

# Optimisation topologique en mécanique de contact par la méthode des lignes de niveaux

J. Desai<sup>1 3</sup>,  
G. Allaire<sup>2</sup>, F. Jouve<sup>1</sup>, C. Nardoni<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire J.L. Lions (UMR CNRS 7598), Université Paris Diderot, Paris, France,

<sup>2</sup> CMAP, École Polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay, 91128 Palaiseau, France,

<sup>3</sup> Institut de recherche technologique SystemX, 91120 Palaiseau, France.

**Abstract** — Nous nous intéressons à l'optimisation topologique en mécanique du contact par la méthode des lignes de niveau. Nous considérons une structure linéaire élastique contrainte unilatéralement par des supports rigides et possédant une interface en auto-contact. Le contact est modélisé par les conditions aux limites de Signorini et la friction par la loi de Coulomb. En pénalisant les conditions aux limites, le problème non linéaire obtenu est traité numériquement à l'aide des méthodes de point fixe et de Newton-Raphson. La compliance élastique de la structure est minimisée sous une contrainte de volume.

**Mots clés** — optimisation topologique; contact; ligne de niveau; adaptation de maillage.

## 1 Introduction

Le contact est un phénomène physique d'une importance capitale dans de nombreuses applications industrielles. Le frottement résultant du contact assure la locomotion des véhicules et joue donc un rôle crucial dans la construction de pièces mécaniques (usure des machines, systèmes de freinage, roulements, pneus, liaisons mécaniques).

L'optimisation structurelle consiste à trouver la forme la plus efficace par rapport à un ou plusieurs critères mécaniques, par exemple l'énergie de déformation ou les contraintes maximales. L'objectif de l'optimisation structurelle est d'améliorer les caractéristiques mécaniques des structures en les rendant plus légères, plus robustes et efficaces. La conception optimale de structures est utilisée dans de nombreux secteurs industriels: automobile, aéronautique, spatial, génie civil, etc. Les pièces à concevoir sont rarement isolées et sont généralement en contact avec d'autres pièces. La prise en compte du contact dans l'optimisation topologique est donc tout à fait pertinente et attractive pour les applications.

L'optimisation topologique nécessite de choisir un paramétrage de la forme capable de capturer les changements de topologie. Osher et Sethian [1] proposent d'utiliser la ligne de niveau associée à la valeur zéro d'une fonction continue à valeurs scalaires (appelée "fonction ligne de niveau" ou level-set) pour définir implicitement l'interface d'une structure. L'évolution de la fonction ligne de niveau est obtenue par la résolution d'une équation de type Hamilton-Jacobi où le champ de vitesse d'advection est défini à partir de la dérivée de forme et permet de capturer d'éventuels changements de topologie [2].

## 2 Problème de contact

Nous considérons la déformation d'une structure gouvernée par le système de l'élasticité linéaire. Le contact est pris en compte ici par les conditions aux limites de Signorini. Le modèle de friction que nous utilisons est donné par la loi de Coulomb. Dans cet exposé, nous examinons deux phénomènes de contact: contact entre corps rigides et auto-contact. Considérons un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma \cap \Gamma_c \cap \Gamma_N \cap \Gamma_0 \cap S$  (voir Fig.(4)). La structure est fixée sur le bord  $\Gamma_0$ , soumise à une pression  $g$  sur le bord  $\Gamma_N$ , en contact avec une surface rigide sur le bord  $\Gamma_c$  et possède une interface en auto-contact  $S$ . Le symbole  $n$  désigne la normale sur  $\partial\Omega \setminus S$  et  $n^+$  et  $n^-$  sont les normales sortantes correspondant aux deux côtés de l'interface  $S$ .

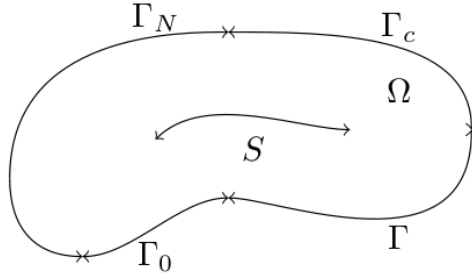


Figure 1: Schéma géométrique

Soient  $u \in \mathbb{R}^d$ , ( $d = 2, 3$ ) le déplacement de la structure,  $e(u)$  nous désignons le tenseur des déformations défini comme

$$e(u) = \frac{1}{2} (\nabla u^T + \nabla u)$$

et  $A$  le tenseur symétrique d'élasticité linéaire. Le déplacement  $u$  est la solution du problème suivant

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(Ae(u)) &= f && \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_0, \\ Ae(u)n &= g && \text{sur } \Gamma_N, \\ Ae(u)n &= 0 && \text{sur } \Gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Conditions limites de Signorini} \begin{cases} u \cdot n \leq 0, Ae(u)n \cdot n \leq 0, (Ae(u)n \cdot n)(u \cdot n) &= 0 & \text{sur } \Gamma_c, \\ [u] \cdot n^- \leq 0, Ae(u|_{S^-})n^- \cdot n^- = Ae(u|_{S^+})n^+ \cdot n^+ &\leq 0 & \text{sur } S, \\ ([u] \cdot n^-)(Ae(u|_{S^-})n^- \cdot n^-) &= 0 & \text{sur } S, \end{cases}$$

$$\text{Conditions limites de Coulomb} \begin{cases} |(Ae(u)n)_t| = (Ae(u|_{S^-})n^-)_t = -(Ae(u|_{S^+})n^+)_t & \text{sur } S, \\ |(Ae(u)n)_t| \leq \mu |Ae(u)n \cdot n| & \text{sur } S, \\ |(Ae(u)n)_t| < \mu |Ae(u)n \cdot n| \implies [u]_t = 0 & \text{sur } S, \\ |(Ae(u)n)_t| = \mu |Ae(u)n \cdot n| \implies \exists \lambda \geq 0, u_t = -\lambda (Ae(u|_{S^-})n)_t & \text{sur } S. \end{cases}$$

où  $[u] = u^- - u^+$ ,  $(Ae(u)n)_t$  est la tangentielle du vecteur  $Ae(u)n$  sur  $\Gamma_c$  et du vecteur  $Ae(u|_{S^-})n^-$  sur  $S$ .

Nous introduisons l'espace fonctionnel

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)^d, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

et l'ensemble convexe

$$K(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)^d, v \cdot n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0, [v] \cdot n^- \leq 0 \text{ sur } S\}$$

et un fonction discontinue  $\phi(t) = t\mathcal{H}(t)$  (où  $\mathcal{H}(\cdot)$  désigne la fonction de Heaviside). Il est connu que la solution du problème (1)  $u$  appartient à l'ensemble  $K(\Omega)$  [3].

Ici, (1) est résolu par la méthode de pénalisation [4]. L'idée derrière cette méthode est de trouver une solution dans l'espace  $H_0^1(\Omega)$  et de pénaliser les conditions aux limites de Signorini pour que la solution  $u$  appartienne à  $K(\Omega)$ . Les conditions aux limites de Coulomb sont régularisées à l'aide d'une régularisation  $\mathcal{N}(x)$  de la fonction valeur absolue (voir [4]):

$$\mathcal{N}_\eta(x) = \begin{cases} |x| & |x| \geq \eta, \\ -\frac{|x|^4}{8\eta^3} + \frac{3|x|^2}{4\eta} + \frac{3\eta}{8} & |x| < \eta. \end{cases}$$

La formulation variationnelle du problème pénalisé est la suivante:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Ae(u) : e(v) dx + j'_\varepsilon(u, v) + j'_{co, \varepsilon, \eta}(u, v) &= \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \text{où} \\ j'_\varepsilon(u, v) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_c} \phi(u \cdot n) v \cdot n ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_S \phi([u] \cdot n) [v] \cdot n ds, \\ j'_{co, \varepsilon, \eta}(u, v) &= \frac{\mu}{\varepsilon} \int_{\Gamma_c} \phi(u \cdot n) \mathcal{N}'(u_t) \cdot v_t ds + \frac{\mu}{\varepsilon} \int_S \phi([u] \cdot n^-) \mathcal{N}'([u]_t) \cdot [v] \cdot n ds. \end{aligned} \quad (2)$$

### 3 Mise en œuvre numérique

La résolution numérique du problème (2) est réalisée sur un maillage non-structuré à l'aide du logiciel FreeFEM++. Ici, le bord  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$  est défini implicitement par une fonction de ligne de niveau, définie dans un domaine de conception  $D$  tel que  $\Omega \subset D$  [5]. La ligne de niveau est discrétisée comme une fonction linéaire par morceaux définie sur les sommets d'un maillage de calcul de  $D$ . Afin de résoudre le problème mécanique par la méthode des éléments finis, nous nous appuyons sur deux méthodes:

- **Matériau "Ersatz"**

La région  $D \setminus \Omega$  est remplie par un matériau très mou et la totalité du domaine  $D$  est prise en compte dans le problème variationnel. Nous introduisons la fonction caractéristique  $\chi_\Omega$  de  $\Omega$  et un réel  $\tau$ ,  $0 < \tau \ll 1$ , et remplaçons la formulation variationnelle (2) par:

$$\int_D A_\tau e(u) : e(v) dx + j'_\varepsilon(u, v) + j'_{co, \varepsilon, \eta}(u, v) = \int_D \chi_\Omega f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v dx \quad \forall v \in H_0^1(D) \quad (3)$$

où le tenseur d'élasticité est défini par

$$A_\tau = (\chi_\Omega + \tau(1 - \chi_\Omega))A.$$

- **Maillage du domaine implicite**

En utilisant des techniques de remaillage, il est possible d'obtenir une discrétisation explicite (triangles en 3d, arêtes en 2d) sous forme de triangulation de la ligne de niveau représentant l'interface. Dans ce cas, le problème mécanique est résolu sur un maillage explicite du domaine  $\Omega$ .

L'étape de remaillage du domaine implicite est accomplie à l'aide du logiciel de remaillage MMG [6].

Dans les deux cas, nous générons un maillage du domaine  $\Omega$  tel que la zone d'auto-contact  $S$  est composée de deux interfaces  $S_L$  et  $S_R$ . Les nœuds des interfaces  $S_L$  and  $S_R$  peuvent être soit coïncidentes soit non coïncidentes. Nous prenons en compte les deux cas, que l'interface  $S$  soit plane ou non.

La résolution numérique du problème (2) est obtenue par la méthode de point fixe, par la méthode de Newton Raphson, ou par une combinaison des deux [7]. Nous considérons la formulation suivante:

$$K + M(U_N) + C(U_N)U_{N+1} = F \quad (4)$$

où

$$KU_{N+1} = \int_\Omega Ae(u_{N+1}) : e(v) dx, \quad (5)$$

$$C(U_N)U_{N+1} = \frac{\mu}{\varepsilon} \int_S \phi([u_N] \cdot n_-) \kappa([u_N]_t) [u_{N+1}]_t [v] \cdot n_- ds. \quad (6)$$

Le terme  $\kappa(\cdot)$  est une régularisation classique de la fonction *signe* que nous ne précisons pas ici. Pour le problème de contact sans frottement, nous initialisons la méthode de point fixe par la solution du système d'élasticité linéaire, et pour le cas avec frottement, nous utilisons la solution du problème de contact sans frottement.

### 4 Calcul de la dérivée de forme

Pour mettre en œuvre une stratégie d'optimisation de type gradient, nous devons calculer la sensibilité de la fonction coût par rapport aux perturbations du domaine. Pour le problème pénalisé (2), nous utilisons dérivée de forme initialement introduite par Hadamard [8] et son calcul rapide proposé par Cea [9]. Nous considérons la minimisation de la fonctionnelle

$$J(u, \Omega) = \int_\Omega m(u) dx + \int_{\Gamma_m} l(u) ds \quad (7)$$

où  $u$  est la solution du problème (2),  $l(\cdot)$ ,  $m(\cdot)$  sont des fonctions  $C^1$  et coercives,  $\Gamma_m$  est la partie de  $\partial\Omega$  optimisée. Dans la position du problème pénalisé le terme  $\phi(\cdot)$  est remplacé par la régularisation  $\phi_\eta(\cdot)$  pour garantir la différentiabilité au sens de Gâteaux. Nous l'écrivons sous le forme

$$\int_{\Omega} Ae(u) : e(v) dx + \int_{S \cup \Gamma_c} j(u, v, n) ds = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v ds \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^d.$$

Le théorème suivant fournit l'expression de la dérivée de forme de (7) (voir [10]).

**Théorème 1** Soient  $\Gamma_m \cap \Gamma_0 = \emptyset$ ,  $f \in H^1(\mathbb{R}^d)^d$ ,  $g \in H^2(\mathbb{R}^d)^d$  et  $u \in H_0^1(\Omega)^d$  la solution du problème (2). Alors, la dérivée  $J'(\Omega)$  au sens de Gâteaux de la fonctionnelle (7) le long d'une direction  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , est donnée par:

$$\begin{aligned} J'(\Omega)(\theta) = & \int_{\Gamma_m} (\theta \cdot n)(m(u) + Ae(u) : e(p) - f \cdot p) ds + \int_{\Gamma_m} (\theta \cdot n)(Hl(u) + \partial_n l(u)) ds \\ & - \int_{\Gamma_m \cap \Gamma_N} (\theta \cdot n)(Hp \cdot g + \partial_n(p \cdot g)) ds + \int_{S \cup \Gamma_c} (\theta \cdot n)(Hj(u, p, n) + \partial_n j(u, p, n)) ds \\ & + \int_{S \cup \Gamma_c} \frac{\partial j(u, p, n)}{\partial n} \cdot n'(\theta) ds, \end{aligned} \quad (8)$$

ou  $H$  est la courbure moyenne de  $\Gamma_m$  et  $p$  est la solution du problème adjoint suivant:

$$\int_{\Omega} Ae(p) : e(\psi) dx + \int_{\Omega} m'(u) \cdot \psi dx + \int_{\Gamma_m} l'(u) \cdot \psi ds + \int_{S \cup \Gamma_c} \frac{\partial j(u, p, n)}{\partial u} \cdot \psi ds = 0 \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega)^d. \quad (9)$$

Nous décrivons maintenant l'algorithme d'optimisation topologique. A partir d'une forme initiale  $\Omega_0$ , nous mettons en œuvre une approche de type descente de gradient pour générer une séquence de formes  $\{\Omega_k\}_{k=0, \dots}$  représenté par les lignes des niveaux  $\{\varphi_k\}_{k=0, \dots}$ . Chaque itération de l'algorithme consiste des étapes suivantes:

- Calcul de la solution  $u$  et de la solution du problème adjoint  $p$  sur  $\Omega^n$ . La solution  $u$  est calculée par la méthode de point fixe avec la formulation (2);
- Calcul de la direction de descente  $\nabla J_n$  à l'aide de la formule (8) et son régularisation,  $J_n$ ;
- Pour un pas de temps  $\delta t_n$  suffisamment petit (pour garantir la décroissance de la fonction cout), advection de la ligne de niveau le long de la direction de descente en resolvant le probleme de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial t} + J_n |\nabla \varphi_{n+1}| = 0$$

à partir de  $\varphi_n$  et re-distanciation de la ligne de niveau  $\varphi_{n+1}$ .

Nous appliquons les étapes décrites ci-dessous pour minimiser une combinaison linéaire de l'énergie de déformation élastique (ou *compliance*) et du volume:

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u(\Omega) ds + l \int_{\Omega} dx.$$

## 5 Resultats

Nous considérons le maillage non structuré d'un domaine carré unitaire, encastré sur le bord gauche, soumis au chargement  $g = (0, 10)$  sur une petite partie du bord droit et contenant une fissure (ou une interface d'auto-contact) de longueur 1/2 (voir Fig.(2)). Nous résolvons le problème de contact sans frottement pour les paramètres  $E = 20$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$  et  $\eta = 10^{-3}$ . La résolution numérique de l'équation d'advection sur le maillage non structuré est réalisée en utilisant la librairie `advect` [11].

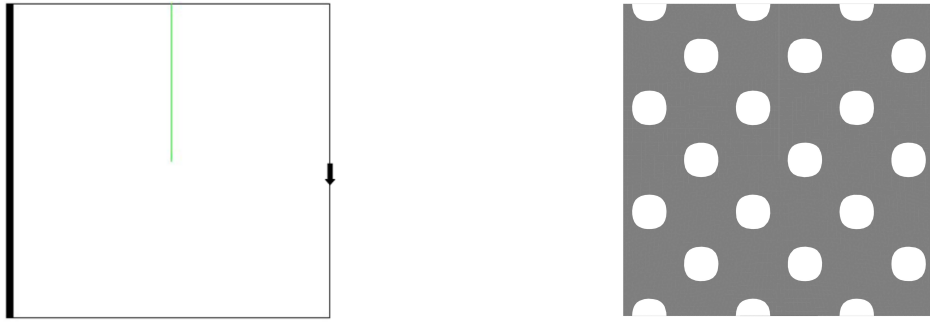


Figure 2: Géométrie étudiée avec conditions aux limites (gauche) et initialisation ( droite)



Figure 3: Forme optimisée avec l'approche "Ersatz" (gauche) et remillage conforme (droite)

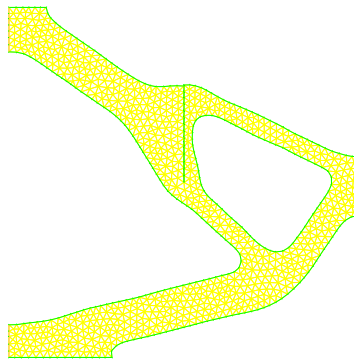


Figure 4: Maillage conforme de forme optimisée

Enfin, nous présentons un exemple en dimension 3. Considérons le maillage d'un domaine cubique unitaire encastré sur la partie droite de sa frontière, soumis à un chargement  $g$  sur une petite partie de la face de gauche, avec une fissure plane de dimension de  $1 \times 1/2$  issue de la face sommitale. Le chargement considéré est  $g = (0, 10, 0)$ . La forme initiale est représentée dans la Fig.(5). Nous remarquons que les topologies optimisées ainsi obtenues sur la Fig.(3) et (5) n'ont aucune discontinuité de surface à la frontière de l'interface.

## 6 Perspectives

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet TOP <sup>1</sup>. Un travail de modélisation de liaison mécanique est en cours en collaboration avec CMAP. Deux solides connectés par un vis seront modélisés, supposés être en contact mécanique. Une optimisation de la topologie sera également effectuée.

<sup>1</sup><https://www.irt-systemx.fr/project/top>

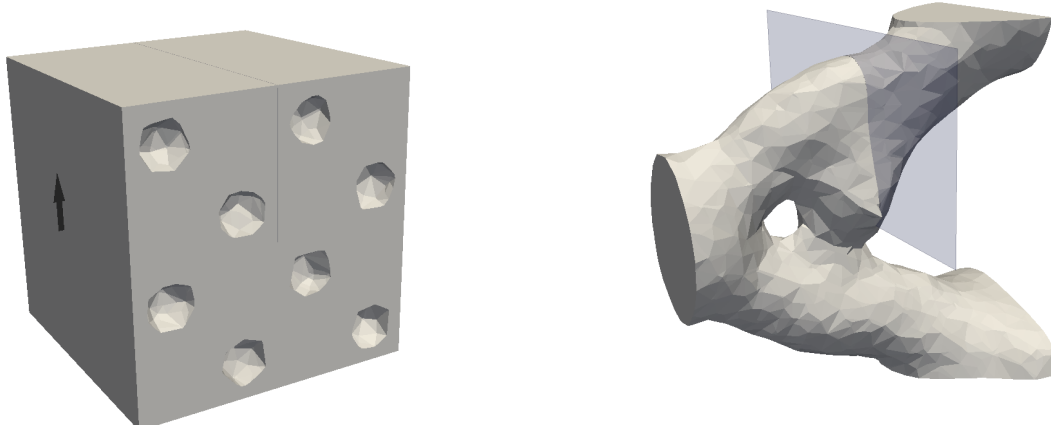


Figure 5: Initialization (à gauche) et forme optimisée (à droite)

## References

- [1] S. Osher and R. Fedkiw. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, volume 153. Springer Science & Business Media, 2006.
- [2] G. Allaire, F. Jouve, and A. Toader. A level-set method for shape optimization. *Comptes Rendus Mathématique*, 334(12):1125–1130, 2002.
- [3] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [4] C. Eck, J. Jarusek, and M. Krbec. *Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. CRC Press, 2005.
- [5] G. Allaire, C. Dapogny, and P. Frey. Shape optimization with a level set based mesh evolution method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 282:22–53, 2014.
- [6] C. Dapogny, C. Dobrzynski, and P. Frey. Three-dimensional adaptive domain remeshing, implicit domain meshing, and applications to free and moving boundary problems. *Journal of computational physics*, 262:358–378, 2014.
- [7] J. Nocedal and S. Wright. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag New York, 2006.
- [8] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes: une analyse géométrique*, volume 48. Springer Science & Business Media, 2006.
- [9] J. Cea. Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 20(3):371–402, 1986.
- [10] A. Maury, G. Allaire, and F. Jouve. Elasto-plastic shape optimization using the level set method. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 56(1):556–581, 2018.
- [11] C. Bui, C. Dapogny, and P. Frey. An accurate anisotropic adaptation method for solving the level set advection equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 70(7):899–922, 2012.