

# A spectral coarse space for a mixed domain decomposition method

P. Oumaziz<sup>1</sup>, K. Saavedra<sup>2</sup>, P. Gosselet<sup>3</sup>, N. Tardieu<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Núcleo Científico Multidisciplinario-DI, Universidad de Talca, camino Los Niches km1, Curicó, Chile

<sup>2</sup> Dpto. de Ing. y Gestión de la Construcción, Universidad de Talca, camino Los Niches km 1, Curicó, Chile

<sup>3</sup> LMT / ENS Cachan / CNRS / Université Paris-Saclay, 61 Av. du Pdt. Wilson, 94235 Cachan, France

<sup>4</sup> IMSIA, UMR 9219 EDF-CNRS-CEA-ENSTA, Saclay

**Résumé** — Nous proposons ici une construction spectrale de l'espace grossier d'une méthode de décomposition de domaine mixte non-intrusive. Ceci est l'adaptation naturelle des travaux de N.Spillane [9, 10] sur les méthodes de Schwarz, BDD et FETI. En particulier l'implémentation non-intrusive permet de se rapprocher des approches type Schwarz et définir aisément un problème aux valeurs propres généralisé afin de construire notre espace grossier. Nous montrons ici leur application dans un cadre mixte et non-intrusif. Cette nouvelle robustesse est illustrée sur des cas fortement hétérogènes et élancés.

**Mots clés** — Décomposition de domaine, problème aux valeurs propres généralisé, non intrusif, approche spectrale, méthode mixte

## 1 Introduction

La robustesse des méthodes de décomposition de domaine est une question essentielle en vue de leur utilisation dans les codes généralistes. La capacité à traiter efficacement des structures fortement hétérogènes, élancées ou encore avec des partitions non régulières conditionne pleinement leur utilisation dans un cadre industriel.

L'extensibilité des méthodes de décomposition de domaine est obtenue par l'utilisation d'un espace grossier. Le choix des modes présents dans cet espace est crucial.

Notre contribution se focalise sur la méthode Latin [3] qui en décomposition de domaine se rapproche fortement du Schwarz optimisé sans recouvrement avec la possibilité originale de prendre en compte simplement des conditions de contact aux interfaces [6]. [1, 4] proposent une approche à deux niveaux afin de rendre la méthode Latin extensible et robuste. Cette approche se focalise sur les comportements au niveau des interfaces et conduit à un problème grossier vérifiant l'équilibre des interfaces sur un nombre réduit de degrés de liberté. Il est suggéré dans [4] d'utiliser les modes rigides des interfaces ainsi que quelques modes de déformation simple comme des modes d'extension ou de cisaillement.

Pour des cas simples de structures relativement homogènes ces modes sont généralement pas tous nécessaire. Nous proposons donc d'appliquer les approches de type GenEO [9, 10] qui consistent en une approche spectrale afin de sélectionner automatiquement les modes les plus pertinent pour améliorer la convergence.

## 2 Méthode Latin pour la décomposition de domaine

### 2.1 Approche mono-échelle

Nous considérons une structure  $\Omega$  sous des hypothèses élastiques linéaires isotropes en petites déformations. Cette structure est décomposée en sous-domaines  $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq N}$  et sont définis au niveau des interfaces entre ces sous-domaines des champs de déplacement ainsi que des champs d'effort aux interfaces. Les notations sont discrètes et considérées comme étant globale. Ainsi  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{f}$  sont respectivement les champs de déplacement et d'effort. Le problème à résoudre est constitué des équations d'équilibre sur les sous-domaines ainsi que les équations de "recollement" aux interfaces afin d'assurer la continuité des déplacements et l'équilibre des efforts entre les sous-domaines. Cela conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{S}\mathbf{w} = \mathbf{f}_d + \mathbf{f} & \text{Équilibre des sous-domaines} \\ \mathbf{A}\mathbf{f} = 0 & \text{Équilibre des interfaces} \\ \mathbf{B}\mathbf{w} = 0 & \text{Continuité des déplacements} \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\mathbf{S}$  la condensation des opérateurs de rigidité des sous-domaines aux interfaces,  $\mathbf{f}_d$  représente les conditions limites condensées aux interfaces,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont respectivement les opérateurs de somme et différence entre 2 champs de chaque coté d'une interface (Figure 1).

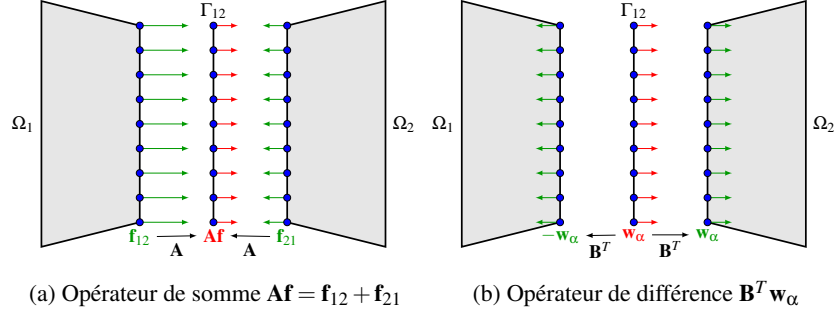


FIGURE 1 – Illustration de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}^T$

Nous allons finalement considérer le problème avec l'inconnue mixte  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{f} + \mathbf{k}\mathbf{w}$  et  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{k}\mathbf{w}$ , avec  $\mathbf{k}$  qui sera un paramètre de direction de recherche. En considérant désormais seulement  $\boldsymbol{\lambda}$  et  $\boldsymbol{\mu}$  le système devient :

$$\begin{cases} (\mathbf{S}\mathbf{k}^{-1} + \mathbb{I}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}_d + \boldsymbol{\mu} & \text{Équilibre des sous-domaines} \\ \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{L}\boldsymbol{\mu} = 0 & \text{Conditions d'interface} \end{cases} \quad (2)$$

avec  $\mathbf{L} = \mathbf{k}\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{k}\mathbf{A}^T) \mathbf{A}$ .

L'idée de la méthode Latin pour résoudre ce problème sous-structuré est de traiter séparément les équations du problème en cherchant successivement des solutions partielles à l'équilibre des sous-domaines puis aux relations d'interfaces. Nous avons alors un schéma itératif constitué de deux étapes :

Étape locale : connaissant un couple  $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$  nous cherchons un solution  $(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$  vérifiant les relations d'interface ainsi que l'équation de direction de recherche de l'étape locale :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\lambda}} - \mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\mu}} = 0 \\ \hat{\boldsymbol{\mu}} - 2\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\mu} - 2\boldsymbol{\lambda} \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{I} & -\mathbf{L} \\ -2 & \mathbb{I} \end{pmatrix}}_{H_+} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \\ \hat{\boldsymbol{\mu}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & \mathbb{I} \end{pmatrix}}_{k^+} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Étape linéaire : connaissant un couple  $(\hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$  nous cherchons un solution  $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$  vérifiant l'équilibre des sous-domaines ainsi qu'une deuxième équation de direction de recherche :

$$\begin{cases} (\mathbf{S}\mathbf{k}^{-1} + \mathbb{I}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}_d + \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu} = \hat{\boldsymbol{\mu}} \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{S}\mathbf{k}^{-1} + \mathbb{I} & -\mathbb{I} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}}_{H_-} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}}_{k^-} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \\ \hat{\boldsymbol{\mu}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Ainsi cette méthode peut se mettre sous la forme d'une équation matricielle de point fixe :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix}_{n+1} = M^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_d \\ 0 \end{pmatrix} + M^{-1}N \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix}_n \quad (5)$$

avec  $M = H_-$  et  $N = k^- H_+^{-1} k^+$

Il est possible de montrer que le spectre de l'opérateur  $M^{-1}N$  est bien inférieur à 1 assurant la convergence de l'algorithme.

## 2.2 Approche multi-échelle

La méthode présentée précédemment n'est pas extensible et il est nécessaire d'ajouter l'équivalent d'un problème grossier pour garantir cette indépendance à la sous-structuration. Cela consiste à ajouter à l'étape linéaire une nouvelle équation afin de vérifier globalement l'équilibre des interfaces. [4, 5] proposent de définir une base  $\mathbb{W}$  de modes grossiers d'interface par rapport à laquelle devra être vérifié l'équilibre des interfaces. En ajoutant alors  $\mathbb{W}^T \mathbf{A} \mathbf{f} = 0$  au système et en utilisant les variables  $\lambda$  et  $\mu$ , le système à l'étape linéaire devient :

$$\begin{cases} (\mathbf{S}\mathbf{k}^{-1} + \mathbb{I}) \lambda = \mathbf{f}_d + \mu \\ \mathbb{W}^T \mathbf{A} (\mu - \lambda) = 0 \\ \mu - \hat{\mu} + \mathbf{A}^T \mathbb{W} \gamma = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Avec  $\gamma$  un multiplicateur pour tenir compte de la nouvelle condition d'équilibre grossière au sein de la relation de direction de recherche. Cela conduit en particulier au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}\mathbf{k}^{-1} + \mathbb{I} & -\mathbb{I} \\ -\mathbf{P} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_d \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} - \mathbf{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\mu} \end{pmatrix} \quad (7)$$

avec  $\mathbf{P} = \mathbf{k}\mathbf{A}^T \mathbb{W} (\mathbb{W}^T \mathbf{A} \mathbf{k} \mathbf{A}^T \mathbb{W})^{-1} \mathbb{W}^T \mathbf{A}$  un projecteur macroscopique. La résolution de ce problème à deux échelles est détaillée dans [7].

## 2.3 Direction de recherche non-intrusive

Au cours de l'étape linéaire il s'avère que l'opérateur de rigidité des sous-domaines est directement modifié par les directions de recherche au niveau de degrés de liberté d'interface. Le problème à résoudre est finalement un problème avec des conditions de Robin sur les bords. Dans [6] est proposé un choix non-intrusif de ces conditions de Robin afin de faciliter l'implémentation dans des codes industriels. Cette condition de Robin qui se traduit par une rigidité d'interface est alors considérée comme la rigidité d'une couche d'éléments qui aurait été rajoutée aux bords des sous-domaines. La figure 2 illustre cette couche d'éléments rajoutée aux interfaces. Cette couche peut évoquer des méthodes de type Schwarz avec recouvrement [2] mais contrairement à ces dernières le déplacement sur le bord extérieur est imposé à zéro..

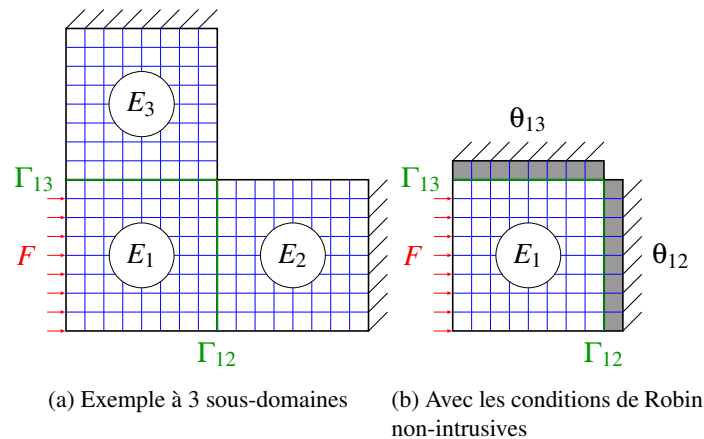


FIGURE 2 – Exemple de l'implémentation non-intrusive

## 3 Approche spectrale

L'approche spectrale est adaptée des travaux sur GenEO de Nicole Spillane à propos du Schwarz additif [10] et des méthodes sans recouvrement BDD/FETI [9]. L'objectif est d'étudier plus précisément le spectre de l'opérateur des itérés (équation 5) afin de déterminer les modes problématiques pour la convergence de l'algorithme. L'opérateur N ne dépend que des choix de paramètres de direction de

recherche. Sa norme est contrôlée et de fait très souvent égale à 1. Cela nous conduit à nous intéresser plus particulièrement au spectre de l'opérateur  $M$  correspondant aux résolutions sur les sous-domaines.

L'étude des valeurs propres de  $M$  conduit au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}\mathbf{k}^{-1} + \mathbb{I} & -\mathbb{I} \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Pour  $\alpha \neq 1$ ,  $\mu_1 = 0$  et on obtient finalement le problème généralisé aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{S}\mathbf{k}^{-1} + \mathbb{I}) \lambda_1 = \alpha \lambda_1 \Leftrightarrow \boxed{(\mathbf{S} + \mathbf{k}) \mathbf{w}_1 = \alpha \mathbf{k} \mathbf{w}_1} \quad (9)$$

**Remarques :** la valeur propre  $\alpha = 1$  est associée aux modes rigides des sous-domaines

Nous allons donc résoudre le problème généralisé aux valeurs propres ci-dessus afin d'extraire les vecteurs propres  $\mathbf{w}_1$  les plus pertinents pour constituer la base macroscopique  $\mathbb{W}$ . Cela correspond aux vecteurs propres ayant une valeur propre proche de 1.

Ces problèmes généralisés aux valeurs propres sont des résolutions locales sur chaque sous-domaine et sont donc effectués en parallèle. Contrairement à [5] les modes propres sont définis pour chaque sous-domaine sur l'ensemble de ses interfaces associées et non plus indépendamment interface par interface. La construction de l'opérateur grossier reste cependant similaire à [7]. Le changement majeur vient simplement de la construction automatique des modes grossiers les plus pertinents.

## 4 Résultats numériques

### 4.1 Présentation du problème

Nous pouvons illustrer l'impact de cette approche spectrale sur une structure 2D élancée hétérogène dont le motif de matériau présenté à la figure 3 est répété 16 fois pour obtenir un élancement final de 64. La structure est encadrée à sa gauche et un effort vertical est appliqué à sa partie droite pour la solliciter en flexion. Les caractéristiques matériaux sont précisées au tableau 1. Les hétérogénéités atteignent un rapport de  $10^5$ . Les paramètres de direction de recherche sont choisis automatiquement en se basant sur les boîtes englobantes des sous-domaines [8].

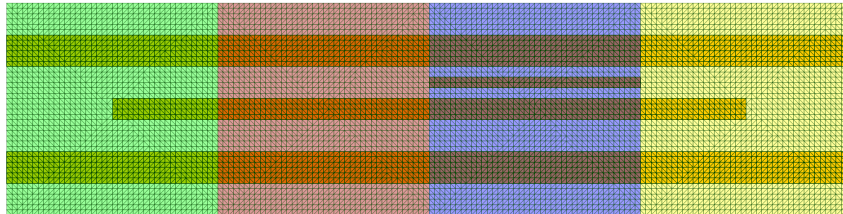


FIGURE 3 – Motif de matériau

TABLE 1 – Un exemple de tableau

	E (MPa)	$\nu$
Bandes centrales	200 000	0.49
Bandes extérieures	50000	0.3
Inclusion intermédiaire	2000	0.3
Reste de la structure	2	0.3

### 4.2 Analyse spectrale

Nous présentons ici les analyses spectrales avec comme exemple le troisième sous-domaine du motif présenté à la Figure 3. Le spectre est illustré à la Figure 4. Nous remarquons des premières valeurs

propres très proches de 1 suivies par un saut dans le spectre. Ne sont alors sélectionnées que les valeurs propres proches de 1. En particulier nous retrouvons trois valeurs propres égales à 1 associées aux modes rigides des sous-domaines. Les modes suivant illustrent des déformations internes aux sous-domaines qui dépendent des hétérogénéités. Les huit premiers modes associés au troisième sous-domaine de la figure 3 sont regroupés à la Figure 5. Ces modes propres concordent avec les résultats obtenus par N.Spillane [9].

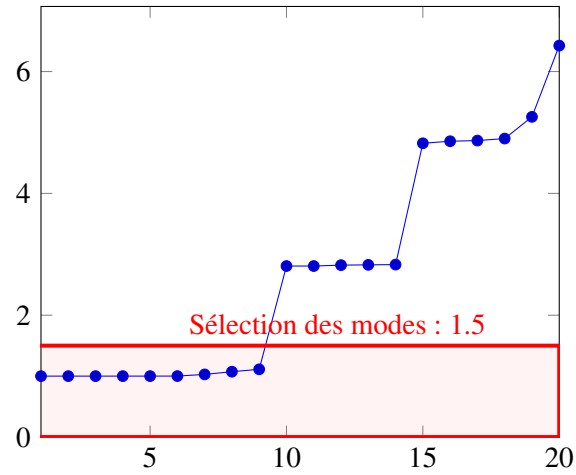


FIGURE 4 – Spectre du problème aux valeurs propres généralisé d'un sous-domaine

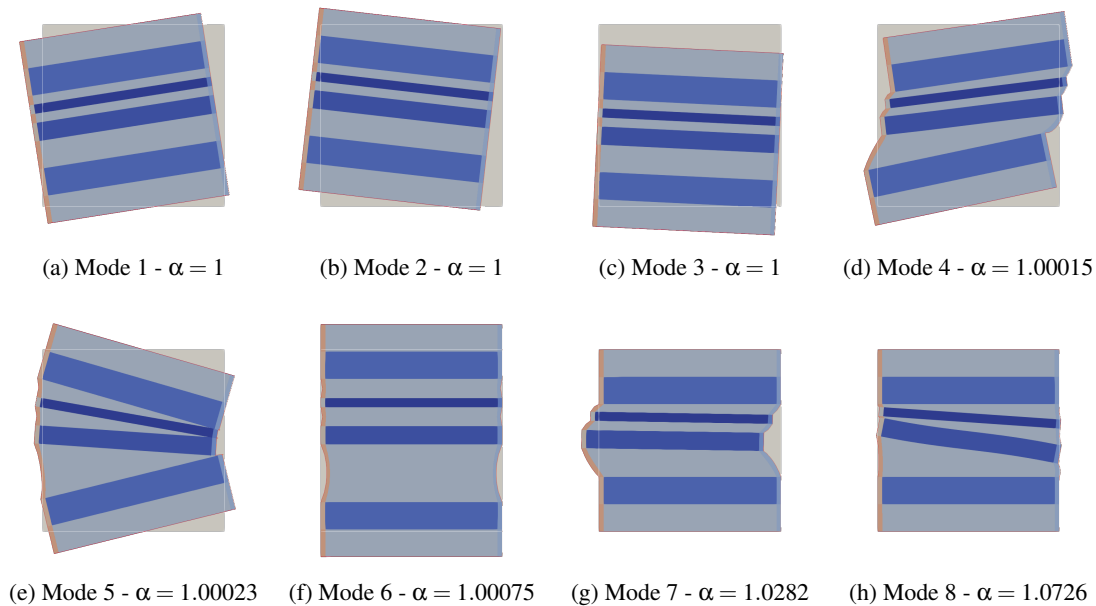


FIGURE 5 – Premiers modes propres du sous-domaine 3

### 4.3 Convergence

Après avoir sélectionné les modes nous comparons maintenant la convergence de la méthode Latin avec ces modes par rapport à la méthode Latin sans problème grossier et à la méthode Latin avec problème grossier et des modes grossiers standards. Nous notons à la Figure 6 l'amélioration de la convergence en utilisant les modes appropriés pour le problème grossier : 22 itérations avec GenEO contre 460 pour les modes classiques et 1370 pour le mono-échelle.

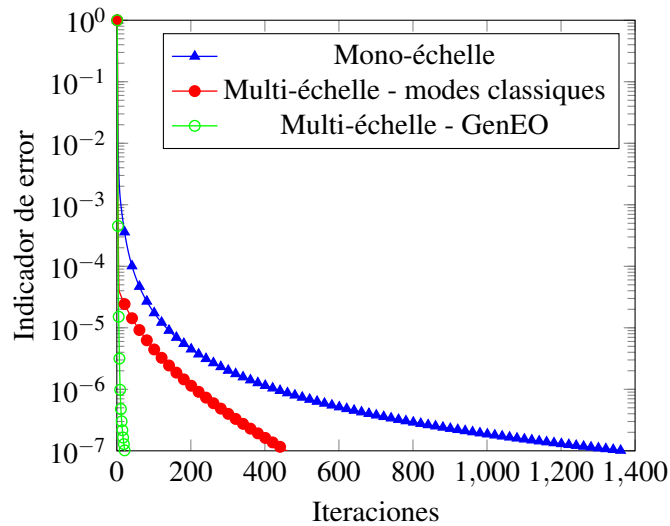


FIGURE 6 – Comparaison des convergences

## 5 Conclusion

Nous avons pu appliquer à une approche mixte l’approche spectrale de type GenEO afin d’enrichir automatiquement les bases grossières et ainsi améliorer la convergence de la méthode. Pour un cas fortement hétérogène et élancé nous pouvons noter l’apport considérable de la construction spectrale de la base grossière.

Nous profiterons de la présentation pour montrer d’autres exemples hétérogènes ainsi que des partition irrégulières. Des informations sur les temps de calculs seront présentées. De même que nous montrerons un cas non-linéaire de type frottement de Coulomb.

### 5.1 Remerciements

Nous remercions le projet ECOS-CONICYT C17E04 pour son soutien financier à la collaboration Universidad de Talca / LMT ainsi que le PIA PAMSIM pour le financement des travaux ayant permis les implémentations numériques.

### 5.2 Références bibliographiques

#### Références

- [1] D. Dureisseix, Une Approche Multi-échelles pour des Calculs de Structures sur Ordinateurs à Architecture Parallèle, Ph.D. thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1997.
- [2] Gander, M, Schwarz methods over the course of time. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 31(5) :228–255, 2008.
- [3] P. Ladevèze, Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation, Springer-Verlag, New-York, 1999.
- [4] P. Ladevèze, O. Loiseau, D. Dureisseix, A micro–macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52 (12), 121–138, 2001.
- [5] P. Ladevèze, A. Nouy, On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (28-30), 3061–3087, 2003.
- [6] P. Oumaziz, P. Gosselet, P.-A. Boucard, S. Guinard, A non-invasive implementation of a mixed domain decomposition method for frictional contact problems, *Computational Mechanics* 60 (5), 797–812, 2017.
- [7] P. Oumaziz, P. Gosselet, P. A. Boucard, M. Abbas, A parallel noninvasive multiscale strategy for a mixed domain decomposition method with frictional contact, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 115 (8), 893–912, 2018.
- [8] P. Oumaziz, P. Gosselet, P. A. Boucard, S. Guinard, A parallel non-invasive mixed domain decomposition - Implementation and applications to mechanical assemblies, *Finite Elements in Analysis & Design*, Accepted
- [9] N. Spillane, D. J. Rixen, Automatic spectral coarse spaces for robust FETI and BDD algorithms, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 95 (11), 953–990, 2013.

- [10] N. Spillane, V. Dolean, P. Hauret, F. Nataf, C. Pechstein, R. Scheichl, Abstract robust coarse spaces for systems of PDEs via generalized eigenproblems in the overlaps, *Numer. Math.* 126 (4), 741–770, 2014.