

# Développement d'une méthode efficace pour l'application du critère de Dang Van

F. Fauvin<sup>1</sup>, B. Agard,<sup>1,2</sup> J.-C. Roux<sup>1</sup>, P. Monnet<sup>2</sup>, E. Feulvarch<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univ Lyon, ENISE, LTDS, UMR 5513 CNRS, 58 rue Jean Parot, 42023 Saint-Etienne cedex 02, France, {francoise.fauvin, bastien.agard, jean-christophe.roux, eric.feulvarch}@enise.fr

<sup>2</sup> Haulotte Group, 27 rue d'Onzion, B.P. 9, 42152 L'Horme, France. pmonnet@haulotte.com

**Résumé** — Nous nous intéressons dans ce travail aux cas de chargements multiaxiaux de structures mécanosoudées et à leur tenue en fatigue. Dans ce contexte, les directions principales des contraintes peuvent évoluer fortement et nous avons choisi de travailler sur la mise en place du critère de Dang Van. Il demande le calcul du centre d'une hypersphère minimale englobante pour la détermination de l'amplitude maximale de cisaillement sur un grand nombre de points de mesures. Les nouvelles approches numériques envisagées pour traiter ces problèmes nécessitent ainsi la détermination de méthodes de calcul rapides et efficaces.

**Mots clés** — Fatigue, chargements multiaxiaux, hypersphère minimale englobante.

## 1 Introduction

Dans le contexte de structures mécanosoudées soumises à des chargements cycliques et multiaxiaux, nous nous intéressons à leur tenue en fatigue et à la prédiction de leur limite d'endurance.

Les critères multiaxiaux sont adaptés dans le cas d'un chargement multiaxial et plusieurs auteurs ont proposé de tels critères [1, 2] :

- énergétique,
- empirique,
- global,
- de type « plan critique »

Pour le calcul de la tenue en fatigue, la sollicitation périodique d'une structure peut conduire à différents états :

- L'adaptation : le comportement cyclique en tout point est alors élastique.
- L'accommodation : le comportement cyclique en chaque point se stabilise alors sur un cycle élastoplastique qui se répète au cours des cycles suivants. L'analyse en fatigue relève alors de la fatigue oligocyclique.
- Le rochet : il apparaît alors une déformation plastique progressive qui s'incrémente cycle après cycle. Ce phénomène est lié au comportement du matériau combiné à certains types de chargement.

Les deux derniers cas peuvent conduire à la ruine de la structure.

On s'intéresse ici au cas de l'adaptation de la structure et de la conservation de son comportement élastique. L'objectif est une analyse en fatigue lorsque la structure est soumise à un chargement périodique, pouvant induire une évolution significative des directions principales des contraintes. Par conséquent, il est difficile voire impossible de travailler dans le plan du déviateur qui est lié à ces directions. L'amorçage d'une fissure de fatigue est gouverné par des paramètres locaux à l'échelle du grain. Le choix du critère de Dang Van [3] est ainsi particulièrement adapté car il utilise dans son principe le fait que la contrainte mésoscopique dans un grain doit satisfaire en chaque instant le critère de plasticité [2].

Le critère à l'échelle mésoscopique s'énonce ainsi :

$$\tau(t) + \alpha \sigma_H(t) \leq \beta \quad \text{pour tout instant } t \in T \quad (1)$$

où  $\tau(t)$  est la cission instantanée ;  $\sigma_H(t)$  est la pression hydrostatique ;  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes du matériau.

Le problème est alors de calculer les contraintes mésoscopiques à partir des contraintes macroscopiques. Ceci nécessite la décomposition du tenseur des contraintes en parties hydrostatique et déviatorique, ainsi que le calcul du centre d'une hypersphère minimale englobante pour le changement d'échelle [3]. Ces calculs s'appliquent à un grand nombre de points, en dimensions élevées, et doivent être réalisés sur un grand nombre de cycles.

Certaines méthodes développées dans la littérature conduisent parfois à des calculs coûteux en temps, avec des approximations et des convergences non assurées. D'autres méthodes de type *plan critique* sont efficaces mais procèdent en dimension 2 et non pas directement dans l'espace des tenseurs [2, 5].

L'objectif est donc de construire un modèle mathématique et physique débouchant sur une méthodologie de calcul destinée à l'ingénierie, efficace et rapide en temps.

## 2 Mise en œuvre

Sur une structure, des séries de mesures sont réalisées au cours du temps (échelle macroscopique), avec pour résultats des tenseurs symétriques d'ordre 2. En considérant la représentation matricielle de ces tenseurs et la propriété de symétrie, cela revient à prendre en compte cette distribution temporelle de tenseurs comme un nuage de points en dimension 6 (*i.e.* correspondant aux 6 composantes définissant le tenseur symétrique).

### 2.1 Décomposition du tenseur des contraintes

L'application du critère de Dang Van demande de calculer le cisaillement en fonction de la contrainte moyenne (pression hydrostatique) et donc la décomposition du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}$  en parties :

$$\begin{aligned} \text{sphérique : } \underline{\underline{\Sigma}}_H(t) &= \sigma_H(t) \underline{\underline{I}} & \text{où } \sigma_H(t) &= \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\underline{\Sigma}}(t)) \text{ est la contrainte hydrostatique} \\ \text{déviatorique : } \underline{\underline{S}}(t) &= \underline{\underline{\Sigma}}(t) - \underline{\underline{\Sigma}}_H(t) \end{aligned}$$

Remarquons enfin que ce tenseur symétrique est de trace nulle, ce qui permet d'effectuer la suite des calculs en dimension 5.

### 2.2 Calcul de l'hypersphère minimale englobante

La suite de la mise en œuvre du critère consiste à évaluer les contraintes locales  $\underline{\underline{\sigma}}(t)$  dans l'état stabilisé en fonction des contraintes macroscopiques  $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ . L'une des méthodes consiste à déterminer le déviateur stabilisé  $\underline{\underline{C}}^*$  réalisant :

$$\underline{\underline{C}}^* = \min_{\underline{\underline{C}}} \left[ \max_{t \in T} J_2 (S_{ij}(t) - C_{ij}(t)) \right] \quad (2)$$

où  $J_2 = \sqrt{\frac{3}{2}(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{C}})}$  :  $(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{C}})$  désigne le deuxième invariant.

Une interprétation géométrique de (2) revient à considérer  $\underline{\underline{C}}^*$  comme le centre de l'hypersphère englobante de rayon minimum dans l'espace  $\mathcal{D}$  des déviateurs des contraintes. D'autre part,  $J_2$  représente une norme induite par un produit scalaire et permet donc de définir une métrique associée dans l'espace  $\mathcal{D}$  avec laquelle nous allons travailler pour le calcul de l'hypersphère [4].

La détermination du centre  $\underline{\underline{C}}^*$  permet de calculer à partir du déviateur  $\underline{\underline{S}}(t)$  le déviateur des contraintes locales stabilisées :

$$\underline{\underline{\hat{S}}}(t) = \underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{C}}^*$$

### 2.3 Plan de critère

Les calculs précédents permettent d'obtenir la cission mésoscopique dans l'état stabilisé  $\tau(t)$  du critère de Dang Van (1) au moyen de la norme de Tresca ou de von Mises appliquée à  $\underline{\underline{\hat{S}}}(t)$ .

Sachant que les contraintes hydrostatiques macroscopique et mésoscopique sont égales, on peut représenter  $\tau(t)$  en fonction de  $\sigma_H(t)$  dans le plan du critère de Dang Van.

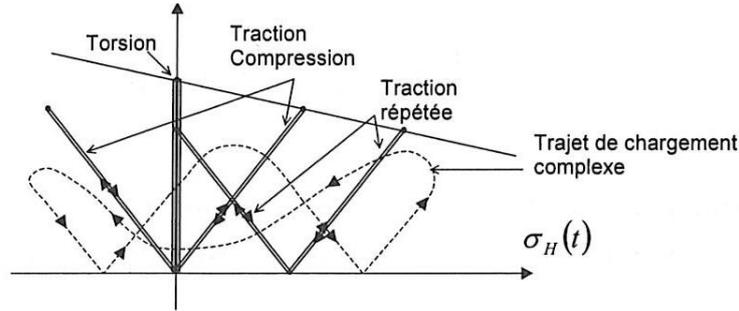


FIGURE 1 – Plan du critère de Dang Van [2].

### 3 Applications

Nous présentons ici l'application de la méthode à deux cas de calcul.

#### 3.1 Exemple de tension pure

Afin d'illustrer la méthode exposée ci-dessus, considérons le cas d'un chargement de traction-compression cyclique. En un point quelconque  $O$  de la surface de l'échantillon soumis à ce chargement, l'état de contrainte est exprimé par le tenseur à l'échelle macroscopique :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $\Sigma_{11}(t) = \sigma_{max} \cos(\omega t)$

Ce tenseur des contraintes peut être décomposé en une partie déviatorique et une partie sphérique :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \underline{\underline{S}}(t) + \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\underline{\Sigma}}(t)) \underline{\underline{I}}$$

La contrainte hydrostatique (aux échelles macro et mésoscopique) est définie par

$$\sigma_H(t) = \frac{1}{3} \Sigma_{11}(t) = \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\underline{\Sigma}}(t))$$

Dans le cas présent, le calcul donne :

$$\sigma_H(t) = \frac{1}{3} (\sigma_{max} \cos(\omega t))$$

et le déviateur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{S}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) - \sigma_H(t) \underline{\underline{I}}$$

Nous obtenons finalement :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \Sigma_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \Sigma_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \Sigma_{11}(t) \end{bmatrix}$$

Dans l'espace des déviateurs des contraintes, le déviateur est représenté à chaque instant par le vecteur

$$\left[ \frac{2}{3} \Sigma_{11}(t) \quad -\frac{1}{3} \Sigma_{11}(t) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

Le centre de l'hypersphère minimale englobante est dans ce cas précis l'origine du repère. On en déduit :

— le déviateur des contraintes locales stabilisées :

$$\underline{\hat{S}}(t) = \underline{S}(t)$$

— la cission mésoscopique dans l'état de contraintes stabilisé, au moyen de la norme  $J_2$  par exemple :

$$\tau(t) = \sqrt{\frac{3}{2} \text{trace}(\underline{S}(t) : \underline{S}(t))} = \sigma_{max} |\cos(\omega t)|$$

La figure 2 représente les trajets de chargement dans le plan  $(\sigma_H, \tau)$  pour ce type de sollicitation en tension pure. Les calculs sont effectués avec  $\alpha = 0,3$ ,  $\beta = 145$ ,  $\sigma_{max} = 200$

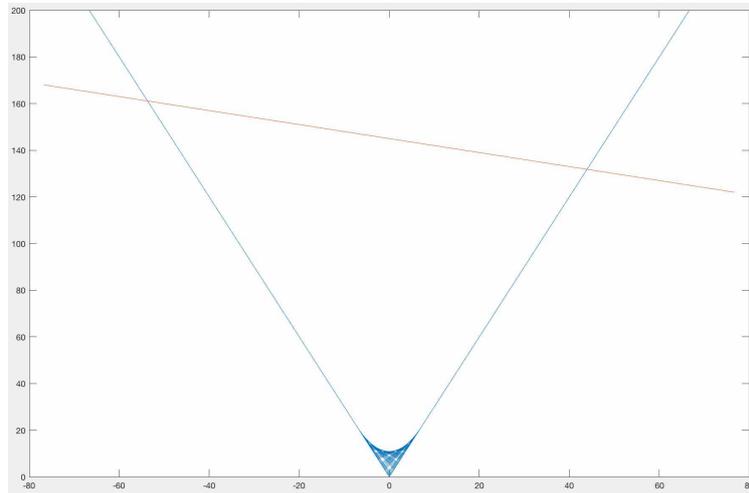


FIGURE 2 – Trajet des chargements calculés et droite de Dang Van.

### 3.2 Contraintes issues de mesures expérimentales

Des données expérimentales ont été obtenues à partir de mesures réalisées sur un élément de structure mécano-soudée soumise à des chargements cycliques. La figure 3 représente les résultats obtenus avec  $\alpha = 0,3$  et  $\beta = 115$  pour la droite de Dang Van.

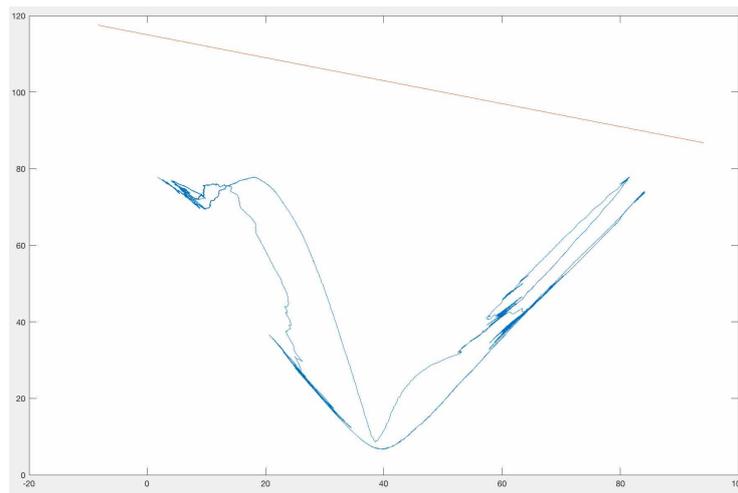


FIGURE 3 – Trajet des chargements calculés et droite de Dang Van.

## 4 Conclusion

Le calcul de la plus petite hypersphère circonscrite à un ensemble de déviateurs représentés dans un sous-espace vectoriel de dimension 5 est couramment appliqué dans les critères de fatigue multiaxiale.

La méthode présentée ici propose un calcul peu coûteux en temps et très robuste, permettant ainsi de mettre en œuvre le critère de Dang Van de manière efficace. Les premiers résultats numériques s'avèrent prometteurs et ont été appliqués avec succès sur des chargements multiaxiaux provenant de cas industriels réels. Les résultats relatifs à une analyse plus complète de cette approche (efficacité, comparaisons avec d'autres méthodes, ...) feront l'objet de travaux futurs.

## Références

- [1] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, A. Benallal, R. Desmorat. *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 2009.
- [2] G. Hénaff & F. Morel. *Fatigue des structures*, Ellipse, 2005.
- [3] K. Dang Van, B. Griveau and O. Message. *On a new multiaxial fatigue limit criterion : theory and application.*, Proc. of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Biaxial and Multiaxial Fatigue, Sheffield, England, 479-496, 1989.
- [4] F. Fauvin, B. Agard, J.-C. Roux, E. Feulvarch. *Calcul efficace d'hypersphère englobante minimale*, Communication interne, 2018.
- [5] A. Bernasconi, I.V. Papadopoulos. *Efficiency of algorithms for shear stress amplitude calculation in critical plane class fatigue criteria*, Computational Materials Science, 34, 355-368, 2005.