Saclay, giuseppe.rastiello@cea.fr

Résumé — Cette contribution présente la transition d'un modèle d'endommagement Eikonal Non Local (ENL) vers un modèle à discontinuité forte dans un cas unidimensionnel. En introduisant la formation d'une fissure cohésive dans les zones où l'endommagement est proche de l'unité, cette nouvelle formulation cherche à résoudre les problèmes d'objectivité des résultats par rapport au maillage des méthode de régularisation avec évolution des interactions non locales (e.g. la méthode ENL) à la localisation de l'endommagement dans un seul élément fini.

Mots clés — Endommagement, méthode non locale, formulation eikonale, discontinuité forte.

1 Introduction

La prévision de la fissuration des matériaux quasi-fragiles présente un enjeu majeur dans l'étude de la robustesse et durabilité des structures de génie civil. Les modèles d'endommagement font partie des méthodes classiques pour traiter ces problématiques. La mise en œuvre de ce type de modèles dans le cadre de la méthode des éléments finis entraîne une dépendance pathologique à la taille du maillage. L'introduction d'une longueur caractéristique dans la formulation permet de retrouver une objectivité des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale du domaine étudié.

Parmi les méthodes de régularisation classiques, la méthode non locale intégrale (INL) [9] propose de piloter l'endommagement par une variable non locale calculée comme une moyenne spatiale de ses valeurs locales. Cependant, la nature de la méthode INL basée sur les distances euclidiennes peut mener à des interactions non locales non physiques, par exemple à travers des fissures ou des zones fortement endommagées. Pour traiter ce problème, plusieurs méthodes cherchent à ajuster les interactions non locales à l'aide de l'état mécanique du matériau, par exemple, Giry et al. [6] et Pijaudier-Cabot et al. [10] proposent de pondérer les interactions non locales en fonction de l'état de contrainte ou du niveau d'endommagement.

La méthode non locale eikonale (ENL) [4] propose de pondérer les interactions non locales par les longueurs des géodésiques dans un espace riemannien courbé par l'endommagement. Dans ce cas, le champ des distances géodésiques est solution d'une équation eikonale où apparaît une métrique dépendante de l'endommagement. Rastiello et al. [11] ont récemment montré que cette formulation permet d'éviter la diffusion de la zone d'endommagement observée pour la formulation INL. Les propriétés de régularisation de la méthode INL sont conservées jusqu'à un haut niveau d'endommagement. Cependant, une dépendance au maillage peut être observée dans le cas de la formation de zones très fortement endommagées. En effet, les interactions non locales tendent à diminuer avec l'évolution de l'endommagement, et le comportement redevient local dans ces zones.

Cette contribution propose d'améliorer les propriétés de régularisation de la méthode ENL en considérant les zones fortement endommagées comme des fissures cohésives. Ainsi la méthode ENL est couplée à un modèle à discontinuité forte. La transition de la méthode non locale vers le modèle à discontinuité forte est d'abord présentée, puis les propriétés de régularisation de cette formulation sont illustrées à l'aide d'une étude numérique unidimensionnelle (1D) sur une barre sollicitée en traction.

2 Formulation non locale eikonale (ENL)

Dans un corps élastique isotrope (Ω), il est possible de quantifier la dégradation du matériau en tout point $\underline{x} \in \Omega$ à l'aide d'une variable d'endommagement scalaire $D(\underline{x}) \in [0, 1]$ [7]. Au-delà de la limite élastique du matériau, des dégradations commencent à se former et la variable d'endommagement augmente de manière irréversible. Pour un modèle d'endommagement local, l'évolution de D est pilotée par une variable ($\varepsilon_{eq}(\underline{x})$) exprimée en fonction de quantités évaluées au point \underline{x} .

2.1 Méthode non locale intégrale (INL)

Pour un modèle non local, l'endommagement évolue selon une variable non locale ($\varepsilon_{eq}^{nl}(\underline{x})$) :

$$D(\underline{x}) = g(\varepsilon_{eq}^{nl}(\underline{x})) \quad (1)$$

En particulier, dans la méthode INL [9], la variable non locale correspond à une moyenne spatiale de ses valeurs locales :

$$\varepsilon_{eq}^{nl}(\underline{x}) = \frac{1}{V(\underline{x})} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{\ell_{xy}}{\ell_c}\right) \varepsilon_{eq}(\underline{y}) d\underline{y} \quad V(\underline{x}) = \int_{\Omega} \phi\left(\frac{\ell_{xy}}{\ell_c}\right) d\underline{y} \quad (2)$$

où $\phi(\ell_{xy}/\ell_c)$ est une fonction (de pondération) décroissante de la distance ℓ_{xy} séparant les deux points \underline{x} et $\underline{y} \in \Omega$. Cette fonction est généralement choisie comme une gaussienne $\phi(\xi) = \exp(-4\xi^2)$. Le paramètre ℓ_c correspond à une distance caractéristique définissant la taille du domaine en dehors duquel les interactions non locales sont négligeables.

2.2 Méthode non locale eikonale (ENL)

Pour la méthode INL, la distance ℓ_{xy} correspond simplement à la distance euclidienne séparant les deux points (c.-à-d., $\ell_{xy} = \|\underline{x} - \underline{y}\|$). Cette distance reste fixe au cours du temps. Cela implique que deux points pourront continuer à interagir d'un point de vue non local après l'apparition d'une fissure entre eux. Le principe de la méthode ENL est de prendre en compte le champ d'endommagement dans le calcul des distances et ainsi éviter les problèmes d'interactions non physiques.

2.2.1 Formulation basée sur la vitesse de propagation d'une onde élastique

En écrivant le problème non local en temps plutôt qu'en distance, Desmorat et Gatuingt [5] proposent de pondérer les interactions non locales en fonction du temps de propagation (τ_{xy}) d'une onde élastique dans le milieu endommagé :

$$\frac{\ell_{xy}}{\ell_c} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_c} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{eq}^{nl}(\underline{x}) = \frac{1}{V(\underline{x})} \int_{\Omega} \phi\left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_c}\right) \varepsilon_{eq}(\underline{y}) d\underline{y} \quad (3)$$

où τ_c est un temps caractéristique. Il représente le temps nécessaire à une onde élastique pour couvrir la distance ℓ_c dans le milieu non endommagé (avec c_0 la célérité initiale de l'onde : $\tau_c = \ell_c/c_0$).

Dans un milieu élastique, le temps de propagation d'une onde est lié à la vitesse de l'onde et cette vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la raideur du matériau. Dans le cas d'un milieu élastique endommagé, la raideur du matériau est diminuée par l'endommagement. Par conséquent, le temps de propagation d'une onde entre deux points séparés par une zone endommagée tendra à augmenter et les interactions non locales entre ces points seront réduites.

Cette formulation en temps permet de naturellement prendre en compte l'effet de l'endommagement sur le comportement non local du matériau. D'un point de vue numérique, il n'est cependant pas raisonnable d'effectuer un calcul dynamique de propagation d'onde pour chaque pas de chargement et pour chaque point du domaine où l'endommagement est évalué.

2.2.2 Reformulation en termes de distances géodésiques

À l'aide d'une approximation à haute fréquence de l'équation des ondes, Desmorat et al. [4] montrent que le problème non local en temps de propagation peut s'écrire en fonction des distances effectives ($\tilde{\ell}_{xy}$)

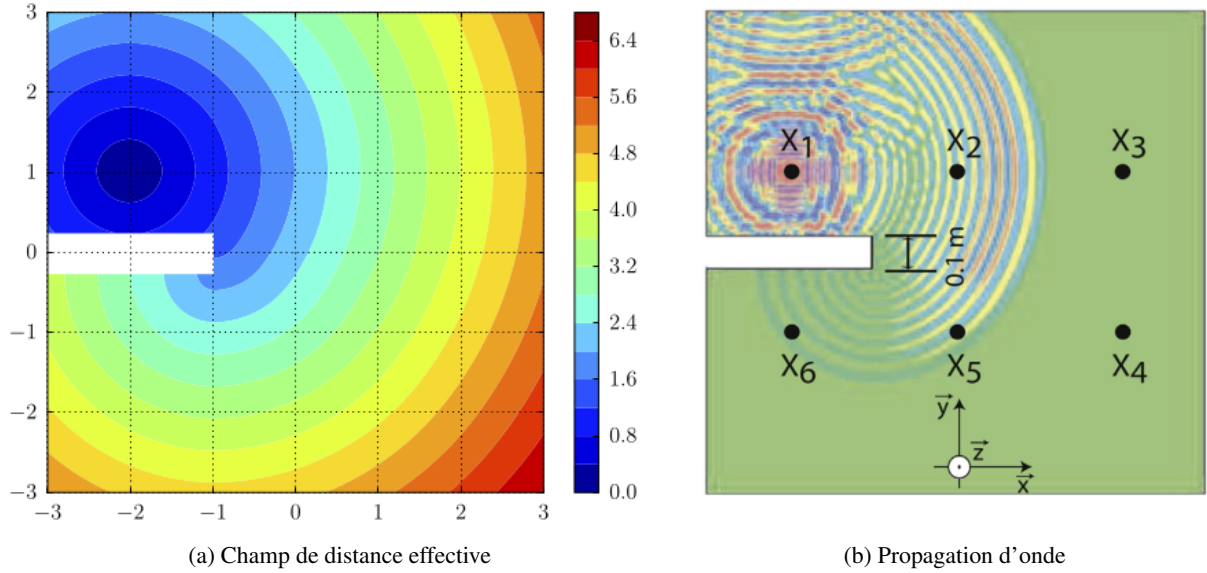


FIGURE 1 – Illustration de la méthode Eikonal Non Locale [11]

correspondant aux longueurs de géodésiques dans un espace riemannien courbé par l'endommagement. Le champ de distance effective est alors solution de l'équation eikonale suivante :

$$\sqrt{1 - D(\underline{y})} \|\tilde{\ell}_{xy}(\underline{y})\| = 1 \quad (4)$$

avec la condition initiale :

$$\tilde{\ell}_{xy}(\underline{y} = \underline{x}) = 0 \quad (5)$$

Le principe de la méthode ENL est illustré par la figure 1 sur laquelle sont comparés le champ de distance effective et les résultats d'un calcul de propagation d'onde dans un milieu avec une encoche. Cette figure montre que les deux formulations conduisent à des résultats qualitativement comparables.

D'un point de vue numérique [11], le champ de distance est obtenu par résolution de l'équation (4) à l'aide de la méthode Fast Marching. Cet algorithme initialement proposé initialement par Sethian [13] présente un temps de calcul convenable sans être exposé aux problèmes de réflexion d'onde.

2.3 Propriétés de régularisation de la méthode ENL

L'analyse est ici limitée au cas unidimensionnel pour simplicité. Une étude plus approfondie dans un contexte bi-dimensionnel est présentée en [11].

Une barre Ω de longueur L et section transversale A (figure 2) sollicitée en traction est étudiée à l'aide d'une simulation numérique par éléments finis. Le matériau de la barre est modélisé à l'aide d'un modèle d'endommagement ENL. Afin de déclencher la localisation, un défaut de raideur est introduit au milieu de la barre (élément fini affaibli). Pour décrire la réponse instable (snap-back) du système dans la phase post-pic de force, le déplacement appliqué à l'extrémité de la barre est contrôlé indirectement en imposant un taux de variation constant de la déformation dans l'élément fini affaibli [12].

Le matériau est initialement linéaire élastique. Lorsque la limite d'élasticité est atteinte, des dégradations commencent à se développer dans le matériau. Dans les calculs, une loi d'évolution exponentielle décroissante de la forme suivante est utilisée pour quantifier le développement des dégradations :

$$D = g(\kappa) = 1 - \exp\left(-\frac{\langle \kappa - \varepsilon_0 \rangle_+}{(\varepsilon_c - \varepsilon_0)}\right) \quad \kappa = \max\left(\kappa, \varepsilon_{eq}^{nl}\right) \quad (6)$$

Dans l'équation (6), ε_0 représente la déformation seuil correspondante à l'activation du processus d'endommagement et ε_c est un niveau de déformation critique. Ce paramètre contrôle l'énergie dissipée dans la phase post-pic de contrainte.

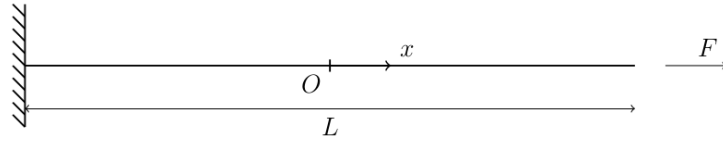


FIGURE 2 – Géométrie de la barre étudiée

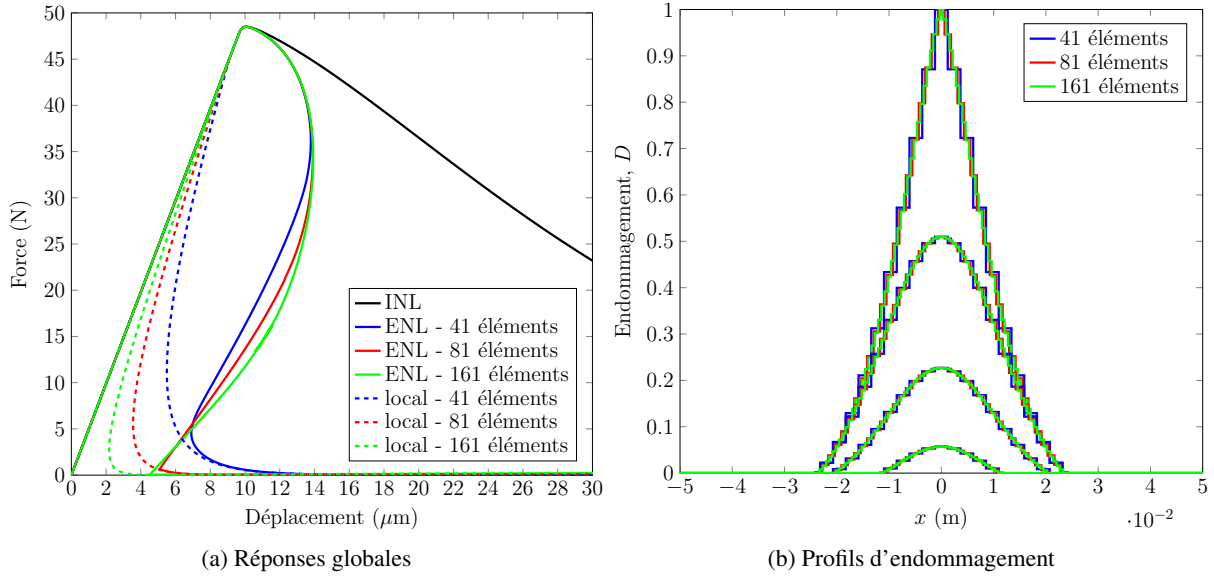


FIGURE 3 – Propriétés de régularisation de la méthode ENL. Paramètres géométriques et mécaniques utilisés dans les calculs : $L = 100$ mm, $A = 5 \times 10^{-3}$ m², $E = 100$ MPa, $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_c = 10 \times \varepsilon_0$, $\ell_c = 20$ mm

Les distances d'interaction non locales entre les points d'intégration du maillage sont mises à jour au début de chaque pas de chargement. Dans le contexte unidimensionnel ici considéré, la distance effective $\tilde{\ell}_{xy}$ entre chaque couple (x, y) de points de Gauss est donnée par :

$$\tilde{\ell}_{xy} = \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} \frac{1}{\sqrt{1-D(z)}} dz \geq |x-y| \quad (7)$$

Cet intégrale peut donc être calculée numériquement, par exemple par la formule du trapèze.

2.3.1 Résultats

Les résultats obtenus avec la formulation ENL sont tracés sur la figure 3 pour trois finesses de maillages différentes (41, 81 et 161 éléments finis linéaires de type barre). Les courbes de réponse force-déplacement (figure 3a) montrent que pour de faibles niveaux d'endommagement la méthode ENL suit le comportement de la méthode classique INL car les distances géodésiques sont proches des distances euclidiennes. Les profils d'endommagement sont tracés sur la figure 3b à plusieurs instants de chargement.

Quand l'endommagement atteint des valeurs proches de l'unité, les distances géodésiques sont beaucoup plus grandes que les distances euclidiennes et la zone d'influence non locale devient très petite. En conséquence la réponse globale pour des valeurs d'endommagement très proches de l'unité correspond à un comportement local et une dépendance « résiduelle » au maillage est observée [11]. En d'autres termes, l'énergie encore disponible au niveau de l'élément fini affaibli lors de la localisation ne peut qu'être dissipée localement.

3 Formulation Eikonale Non Locale (ENL) enrichie

Cette section propose de modéliser les mécanismes de la rupture des matériaux quasi-fragiles à l'aide d'un modèle d'endommagement ENL couplé à un modèle à discontinuité forte [1, 2, 3]. De cette façon, l'endommagement non local permet de modéliser les dégradations diffuses menant à la localisation en une fissure cohésive. Cette approche est cohérente avec la physique du problème. De plus, d'un point de vue numérique, la formulation de ce problème dans le contexte de la méthode des éléments finis enrichis permet d'éliminer la dépendance au maillage résiduelle observée précédemment.

3.1 Méthode ENL avec transition (cas 1D)

Pendant les premières phases du processus d'endommagement de la structure, le comportement du matériau vérifie les équations (1), (2) et (4). L'instant de transition entre la phase d'endommagement et la phase d'ouverture d'une fissure en $x_0 \in \Omega$ (inconnu a priori dans un cas général) est arbitrairement choisi comme l'instant où l'endommagement $D(x_0)$ atteint un endommagement critique (D_{cr}). Au niveau de la discontinuité, une loi de traction-ouverture donne la relation entre l'ouverture de fissure (u^d) et la contrainte de cohésion (t) :

$$t = g_d(u^d) \quad x = x_0 \quad (8)$$

Enfin, l'équilibre à l'interface donne la relation entre σ et la contrainte de cohésion de la discontinuité :

$$\sigma - t = 0 \quad x = x_0 \quad (9)$$

3.1.1 Formulation numérique

La formulation numérique du problème précédent est réalisée dans le contexte de la méthode des éléments finis « embedded » [8]. Les degrés de liberté supplémentaires liés à la discontinuité forte (c.-à-d., sauts de déplacement) sont interpolés à l'aide de la fonction de Heaviside et des fonctions de forme standard de l'élément fini. Ces degrés de liberté sont donc condensés statiquement au niveau des éléments finis, ce qui permet de résoudre le problème de façon enchainée. Les degrés de liberté globaux (c.-à-d., les déplacements nodaux) sont calculés par résolution de l'équation d'équilibre globale du système en supposant constantes les ouvertures de fissures élémentaires. Ces degrés de liberté élémentaires sont ensuite mis à jour élément par élément en fonction du champ de déplacement global que l'on vient de calculer.

3.2 Propriétés de régularisation de la méthode ENL avec transition

On considère la barre de l'exemple précédent. Le matériau de la barre a un comportement initialement non local selon la formulation ENL. La transition vers un modèle à discontinuité forte a lieu lorsque D dépasse la valeur limite D_{cr} dans l'élément fini affaibli. Pour cet élément la loi traction-ouverture s'écrit comme suit :

$$t = g_d(u^d) = \sigma_{cr} \exp\left(-\frac{\sigma_{cr}}{G_f} u^d\right) \quad (10)$$

où G_f est l'énergie dissipée dans la loi cohésive et $\sigma_{cr} = (1 - D_{cr}) E \varepsilon_{cr}$ dénote la contrainte dans la barre à l'instant de la transition « continu - discontinu » (avec ε_{cr} la déformation correspondante dans l'élément affaibli).

3.2.1 Résultats

La figure 4a donne les résultats pour différentes finesses de maillage et pour trois valeurs du paramètre d'énergie de fissuration G_f de la loi traction-ouverture de fissure. Ces résultats valident les propriétés de régularisation de la méthode ENL avec transition à la discontinuité forte, de l'enclenchement de l'endommagement jusqu'à la dégradation complète de la structure.

La figure 4b donne l'évolution des déformations dans le milieu continu ($\varepsilon^c = \varepsilon - u^d/L_e$, où L_e désigne la longueur de l'élément fini) et la déformation apparente due à l'ouverture de fissure (u^d/L_e) dans l'élément affaibli. Comme attendu, après l'introduction de la discontinuité, la déformation de la partie

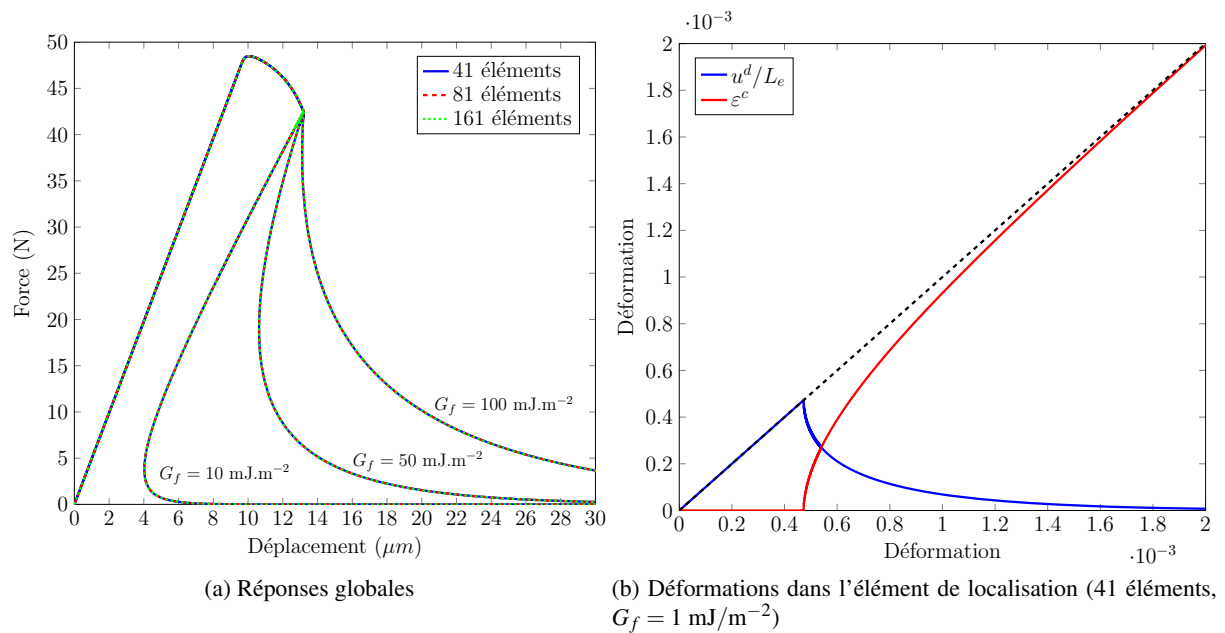


FIGURE 4 – Propriétés de régularisation de la méthode ENL avec transition « endommagement - fissure cohésive ». Paramètres géométriques et mécaniques utilisés dans les calculs : $L = 100 \text{ mm}$, $A = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $E = 100 \text{ MPa}$, $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_c = 10 \times \varepsilon_0$, $\ell_c = 20 \text{ mm}$, $D_{cr} = 0.8$

continue diminue et la déformation de l'élément associée à la partie discontinue tend vers la déformation totale de l'élément.

4 Conclusion

La transition de la formulation ENL vers un modèle à discontinuité forte a été présentée. Les premiers résultats en 1D montrent que l'introduction d'une discontinuité dans les zones fortement endommagées permet de retrouver l'objectivité des résultats lorsque la zone de localisation se réduit à la taille d'un élément fini. En perspective de ces travaux, la définition d'une quantification objective de l'énergie dissipée lors du processus de fissuration jusqu'à la rupture est en cours de développement.

Remerciements

Ce travail a été financé partiellement par l'Institut SEISM (<https://www.institut-seism.fr/>).

Références

- [1] F. Cazes, M. Coret, A. Combescure, A. Gravouil. *A thermodynamic method for the construction of a cohesive law from a nonlocal damage model*. International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 46 (6), 1476–1490, 2009.
- [2] C. Comi, S. Mariani, U. Perego. *An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 31 (2), 213–238, 2007.
- [3] S. Cuvilliez, F. Feyel, E. Lorentz, S. Michel-Ponnelle. *A finite element approach coupling a continuous gradient damage model and a cohesive zone model within the framework of quasi-brittle failure*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 244–259, 2012.
- [4] R. Desmorat, F. Gatuingt, M. Jirasek. *Nonlocal models with damage-dependent interactions motivated by internal time*, Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 142, 255–275, 2015.
- [5] R. Desmorat, F. Gatuingt, *Introduction of an internal time in nonlocal integral theories*, Technical Report, LMT-Cachan, Cachan, France, 2007.

- [6] C. Girya, F. Dufour, J. Mazars. *Stress-based nonlocal damage model*, International Journal of Solids and Structures, 48(25), 3431–3443, 2011.
- [7] J. Lemaitre, R. Desmorat. *Engineering Damage Mechanics : Ductile, Creep, Fatigue and brittle failures*, Springer, 2005.
- [8] J. Oliver. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**, 3575–3623, 1996.
- [9] G. Pijaudier-Cabot, Z. P. Bazant, *Nonlocal damage theory*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 113(10), 1512–1533, 1987.
- [10] G. Pijaudier-Cabot, K. Haidar, J. Dubé. *Non-local damage model with evolving internal length*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 28(7-8), 633–652, 2004.
- [11] G. Rastello, C. Girya, F. Gatuingt, R. Desmorat. *From diffuse damage to strain localization from an Eikonal Non-Local (ENL) Continuum Damage model with evolving internal length*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 331, 650–674, 2018.
- [12] G. Rastello, F. Riccardi, B. Richard. *Discontinuity-scale path-following methods for the embedded discontinuity finite element modeling of failure in solids*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, (2018, under review).
- [13] J. A. Sethian. *A fast marching level set method for monotonically advancing fronts.*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 93(4), 1591–1596, 1996.