

## Usure du contact aube-disque sous chargement dynamique vibratoire

E. Lemoine<sup>1,2,3</sup>, F. Thouverez<sup>1</sup>, D. Nélias<sup>2</sup>, C. Vincent<sup>3</sup>

<sup>1</sup> École Centrale de Lyon, CNRS UMR5513, LTDS, F-69134 Écully Cedex, France, {etienne.lemoine,fabrice.thouverez}@ec-lyon.fr

<sup>2</sup> Univ Lyon, INSA-Lyon, CNRS UMR5259, LaMCoS, F-69621, France, daniel.nelias@insa-lyon.fr

<sup>3</sup> Safran Aircraft Engines, RPT René Ravaud - Réau, 77550 Moissy-Cramayel, France

**Résumé** — La maîtrise des phénomènes physiques mis en jeu dans les turboréacteurs est un enjeu majeur pour les motoristes aéronautiques. Le contact avec frottement sec dans les ensembles aube-disque permet d'atténuer la réponse vibratoire de la structure. De plus, l'usure de la surface de contact engendre une diminution supplémentaire de l'amplitude vibratoire. En combinant une méthode d'équilibrage harmonique, permettant de déterminer la réponse dynamique, et une méthode semi-analytique de simulation du contact, il est alors possible de connaître la réponse vibratoire de la structure usée avec précision.

**Mots clés** — Réponse forcée non linéaire, Méthode d'équilibrage harmonique, Méthode semi-analytique

## 1 Introduction

Pour répondre aux exigences actuelles du marché aéronautique, les motoristes doivent concevoir des moteurs de plus en plus légers, moins consommateurs en carburant, moins bruyants, moins polluants et plus sûrs. Ces enjeux conduisent à une conception plus complexe, exigeant la maîtrise des phénomènes physiques mis en jeu dans les turboréacteurs. Dans ce cadre, la prédiction précise des niveaux vibratoires est un enjeu majeur. Le contact avec frottement sec dans les ensembles aube-disque permet une diminution conséquente des amplitudes de vibration. De plus, la géométrie usée par le frottement au niveau de la surface de contact présente une réponse vibratoire amortie par rapport à une géométrie non-usée. Il est alors important pour les motoristes de pouvoir simuler l'ensemble de ces phénomènes afin de connaître la réponse forcée des ensembles aube-disque en présence de contact et d'usure aux portées. Enfin, connaître l'usure des pièces peut permettre de statuer plus précisément sur leur durée de vie.

Le frottement sec dans les interfaces de contact engendre de fortes non-linéarités. Ainsi, différentes méthodes de simulation numérique ont été développées pour résoudre les équations dynamiques non-linéaires des systèmes. Dans le cadre de l'étude de la réponse dynamique stabilisée d'une structure soumise à une excitation forcée périodique, il est possible d'utiliser la méthode d'équilibrage harmonique (Harmonic Balance Method - HBM). Cependant, les efforts de contact n'ayant pas d'expression dans le domaine fréquentiel, il est nécessaire d'utiliser une méthode d'alternance fréquence temps (AFT) [1] donnant une expression temporelle de l'effort de contact. Différentes méthodes d'estimation des efforts de contact ont été étudiées, comme l'utilisation d'éléments avec pénalité [2]. Dans notre cas, la méthode des lagrangiens dynamiques (Dynamic Lagrangian Frequency Time - DLFT) développée par Nacivet [3] a été utilisée, permettant d'imposer le respect des lois de Coulomb, de contact unilatéral et de non-interpénétration.

La méthode HBM ne permet cependant pas de discrétiser très finement l'interface de contact, cela pouvant engendrer des calculs de taille élevée et donc des temps de calcul prohibitifs. Ainsi, pour étudier l'état de contact avec précision et pouvoir déterminer l'usure due au glissement au niveau de l'interface, une démarche analogue à [4] a été utilisée. L'état de contact à la résonance est alors extrait du calcul HBM et utilisé comme donnée d'entrée d'un calcul semi-analytique (Semi-Analytical Method - SAM) de simulation du contact [5]. Cette méthode permet l'utilisation d'un maillage raffiné au niveau de l'interface de contact, tout en gardant des temps de calcul rapides. L'usure de la surface de contact est déterminé via l'utilisation d'une loi d'usure locale formulée en énergie [6].

La géométrie usée calculée précédemment peut alors être utilisée pour un nouveau calcul de réponse forcée, la profondeur d'usure étant implémentée comme un jeu dans le contact dans la formulation de la DLFT [7]. De cette manière, il est possible de déterminer l'impact du frottement et de l'usure sur la

réponse forcée de la structure, et d'en déterminer l'amortissement engendré par ces deux phénomènes.

## 2 Modèle étudié

Pour cette étude, un modèle aube-disque topologique a été utilisé, permettant de représenter les propriétés mécaniques d'un modèle aube-disque industriel. Ce modèle est composé de 24 aubes reliées au disque par un contact en queue d'aronde, cf. Figure 1a. L'utilisation des propriétés de symétrie cyclique permet de réduire le modèle de 24 secteurs à un secteur. La Figure 1b représente le maillage et les conditions limites du secteur étudié. L'alésage du disque est fixé et le système est soumis à une vitesse de rotation  $\omega_z$ . La rotation engendre une précharge centrifuge du système.

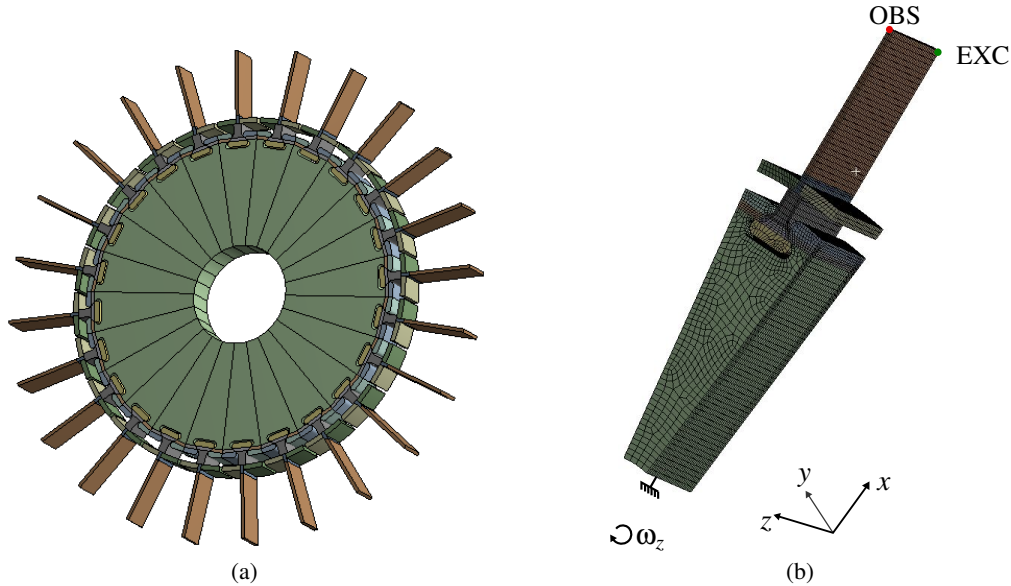


FIGURE 1 – Modèle étudié. (a) complet et (b) secteur.

Afin de réduire la taille du système, une synthèse modale à interfaces fixes de Craig-Bampton [8] est appliquée. Les degrés de liberté retenus sont alors les degrés de liberté de contact, d'excitation (noté EXC Figure 1b) et d'observation (noté OBS), nécessaires au calcul de réponse forcée à suivre. Les matrices structurales du système préchargé après réduction de Craig-Bampton sont extraites d'un logiciel éléments finis commercial pour être utilisées dans la suite des calculs. Le modèle éléments finis complet avant réduction est constitué de 116250 degrés de liberté et le modèle réduit de 629 degrés de liberté, tout en gardant une erreur sur la fréquence du premier mode de flexion (mode étudié par la suite) inférieure à 0,3%.

## 3 Réponse forcée non linéaire

Le système est composé de deux solides  $l$  dont les équations du mouvement sont les suivantes :

$$\mathbf{M}^l \ddot{\mathbf{X}}^l + \mathbf{C}^l \dot{\mathbf{X}}^l + \mathbf{K}^l \mathbf{X}^l + \mathbf{F}_c^l = \mathbf{F}_{ex}^l, \quad l = 1, 2. \quad (1)$$

avec  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement déterminée avec un amortissement modal et  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur préchargée, incluant l'assouplissement centrifuge et le raidissement géométrique dû au centrifuge. Les vecteurs  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{F}_c$  et  $\mathbf{F}_{ex}$  correspondent respectivement aux déplacements, aux efforts de contact (non-linéaires) et aux efforts d'excitation.

### 3.1 Méthode de l'équilibrage harmonique

Dans le cadre d'un système soumis à une excitation périodique, il est possible d'utiliser la méthode de l'équilibrage harmonique, recherchant une solution sous forme périodique. La méthode HBM consiste à utiliser une procédure de Galerkin, c'est-à-dire à projeter les équations du mouvement dans la base des

fonctions trigonométriques. Cette opération permet de réexprimer les équations du mouvement comme un système algébrique dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{Z}^l \tilde{\mathbf{X}}^l + \tilde{\mathbf{F}}_c^l = \tilde{\mathbf{F}}_{ex}^l, \quad (2)$$

où  $\tilde{\mathbf{X}}^l$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_c^l$  et  $\tilde{\mathbf{F}}_{ex}^l$  sont les vecteurs multiharmoniques respectivement des déplacements, des efforts de contact et des efforts extérieurs tel que :

$$\tilde{\mathbf{X}}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0(\mathbf{X}^l) \\ \mathbf{a}_1(\mathbf{X}^l) \\ \mathbf{b}_1(\mathbf{X}^l) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_h}(\mathbf{X}^l) \\ \mathbf{b}_{N_h}(\mathbf{X}^l) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_c^l = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0(\mathbf{F}_c^l) \\ \mathbf{a}_1(\mathbf{F}_c^l) \\ \mathbf{b}_1(\mathbf{F}_c^l) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_h}(\mathbf{F}_c^l) \\ \mathbf{b}_{N_h}(\mathbf{F}_c^l) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_{ex}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0(\mathbf{F}_{ex}^l) \\ \mathbf{a}_1(\mathbf{F}_{ex}^l) \\ \mathbf{b}_1(\mathbf{F}_{ex}^l) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{N_h}(\mathbf{F}_{ex}^l) \\ \mathbf{b}_{N_h}(\mathbf{F}_{ex}^l) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

et  $\mathbf{Z}^l$  est la matrice de raideur dynamique diagonale par blocs, définie par :

$$\mathbf{Z}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_1^l & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{Z}_{N_h}^l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_k^l = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^l - (k\omega)^2 \mathbf{M}^l & k\omega \mathbf{C}^l \\ -k\omega \mathbf{C}^l & \mathbf{K}^l - (k\omega)^2 \mathbf{M}^l \end{bmatrix}, \quad k = 1..N_h. \quad (4)$$

Suite à cette transformation les nouvelles inconnues sont les coefficients de Fourier correspondant aux déplacements  $\tilde{\mathbf{X}}^l = [\mathbf{a}_0(\mathbf{X}^l), \mathbf{a}_1(\mathbf{X}^l), \mathbf{b}_1(\mathbf{X}^l), \dots, \mathbf{a}_{N_h}(\mathbf{X}^l), \mathbf{b}_{N_h}(\mathbf{X}^l)]^T$ , où  $N_h$  est le nombre d'harmoniques fréquentielles considérées. Afin de réduire une nouvelle fois la taille du système, celui-ci est réexprimé et les degrés de liberté non-linéaires (i.e. les ddl de contact) uniquement sont gardés. Une seconde réduction en déplacements relatifs permet de réduire encore par deux la taille du système. Ces deux réductions sont détaillées par [3]. Ainsi, les deux solides sont regroupés dans la même équation :

$$\mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{X}}_r + \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \tilde{\mathbf{F}}_r, \quad (5)$$

où  $\mathbf{Z}_r$  est la matrice de raideur dynamique réduite,  $\tilde{\mathbf{X}}_r$  le vecteur des déplacements relatifs,  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  le vecteur des efforts de contact et  $\tilde{\mathbf{F}}_r$  le vecteur des efforts d'excitation réduit. La résolution de l'équation (5) revient donc à minimiser la fonction  $f$  suivante à l'aide d'un algorithme de résolution non-linéaire :

$$f(\tilde{\mathbf{X}}_r) = \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{X}}_r + \tilde{\boldsymbol{\lambda}} - \tilde{\mathbf{F}}_r. \quad (6)$$

### 3.2 Non-linéarité de contact

Pour résoudre le système algébrique précédent, il est nécessaire d'estimer les efforts de contact. Cependant, comme ils n'ont pas d'expression dans le domaine fréquentiel, une procédure d'alternance fréquence-temps (AFT) [1] est utilisée. Le principe est de repasser dans le domaine temporel à l'aide d'une transformée de Fourier discrète, puis d'estimer les efforts en temporel, pour les repasser ensuite dans le domaine fréquentiel. La procédure utilisée dans notre cas est la DLFT. Pour ce faire un vecteur inconnu  $\tilde{\mathbf{Y}}_r$  est ajouté. Lorsque la convergence est atteinte, ce terme vérifie :  $\tilde{\mathbf{Y}}_r = \tilde{\mathbf{X}}_r$ . Nacivet [3] propose alors de définir  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  comme étant des Lagrangiens dynamiques, utilisant une pénalisation  $\varepsilon$  des équations du mouvement dans le domaine fréquentiel tel que :

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \tilde{\mathbf{F}}_r - \mathbf{Z}_r \tilde{\mathbf{X}}_r + \varepsilon (\tilde{\mathbf{X}}_r - \tilde{\mathbf{Y}}_r), \quad (7)$$

L'effort de contact  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  est alors calculé dans le domaine temporel grâce à l'équation (7) et à une procédure de prédiction/correction forçant la validation des lois de contact unilatéral et de frottement. Plus de détails sur cette méthode sont donnés dans [3].

### 3.3 Comportement dynamique du système

L'utilisation de la méthode HBM couplée à la DLFT sur le modèle topologique présenté précédemment permet d'obtenir la réponse dynamique du système. La Figure 2 représente la réponse forcée du système pour différents coefficients de frottement  $\mu$ . La courbe bleue en trait discontinu (nommée collé sur la Figure 2) correspond à la réponse forcée du système sans frottement, c'est à dire avec des interfaces de contact collées. Nous observons que les réponses forcées avec frottement sont plus faibles que la réponse forcée avec interfaces collées. Cela correspond aux résultats attendus, puisque le frottement permet de dissiper de l'énergie, et donc d'atténuer la réponse forcée du système. De plus, plus le coefficient de frottement diminue, plus l'amplitude de vibration est faible. En effet, un coefficient de frottement plus faible va faciliter le glissement et donc augmenter l'énergie dissipée par frottement, ce qui a pour effet de diminuer la réponse forcée. Les résultats suivants sont donnés pour un coefficient de frottement  $\mu = 0.4$ .

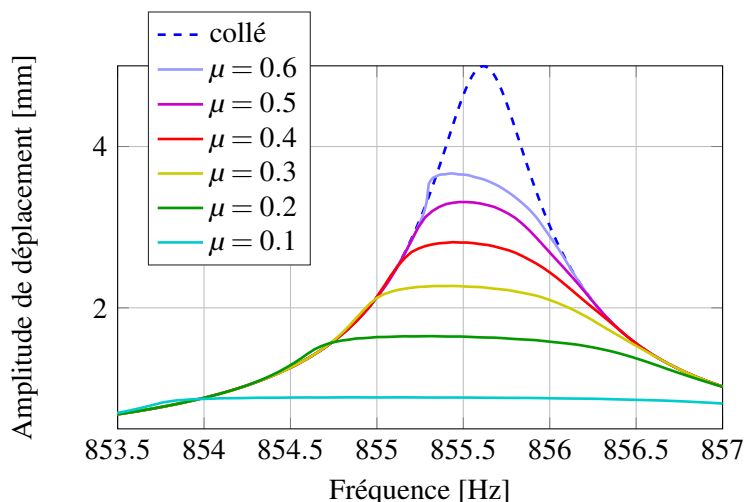


FIGURE 2 – Influence du coefficient de frottement  $\mu$  sur la réponse forcée du système.

De plus, il est possible de récupérer les efforts de contact estimés par la DLFT afin d'en vérifier la validité. La Figure 4a représente l'effort tangentiel  $T$  et l'effort normal multiplié par le coefficient de frottement  $\mu N$ . Les glissements calculés grâce aux déplacements relatifs sont tracés sur la Figure 4b. Ces deux figures sont étudiées à la fréquence de résonance, à l'instant où les efforts sont les plus importants, pour les nœuds en milieu de portée de l'aube (nœuds en bleu sur la Figure 3). Les efforts tangentiels sont égaux aux efforts normaux multipliés par le coefficient de frottement au centre de la portée ( $T = \mu N$ ), ce qui correspond aux nœuds en glissement sur la Figure 4b. Ainsi, le comportement glissant au centre de la portée à cet instant de la période de vibration est bien validé par les efforts, la loi de Coulomb étant respectée. De plus, les efforts présentent de légers effets de bord, c'est à dire que l'effort est plus élevé en bord de portée. Cet effet valide le comportement général, puisque les effets de bord sont caractéristiques d'un contact poinçon-plan, dans lequel nous nous trouvons. Cependant, ces effets sont assez faibles car le maillage utilisé pour ce modèle est très grossier.

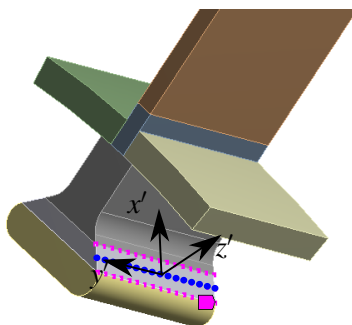


FIGURE 3 – Représentation des nœuds de contact étudiés sur l'aube, et du repère local  $(x', y', z')$  normal à la portée.

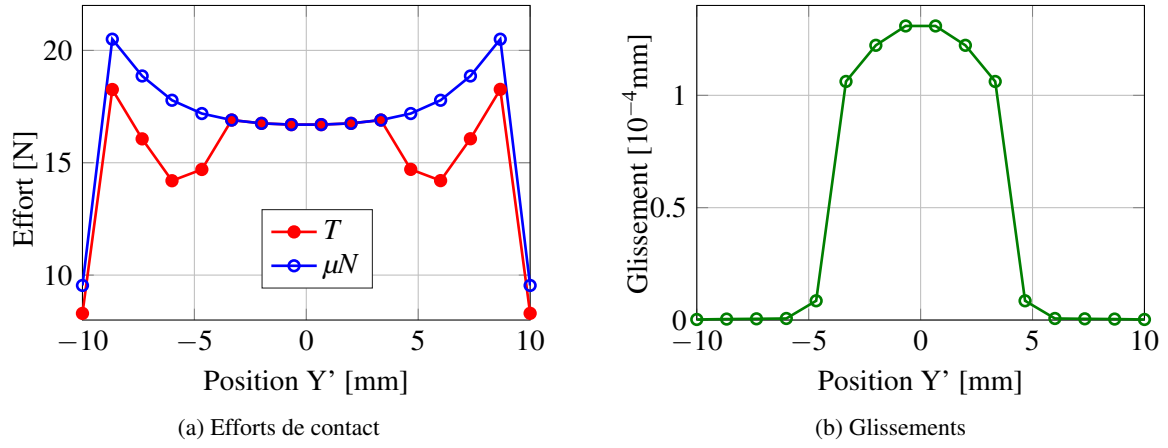


FIGURE 4 – Etude du comportement d'une interface de contact de l'aube.

Une étude de convergence du maillage a permis de valider la discrétisation pour l'étude de la réponse forcée. Cependant, les résultats précédents montrent que le maillage est trop grossier pour avoir une bonne description des phénomènes de contact, et notamment des efforts et du glissement. Ainsi, pour avoir une estimation précise de l'usure sur les surfaces de contact, il est nécessaire de discrétiser les portées plus finement.

## 4 Prise en compte de l'usure

Afin d'éviter d'utiliser un maillage trop fin dans le calcul dynamique, qui engendrerait des temps de calcul prohibitifs, une méthode semi-analytique d'étude du contact a été utilisée à la résonance. En effet, cette méthode permet d'utiliser un maillage fin nécessaire pour déterminer l'usure des surfaces précisément, tout en gardant des temps de calcul rapides.

### 4.1 Méthode semi-analytique de résolution du problème de contact

La méthode semi-analytique de simulation du contact consiste à utiliser des solutions analytiques connues pour déterminer les contraintes et les déplacements sur la zone de contact. Ces solutions sont extraites des fonctions de Green et représentent la contribution des pressions  $p$ , appliquées sur une surface rectangulaire, sur les déplacements élastiques en surface  $\bar{u}_J^p$  d'un espace élastique semi-infini dans la direction  $J$  tel que :

$$\frac{\bar{u}_J^p}{p} = K_J^p(x, y) \quad (8)$$

Ainsi, en discrétisant les deux solides et en considérant que le comportement au niveau du contact n'influence pas la réponse structurale éloignée du contact, il est possible d'utiliser ces coefficients pour étudier le contact entre deux solides. Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire il est possible de superposer les solutions de chaque élément discret. En discrétisant les interfaces de contact, les déplacements au point de coordonnées  $(i, j)$ , et donc de toute la surface de contact, dus à un chargement sur cette surface, peuvent être déterminés en sommant les différentes contributions :

$$\bar{u}_z^p(i, j) = \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} p(l, m) \underline{K}_z^p(i-l, j-m) \quad (9)$$

L'équation 9 correspond à un produit de convolution. En passant ce produit dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une transformée de Fourier spatiale 2D, il devient un produit classique dans le domaine fréquentiel. L'ensemble de cette méthode est détaillée par Gallego [5]. L'utilisation de la transformée de Fourier spatiale transformant le produit de convolution en produit classique dans le domaine fréquentiel permet de déterminer l'état de contact avec un maillage très fin, tout en gardant des temps de calcul rapides. Le problème de contact est alors résolu à l'aide de la méthode du gradient conjugué en minimisant l'énergie complémentaire du système.

En utilisant les résultats obtenus précédemment par HBM à la résonance, il est possible d'extraire les efforts et les moments sur les surfaces de contact et de les utiliser comme données d'entrée pour la méthode semi-analytique. Un maillage beaucoup plus fin peut alors être utilisé afin d'obtenir plus de détail sur le comportement des interfaces de contact. La Figure 5a représente les efforts de contact sur la même ligne de nœuds que précédemment, et au même instant de la période de vibration à la résonance. Les effets de bord sont dès lors très visibles puisque la discrétisation est plus importante. De plus, le même comportement qu'avec la méthode d'équilibrage harmonique est retrouvé. En effet, la Figure 5b montre que les bords restent collés car l'effort tangentiel n'est pas complètement égal à l'effort normal multiplié par le coefficient de frottement à cet endroit, et que le centre de la portée glisse ( $T = \mu N$ ). Les efforts et le glissement sont plus faibles que précédemment, mais leur répartition sur la surface est plus importante, dû à la discrétisation.

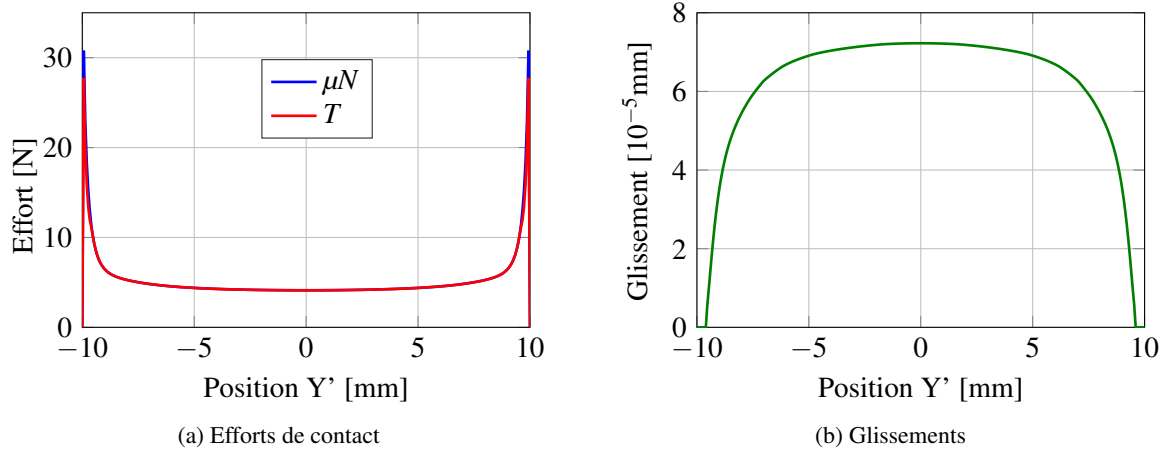


FIGURE 5 – Étude du comportement d'une interface de contact de l'aube avec la méthode semi-analytique.

## 4.2 Étude de l'usure

A partir des résultats en glissement sur l'ensemble de la surface pour chaque instant de la période vibratoire étudiée, une loi d'usure locale formulée en énergie est utilisée pour déterminer l'usure de la surface après un cycle vibratoire [6][5] :

$$\Delta h = \alpha_u \sum_{N_f} \left[ \frac{1}{4} \sum_{1cycle} \|s^{(t)}\| \sum_{1cycle} \|q_\tau^{(t)}\| \|s^{(t)}\| \right] \quad (10)$$

où  $\Delta h$  est la profondeur d'usure,  $\alpha_u$  un coefficient d'usure propre au matériau déterminé expérimentalement,  $s^{(t)}$  le glissement entre les instants  $(t - 1)$  et  $(t)$  de la période de vibration,  $q_\tau^{(t)}$  le cisaillement à l'instant  $(t)$ , et  $N_f$  correspond au numéro du cycle de fretting étudié. L'usure est ensuite répartie entre les deux surfaces en contact à l'aide d'un ratio  $\beta$  et un facteur multiplicateur  $\Delta N$  est appliqué pour accélérer l'usure. Cela revient à considérer l'usure trop faible pour avoir une influence sur le calcul avant  $\Delta N$  cycles de vibration.

La Figure 6 représente la profondeur d'usure après  $10^9$  cycles de vibration (6a) et après  $2 \cdot 10^9$  cycles de vibration (6b) en aillant mis à jour la géométrie après  $10^9$  cycles (soit  $\Delta N = 10^9$ ). La profondeur d'usure calculée après  $10^9$  cycles de vibration (Figure 6a) est principalement concentrée sur les bords et les coins de l'interface. Ce comportement signifie que l'usure arrondit les bords des portées, atténuant alors les effets de bord. Après mise à jour de la géométrie (Figure 6b), l'usure des bords n'a pas augmentée. Cependant, l'usure se répartie sur l'ensemble de la portée.

## 4.3 Impacte de l'usure sur la réponse forcée

En considérant l'usure calculée précédemment, il est possible de recalculer la réponse forcée du système par HBM en mettant à jour la géométrie du contact. La profondeur d'usure est alors implémentée

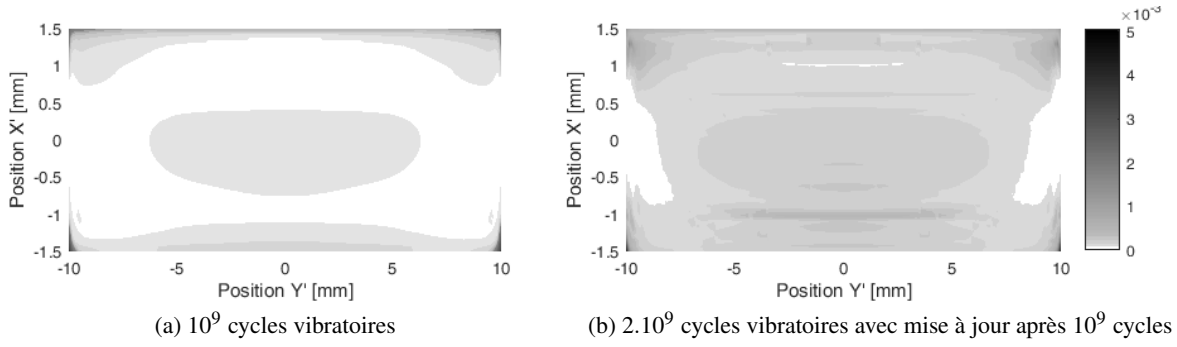


FIGURE 6 – Profondeur d’usure d’une surface de contact de l’aube en [ $10^{-3}$  mm].

comme un jeu  $G$  et ajoutée dans la loi de contact normale de la DLFT [7]. La partie normale (notée avec l’exposant  $N$ ) de l’équation (7) devient alors :

$$\tilde{\lambda}^N = \tilde{F}_r^N - \mathbf{Z}_r^N \tilde{X}_r^N + \varepsilon \left( \tilde{X}_r^N - G - \tilde{Y}_r^N \right), \quad (11)$$

La Figure 7 représente les réponses forcées linéaire (collée), non-linéaire sans usure de la géométrie, non-linéaire avec usure pour  $10^9$  cycles et non-linéaire avec usure pour  $2.10^9$  cycles. Les réponses forcées non-linéaires en considérant l’usure sont plus faibles que la réponse forcée non-linéaire sans considérer l’usure. En effet, l’adaptation des surfaces due à l’usure entraîne une diminution de la réponse forcée car elle va faciliter le glissement et donc la dissipation d’énergie dans le contact. De plus, l’amplitude de vibration est légèrement plus faible pour le calcul avec  $2.10^9$  cycles qu’avec  $10^9$  cycles d’usure. En considérant un plus grand nombre de cycles vibratoires pour calculer la profondeur d’usure, un amortissement plus important serait observé.

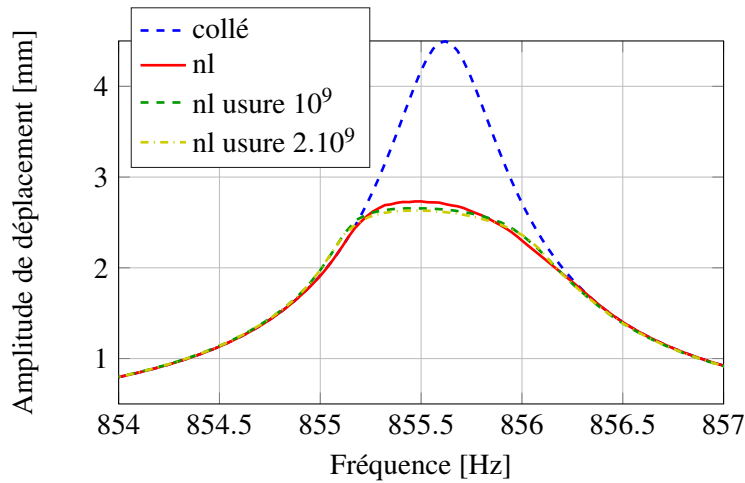


FIGURE 7 – Influence de l’usure sur la réponse forcée du système.

## 5 Conclusion

Cet article présente une méthode permettant de réaliser une étude dynamique d’un ensemble aube-disque en prenant en compte l’amortissement engendré par les non-linéarités de contact et par l’usure. La méthode d’équilibrage harmonique ne permettant pas d’utiliser un maillage très raffiné, l’utilisation d’une méthode semi-analytique de modélisation du contact a été nécessaire. Celle-ci a permis d’obtenir une description détaillée de l’état de contact et donc de calculer précisément l’usure des surfaces, tout en gardant des temps de calcul rapides. Les phénomènes de contact et d’usure ont une influence non-négligeable sur la réponse dynamique de la roue aubagée. Cette étude peut donc permettre aux motoristes aéronautiques de mieux connaître les niveaux vibratoires, lors des phases de conception notamment.

Différentes études complémentaires sont envisagées pour poursuivre ces travaux. Tout d'abord, une étude approfondie de l'influence de la fréquence de mise à jour de la géométrie dans le processus d'usure sera réalisée, notamment en étudiant un plus grand nombre de cycles vibratoires pour déterminer la profondeur d'usure. De plus, ces méthodes pourront être appliquées à un modèle industriel de roue aubagée afin de corrélérer les résultats avec des résultats d'essais et de vérifier la robustesse des simulations.

## Références

- [1] T.M. Cameron, J.H. Griffin. *An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems*, Journal of Applied Mechanics, 56(1), 149-154, 1989.
- [2] E. P. Petrov, D. J. Ewins. *Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Disks*, Journal of Turbomachinery, 125(2), 364, 2003.
- [3] S. Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez, L. Jezequel. *A dynamic Lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems*, Journal of Sound and Vibration, 265(1), 201-219, 2003.
- [4] J. Armand, L. Pesaresi, L. Salles, C. W. Schwingshackl. *A Multiscale Approach for Nonlinear Dynamic Response Predictions With Fretting Wear*, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 139(2), 022505, 2017.
- [5] L. Gallego, D. Nélias, C. Jacq. *A Comprehensive Method to Predict Wear and to Define the Optimum Geometry of Fretting Surfaces*, Journal of Tribology, 128(3), 476-485, 2006.
- [6] S. Fouvry, P. Duo, P. Perruchaut. *A quantitative approach of Ti-6Al-4V fretting damage : friction, wear and crack nucleation*, 257(9-10), 916-929, 2004.
- [7] L. Salles, L. Blanc, A. Gousskov, P. Jean, F. Thouverez. *Dual Time Stepping Algorithms With the High Order Harmonic Balance Method for Contact Interfaces With Fretting-Wear*, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 134 (4), 0325032011, 2011.
- [8] R. Craig, M. Bampton. *Coupling of substructures for dynamic analyses*, AIAA Journal, 6(7), 1313-1319, 1968.