

## Amélioration de la qualité de maillages tétraédriques

C. Marot<sup>1</sup>, K. Verhetsel<sup>1</sup>, J.-F. Remacle<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université catholique de Louvain, Institute of Mechanics, Material and Civil Engineering, {celestin.marot, jean-francois.remacle}@uclouvain.be

### Résumé —

Les maillages tétraédriques obtenus par une triangulation de Delaunay ne conviennent pas pour les méthodes des éléments finis. Des algorithmes de lissage, modifiant l'emplacement des sommets, ou de transformations topologiques locales, modifiant la connexion du maillage, permettent d'améliorer la qualité globale de ces maillages. Dans ce résumé étendu, nous abordons les techniques d'amélioration de maillage et présentons nos résultats préliminaires. Nous motivons également le besoin d'une opération générale et rapide, capable d'énumérer toutes les tétraédrisations possibles d'un polyèdre et divulguons les dessins de notre future implémentation. Cette implémentation devrait être finalisée pour notre présentation à ce 14<sup>ème</sup> colloque national en calcul des structures.

**Mots clés** — maillage, tétraèdres, qualité, amélioration.

## 1 Introduction

Les tailles des maillages utilisés pour la méthode des éléments finis n'ont cessé d'augmenter conjointement avec l'augmentation exponentielle de la puissance de calcul des ordinateurs. Il n'est maintenant pas rare de générer des maillages comportant des centaines de millions de tétraèdres. Cependant, alors que les méthodes de résolutions numérique s'adaptent aux nouvelles architectures parallèles, la génération de maillage est longtemps restée une tâche séquentielle. Dans un précédent travail, nous avons montré comment créer un maillage tétraédrique extrêmement rapidement à partir d'un maillage de surface.[11] Cependant, ce maillage créé à partir d'une triangulation de Delaunay ne convient pas à la méthode des éléments finis. En effet, la triangulation de Delaunay est la triangulation qui minimise le rayon de la plus grande sphère englobante associée à un tétraèdre[13]. Or, cette optimalité n'est pas celle recherchée puisqu'un mauvais tétraèdre n'a pas forcément une grande sphère englobante. Par conséquent, des tétraèdres de mauvaise qualité, notamment les tétraèdres cerf-volants (*sliver* en anglais, voir Figure 1), sont communément logés à l'intérieur d'une triangulation de Delaunay. Pour se débarrasser de ces mauvais tétraèdres, tout mailleur qui se respecte basé sur la triangulation de Delaunay implémente une étape d'amélioration du maillage. L'amélioration du maillage va augmenter considérablement la qualité du plus mauvais tétraèdre, soit en changeant légèrement les coordonnées des points à l'intérieur du maillage, soit en effectuant des changements dans la topologie même du maillage par des reconnections locales. Ces deux techniques sont généralement combinées. D'autres programmes choisissent également d'ajouter ou de retirer des points pour tenter d'augmenter la qualité des éléments. Ces méthodes, en plus d'être assez coûteuses numériquement, risquent de modifier la taille de maille et ne sont pas considérées

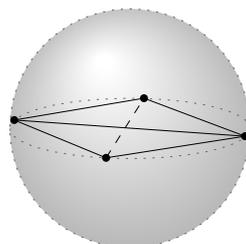


FIGURE 1 – Un tétraèdre cerf-volant (*sliver*) est pratiquement plat, et donc tout à fait impropre pour une méthode des éléments finis isotrope. Cependant, comme sa sphère circonscrite n'est pas excessivement grande, on le retrouve à l'intérieur des triangulations de Delaunay.

dans ce résumé. Notre but est donc d'implémenter les méthodes de reconnexion et de déplacement des points en parallèle de manière à ce que l'amélioration de la qualité ne prenne pas plus de temps que la création du maillage de base. Nous espérons aussi obtenir une qualité de maillage supérieures à celle obtenues avec d'autres logiciel comme TetGen[15], Cgal[2] ou Stellar[9].

## 2 Mesures de qualités

La littérature décrit diverses mesures de qualité[14, 1, 3, 4, 6, 7, 15]. Une mesure de qualité est négative si le tétraèdre a un volume négatif<sup>1</sup>, nulle si le tétraèdre est plat et unitaire et maximale si le tétraèdre est régulier. Voici certaines mesures couramment utilisées :

1. le rapport entre la hauteur signée la plus courte et l'arête la plus longue.
2. le volume signé du tétraèdre divisé par la somme des aires des faces et par la longueur de l'arête la plus longue.
3. le sinus minimum des angles dièdres.
4. le volume signé divisé par le cube de la longueur moyenne des arêtes.
5. le rayon de la sphère inscrite divisé par le rayon de la sphère circonscrite, avec le signe du volume.
6. ...

Les mesures de qualité décrites ci-dessus doivent être pondérées pour ramener le tétraèdre régulier à une qualité unitaire. Ces mesures peuvent aussi être utilisées pour des maillages anisotropes en appliquant une transformation affine, souvent une simple dilatation, aux coordonnées du tétraèdre pour l'amener dans un espace isotrope. Une telle transformation va changer un tétraèdre anisotrope parfait en un tétraèdre régulier, dont la qualité est maximale selon les différentes mesures.

La mesure de qualité utilisée dans le reste de ce papier est la 2<sup>ème</sup> de la liste, c'est la mesure de qualité *Gamma* que l'ont peut afficher facilement avec Gmsh[6].

## 3 Lissage

Le lissage est une opération qui va bouger les nœuds du maillages afin d'améliorer la qualité d'un mauvais élément. L'opération de lissage la plus simple est le lissage laplacien : on change la position d'un nœud par la position moyenne de ses nœuds voisins. Une attention supplémentaire est cependant requise, ce type de lissage peut diminuer la qualité du moins bon élément, donc il faut vérifier que la qualité de celui-ci augmente effectivement avant d'appliquer le lissage laplacien. Une amélioration implémentée dans notre programme est d'effectuer une méthode du nombre d'or entre le point original et la position moyenne des voisins pour tenter de trouver un endroit où la qualité minimum est maximisée. Bien que la qualité du plus mauvais élément ne soit pas une fonction unimodale sur le segment et que son minimum ne se trouve en général pas sur le segment, cette technique donne tout de même de bon résultats.

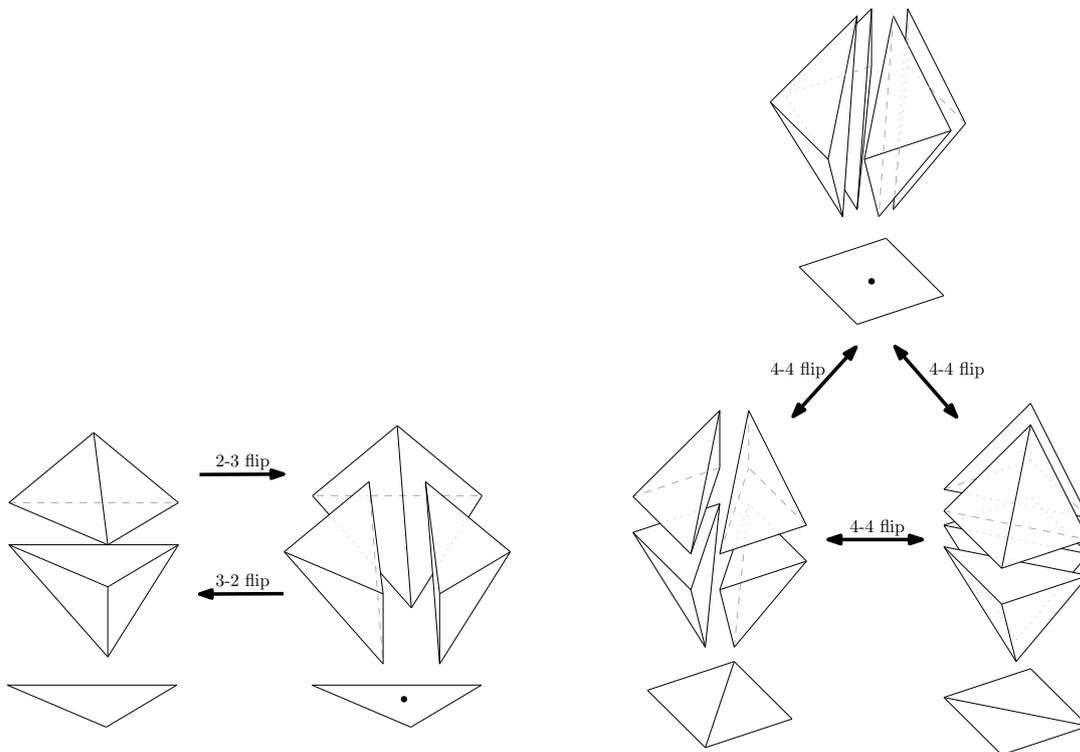
D'autres approches se basent sur des méthodes d'optimisation avancées afin de trouver un bien meilleur positionnement du nœud. Comme la fonction donnant qualité selon le placement du point est quasi-convexe[1, 5], des méthodes d'optimisation convexes peuvent être utilisées localement. D'autres algorithmes de lissage sont basés sur un diagramme de Voronoi centroïdal (CVT : centroidal Voronoi tessellation)[4] ou une équation aux dérivées partielles à résoudre itérativement sur le maillage[3].

## 4 Remaillage local

Les deux opérations topologiques les plus simples sur des maillages tétraédriques sont les flips 2-3 et 3-2. Le flip 2-3 opère sur un diamant triangulaire composé de deux tétraèdres adjacents et les transforme en 3 tétraèdres partageant l'arête joignant les deux points qui n'étaient pas partagés par les deux précédents tétraèdres. La frontière du diamant triangulaire reste inchangée. Le flip 3-2 est l'opération inverse. Ces 2 opérations sont illustrées à la Figure 2a. Le flip 4-4 est souvent décrit comme étant la 3<sup>ème</sup> opération élémentaire de reconnexion. Le flip 4-4 travaille sur un octaèdre composé de quatre tétraèdre. Cette

---

1. On parle ici du volume signé obtenu en effectuant le déterminant  $\det(p_1 - p_0, p_2 - p_0, p_3 - p_0)$



(a) les deux opérations topologique les plus simples : le flip 2-3 et le flip 3-2

(b) le flip 4-4

FIGURE 2 – Les trois opérations élémentaires de reconnexion locale

opération ressemble au retournement d'arête 2D puisqu'il y a littéralement un retournement d'arête 2D effectué sur une des deux faces diagonales quadrilatères de l'octaèdre. La frontière de l'octaèdre reste inchangée.

Ces trois opérations de base, illustrées à la Figure 2 sont très efficaces pour améliorer la majorité des mauvais éléments d'un maillage. Cependant, le nombre d'opérations possible est assez limité. Notamment, imaginez un tétraèdre accolé à une des faces du tétraèdre cerf-volant affiché à la Figure 1, il est impossible de d'obtenir de bon tétraèdres par un flip 2-3 sur ces deux tétraèdres. De plus, si une arête du mauvais tétraèdre est partagée par plus de quatre tétraèdres, alors on ne peut pas réaliser de flip 3-2 ou 4-4 qui supprimerait cette arête. Heureusement, il est possible de généraliser les flip 3-2 et 4-4 pour supprimer une arête entourée de  $n$  tétraèdres  $\forall n \geq 3$ . Cet outil de suppression d'arête (*edge removal* à la Figure 3) opère sur la cavité formée par l'ensemble des tétraèdres contenant l'arête que l'on veut supprimer. Cette cavité est combinatoirement équivalente à une bipyramide et la seule arête intérieure est l'arête à supprimer. L'outil de suppression d'arête va faire apparaître une triangulation du polygone pris en sandwich entre la pyramide supérieure et la pyramide inférieure. Cette opération, qui étend le flip 3-2 et 4-4, est implémentée dans la plupart des améliorateurs de maillage et son implémentation est détaillée dans de nombreux papiers[8, 15, 9, 7]. L'opération inverse, appelée suppression multi-face, est plus compliquée et donc beaucoup moins fréquente. Les rares papiers qui décrivent l'utilisation de cette opération ne prouvent pas son efficacité[8, 7]. Une troisième opération, appelée retriangulation multi-face, retriangule le polygone pris en sandwich. A notre connaissance, cette opération n'a été décrite que par Misztal et al, qui lui attribue une efficacité légèrement supérieure à la suppression multi-face[12]. Ces trois opérations - suppression d'arête, suppression multi-face et retriangulation multi-face - sont illustrées à la Figure 3.

Dans le cas ou aucune des opérations précédentes n'améliore suffisamment le maillage, il faut une opération encore plus versatile, capable de donner des résultats inaccessibles par les simples opérations de suppression d'arête, de retriangulation multi-faces ou de suppression multi-faces. Liu et Sun ont développé un outil général pour retriangler n'importe quel petit polyèdre de façon optimale[10]. Cet outil général, appelé SPR pour *small polyhedron reconnection*, va non seulement évaluer les tétraédrisations

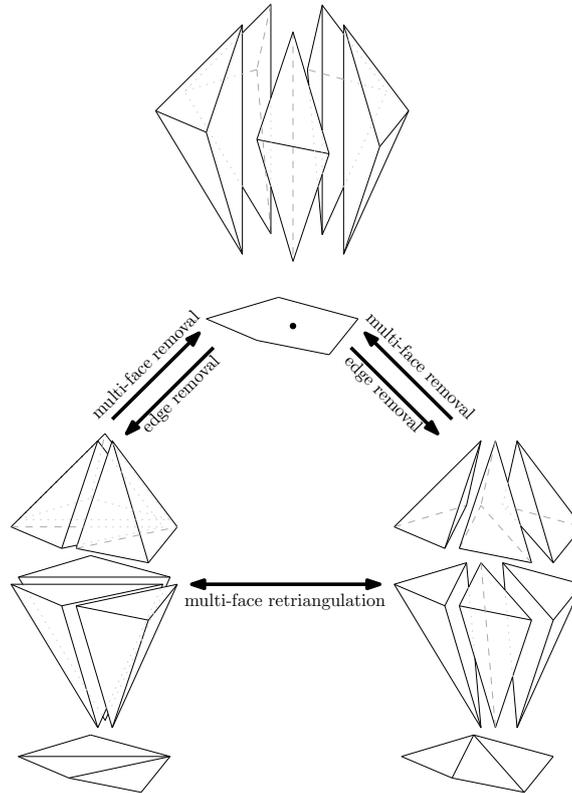


FIGURE 3 – Les opération de suppression d’arête (*edge removal*), de retriangulation multi-face (*multi-face retriangulation*) et de suppression multi-face (*multi-face removal*)

proposées par la suppression d’arête et la suppression/retriangulation multi-face, mais va en plus considérer bien d’autres possibilités, puisqu’il considère en fait toute les possibilités topologiquement acceptable de retriangulation. C’est donc évidemment le plus efficace des outils de reconnexion, c’est pourquoi nous implémenterons une version optimisée de l’opération SPR pour ce 14<sup>ème</sup> colloque national en calcul des structures (CSMA).

## 5 Résultats préliminaires

Nous n’avons pour l’instant développé qu’une première version d’amélioration de maillage, ne comprenant que le lissage laplacien et la suppression d’arête. Ces deux opérations sont les plus efficaces, si on exclu l’ajout et la suppression de point. En effet, plus de 99% des mauvais éléments sont éliminés en utilisant uniquement ces deux opérations, comme le montre la Table 1. Le maillage utilisé est détaillé à la Figure 4. Chacune des phases d’optimisation, lissage et suppression d’arête, sont effectuées en parallèle en utilisant une méthode de partitionnement basée sur une courbe de Hilbert, comme expliqué dans notre précédent papier[11]. Cela nous permet de réaliser ces deux premières phases en seulement 5 secondes pour un maillage de 24 millions de tétraèdres.

	avant amélioration	après amélioration	ratio $\frac{\text{après}}{\text{avant}}$	
$\gamma < 0,15$	147176	1584	1.1%	} 0.94%
$0,15 \leq \gamma < 0,35$	768294	6985	0.9%	
$0,35 \leq \gamma < 0,65$	6706237	6180562	92.2%	
$0,65 \leq \gamma$	13819680	14700524	106.4%	

TABLE 1 – Plus de 99% des mauvais tétraèdres sont éliminés, et ceci uniquement en utilisant un lissage laplacien et la suppression d’arête.  $\gamma$  est la 2<sup>ème</sup> mesure de qualité de la liste présentée à la section 2.

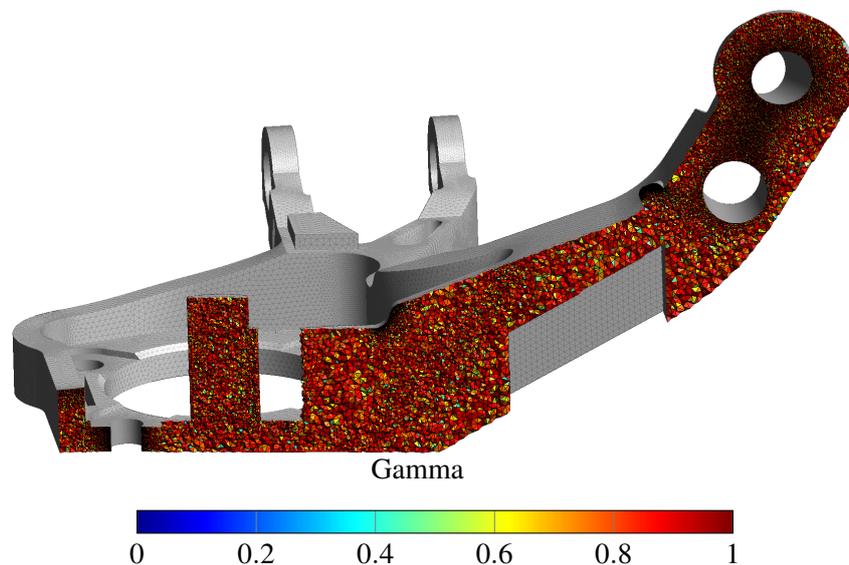


FIGURE 4 – Maillage de pièce mécanique avec environ 24 millions de tétraèdre. La mesure de qualité  $\gamma$  (2<sup>ème</sup> mesure de qualité de la section 2) de chaque élément est affichée.

## 6 Travaux futurs

Notre objectif étant de ne pas prendre plus de temps pour l'amélioration de maillage que pour la création du maillage non-amélioré, c'est à dire 23 secondes pour le maillage testé. Il reste donc 19 secondes pour améliorer le dernier centième de mauvais tétraèdres. Implémenter la suppression et retriangulation multi-face est un très gros travail qui semble assez inutile puisque l'outil SPR est beaucoup plus général et ne semble pas plus compliqué à implémenter. Néanmoins, cet outil est assez lent :  $\approx 0,05$  secondes par opérations sur des polyèdres assez petits selon Liu et Sun, sur un Pentium IV @ 2.4 Ghz. Rien qu'en passant sur notre ordinateur plus moderne et en réalisant l'opération SPR sur plusieurs cœurs, nous pouvons espérer aller au moins 10 fois plus rapidement. Malgré tout, même en prenant 0,005 secondes par opération, cela équivaut tout de même à 42 secondes pour améliorer les 8569 mauvais éléments restants. Une des premières optimisation à apporter à l'algorithme SPR est de rapidement calculer tous les tétraèdres possibles, éliminer ceux qui n'ont pas une qualité suffisante et ne stocker que ceux qui sont satisfaisants. Ensuite, lorsqu'on va énumérer les tétraédrisations possibles, on ne va considérer que les tétraédrisations fabriquées à partir des tétraèdres de qualité satisfaisante. Une deuxième amélioration consiste à stocker les tétraédrisations de polyèdres simples avec très peu de sommets ( $\lesssim 6$ ) dans des tables, évitant ainsi de nombreux calculs inutiles. D'ailleurs, une des améliorations de l'algorithme SPR suggérée dans la conclusion de l'article de Liu et Sun[10] est d'éviter de recalculer plusieurs fois le même sous-problèmes. Différentes techniques de programmation dynamique peuvent être utilisée pour évité encore plus amplement la duplication des calculs. Nous avons la chance d'avoir déjà travaillé sur des problèmes similaires, comme l'énumération des différentes façon de décomposer un polyèdre en hexaèdres[16]. Nous pensons qu'il serait alors possible d'atteindre notre objectif. Additionnellement, nous voudrions considérer la tétraédrisation de polyèdres avec des faces ou arêtes contraintes. Il serait aussi utiles de considérer la reconnexion de polyèdres contenant un ou plusieurs points intérieurs.

## 7 Conclusion

Dans ce résumé étendu destiné à détailler le contenu de notre présentation au 14<sup>ème</sup> colloque national en calcul des structures (CSMA), nous avons présenté les bases de l'amélioration de maillage, ainsi que nos résultats pour la première phase de l'algorithme qui consiste en une combinaison des opérations de lissage et de suppression d'arête. Ces deux opérations permettent d'éliminer 99% des mauvais éléments d'un maillage. Finalement, nous avons esquissé les contours du travail qui va être réalisé dans les prochains mois pour éliminer rapidement le pour cent des mauvais tétraèdres restants. Nous pourrons alors présenter un maillage complet et ultrarapide durant ce 14<sup>ème</sup> CSMA.

## 8 Remerciement

Ce projet est financé par le Conseil Européen de la Recherche (ERC) au sein du programme d'innovation et de recherche Horizon 2020 (subvention : ERC-2015-AdG-694020).

### Références

- [1] N. Amenta, M. Bern, D. Eppstein. *Optimal Point Placement for Mesh Smoothing*. Journal of Algorithms, 30(2) :302–322, February 1999.
- [2] J.-D. Boissonnat, O. Devillers, S. Pion, M. Teillaud, M. Yvinec. *Triangulations in CGAL*. Computational Geometry, 22(1) :5–19, May 2002.
- [3] F. Dassi, L. Kamenski, P. Farrell, H. Si. *Tetrahedral mesh improvement using moving mesh smoothing, lazy searching flips, and RBF surface reconstruction*. Computer-Aided Design, 103 :2–13, October 2018.
- [4] Q. Du, D. Wang. *Tetrahedral mesh generation and optimization based on centroidal Voronoi tessellations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 56(9) :1355–1373, March 2003.
- [5] L. A. Freitag, P. Plassmann. *LOCAL OPTIMIZATION-BASED SIMPLICIAL MESH UNTANGLING AND IMPROVEMENT*. page 15.
- [6] C. Geuzaine, J.-F. Remacle. *Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 79(11) :1309–1331, sep 2009.
- [7] B. Klingner. *Tetrahedral Mesh Improvement*. page 126.
- [8] B. M. Klingner, J. R. Shewchuk. *Aggressive Tetrahedral Mesh Improvement*. In M. L. Brewer, D. Marcum, editors, Proceedings of the 16th International Meshing Roundtable, pages 3–23. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [9] B. M. Klingner, J. R. Shewchuk. *Stellar : A Tetrahedral Mesh Improvement Program*, 2008 (visité 19 janvier 2019). <https://people.eecs.berkeley.edu/~jrs/stellar/>.
- [10] J. Liu, S. Sun. *Small Polyhedron Reconnection : A New Way to Eliminate Poorly-Shaped Tetrahedra*. In P. P. Pébay, editor, Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable, pages 241–257. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [11] C. Marot, J. Pellerin, J.-F. Remacle. *One machine, one minute, three billion tetrahedra*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 0(0).
- [12] M. K. Misztal, J. A. Bærentzen, F. Anton, K. Erleben. *Tetrahedral Mesh Improvement Using Multi-face Retriangulation*. In B. W. Clark, editor, Proceedings of the 18th International Meshing Roundtable, pages 539–555. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [13] V. T. Rajan. *Optimality of the Delaunay triangulation in  $\mathbb{R}^d$* . Discrete & Computational Geometry, 12(2) :189–202, December 1994.
- [14] J. R. Shewchuk. *What Is a Good Linear Finite Element? - Interpolation, Conditioning, Anisotropy, and Quality Measures*. Technical report, In Proc. of the 11th International Meshing Roundtable, 2002.
- [15] H. Si. *TetGen, a Delaunay-Based Quality Tetrahedral Mesh Generator*. ACM Trans. Math. Softw., 41(2) :11 :1–11 :36, February 2015.
- [16] K. Verhetsel, J. Pellerin, J.-F. Remacle. *A 44-element mesh of Schneiders' pyramid : bounding the difficulty of hex-meshing problems*. CoRR, abs/1806.01022, 2018.