

Une nouvelle approche combinée “élément discret / élément lattice” pour la simulation de milieu élastique fragile

D. André¹, J. Girardot², C. Hubert³

¹ Univ. Limoges, IRCER, UMR CNRS 7315, 87000 Limoges, damien.andre@unilim.fr

² Arts et Métiers ParisTech, I2M bordeaux, UMR CNRS 5295, 33400 Talence, jeremie.girardot@ensam.eu

³ Université Polytechnique Hauts de France, LAMIH, UMR CNRS 8201, 59313 Valenciennes, cedric.hubert@uphf.fr

Résumé — La Méthode des Éléments Discrets (MED) est généralement utilisée pour modéliser les milieux granulaires mais aussi comme alternative aux éléments finis pour l'étude de milieux multi-fissurés. La principale difficulté pour la MED est de rendre compte de la partie continue de la matière. Cette difficulté est généralement résolue en ayant recours à des méthodes inverses (calibration). L'étude présentée ici montre l'utilisation d'un nouveau modèle qui combine “élément discret / élément lattice” et permet de rendre compte directement de la partie continue de solides élastiques fragiles.

Mots clés — MED, élastique, fragile, lattice, LDSM.

1 Introduction

Le Modèle Élément Discret (MED) permet de décrire assez naturellement un milieu granulaire. C'est ainsi qu'il fût pour la première fois employé en 1979 [1]. Parallèlement à ces méthodes, S. Roux et al. développèrent des Méthodes par Élément Lattice (MEL) [2] pour simuler la fissuration dans des milieux hétérogènes. Alors que les méthodes MED décrivent le mouvement de solides rigides via des algorithmes dynamiques explicites, les méthodes LEM mettent en oeuvre un réseau de points matériels connectés via des modèles rhéologiques dont la résolution est généralement statique.

Depuis les années 2000, des auteurs ont mis à profit ces deux méthodes en réalisant des modèles combinés MED/MEL pour l'étude de l'endommagement de solides hétérogènes comme les bétons [3], les roches [4] ou bien les céramiques [5]. Toutefois, l'utilisation de ces méthodes implique le recours à des méthodes inverses, aussi appelées *calibrations*. Ces méthodes consistent à déterminer les valeurs des paramètres d'entrée du modèle en réalisant une étude paramétrique. Deux échelles sont alors distinguées : (i) *l'échelle locale* de l'élément discret et de ses voisins immédiats qui correspond aux paramètres d'entrées du modèle et (ii) *l'échelle globale* de l'ensemble de la structure lattice dont le comportement doit être représentatif du matériau étudié.

Cette étape de calibration est d'autant plus difficile à mettre en oeuvre que le comportement apparent à l'échelle globale est modifié par des effets de structure du réseau lattice [6, 7]. Dans ce contexte, ces méthodes de calibration peuvent être fastidieuses à mettre en oeuvre, car il est nécessaire de réaliser un grand nombre de calculs et de bien maîtriser l'étape de structuration géométrique du réseau lattice [8]. Ce dernier point peut représenter une réelle difficulté pour des réseaux désordonnés. Or, il a été démontré que des structures lattices organisées doivent être évitées, car elles conduisent à des géométries de fissuration non réalistes [9, 10].

La présente étude montre l'utilisation d'un nouveau modèle qui combine le modèle *Distinct Lattice Spring Model* (DLSM) proposé par Zhao et al. [11] et la méthode MED. L'intérêt de cette méthode est d'éviter l'étape de calibration en introduisant directement la loi de Hooke dans le modèle MED grâce au calcul d'un tenseur des déformations de Cauchy via une méthode des moindres carrés. En outre, la prise en compte de rigidité en rotation et l'utilisation de repères locaux permettent l'emploi d'éléments discrets polyédriques et semble ouvrir la voie vers un modèle compatible avec de grandes transformations. Enfin, l'introduction d'un critère de rupture simple, illustrée au travers d'essai brésilien à rupture, permet de modéliser quantitativement la rupture fragile.

2 Modèle combiné MED-DLSM

Supposons la configuration illustrée en 2 dimensions sur la figure 1 où un élément discret polygonal i est en contact avec un autre élément discret j . Les points O_i et O_j sont respectivement les centres géométriques de i et j . Ce type de configuration peut être obtenu grâce à un pavage de Voronoi. Aussi, ce modèle met en oeuvre trois repères différents :

1. le repère galiléen, aussi dit repère global \mathcal{F}_g . Ce repère est unique.
2. un repère local \mathcal{F}_i attaché à l'élément discret i . Le centre de ce repère coïncide avec le centre géométrique de l'élément discret i . À l'instant initial t_0 , la base du repère \mathcal{F}_i est alignée avec la base du repère \mathcal{F}_g .
3. le repère \mathcal{F}_{ij} attaché au contact entre deux éléments discrets i et j . L'origine de \mathcal{F}_{ij} est à l'intersection entre le plan du contact P_{ij} et le segment $[O_i, O_j]$. L'axe \vec{x}_{ij} du repère \mathcal{F}_{ij} est orienté selon la normale au plan P_{ij} du contact et de i vers j .

Il est maintenant supposé un champ de déformation local uniforme entre i et ses voisins j (approximation de Voigt). Aussi, il est possible d'exprimer un champ de déplacement local attaché à l'élément discret i , qui s'exprime en 3 dimensions par :

$$\vec{d}_i(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} = \vec{a} \cdot x + \vec{b} \cdot y + \vec{c} \cdot z = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ce champ de déplacement linéaire doit s'accorder au mieux avec les déplacements relatifs \vec{d}_{ij} des n voisins de i . Or, en 3 dimensions, un pavage de Voronoi donne en moyenne un nombre de coordinations de 11 voisins par élément discret, mais ici, seulement 3 inconnues vectorielles \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} sont à déterminer. Le problème est donc surdéterminé. Comme suggéré dans la méthode DLSM, une solution peut être approchée grâce à la méthode des moindres carrés permettant d'estimer *au mieux* les coefficients $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ et c_3 .

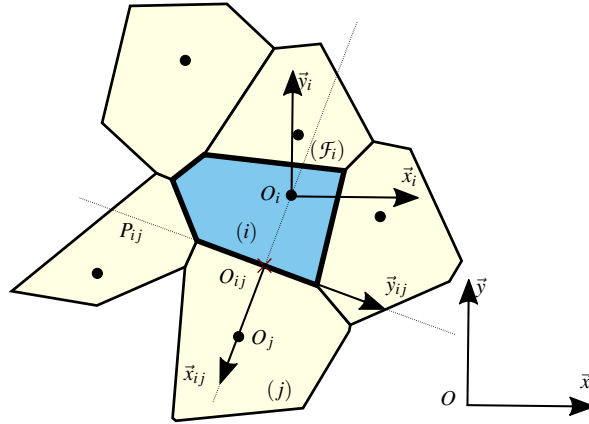


FIGURE 1 – Configuration du problème en deux dimensions

Aussi, à partir du champ de déplacement \vec{d}_i estimé par la méthode des moindres carrés, il est ensuite possible de déterminer un tenseur des déformations de Cauchy associé à l'élément discret i et exprimé en son centre O_i à partir du gradient de \vec{d}_i , soit :

$$\bar{\bar{\epsilon}}_i(O_i) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2a_1 & a_2 + b_1 & a_3 + c_1 \\ a_2 + b_1 & 2b_2 & b_3 + c_2 \\ a_3 + c_1 & b_3 + c_2 & 2c_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Maintenant, afin de calculer les efforts de contact entre l'élément discret i et j , il est nécessaire de déterminer le tenseur des déformations de Cauchy, noté $\epsilon_{ij}(O_{ij})$, à l'interface de contact entre i et j et exprimé au point O_{ij} . Si l'on suppose que $\bar{\bar{\epsilon}}_j(O_j)$ est également connu grâce à la méthode décrite plus haut, alors :

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{ij}(O_{ij}) = \frac{1}{2} [\bar{\bar{\epsilon}}_i(O_i) + \bar{\bar{\epsilon}}_j(O_j)] \quad (3)$$

Cette interpolation découle d'une propriété induite par le pavage de Voronoi. En effet, le plan de contact P_{ij} intersecte $[O_i, O_j]$ en son milieu. Toutefois, le tenseur obtenu peut être considéré comme non local, car il contient des informations des éléments discrets voisins de i et j . Aussi, il est proposé de forcer le tenseur à être local du point de vue de l'allongement unitaire dans la direction \vec{x}_{ij} . Cet allongement unitaire peut être déduit des positions des éléments discrets i et j selon :

$$\epsilon_{ij}(O_{ij}, \vec{x}_{ij}) = \frac{L_{ij}(t) - L_{ij}(t_0)}{L_{ij}(t_0)} \quad (4)$$

où $L_{ij} = \left\| \overrightarrow{O_i O_j} \right\|$ et t et t_0 sont respectivement la configuration courante et la configuration initiale. Aussi, à condition que $\bar{\bar{\epsilon}}_{ij}(O_{ij})$ soit exprimé dans le repère local au contact \mathcal{F}_{ij} , il est possible de substituer la composante ϵ_{xx} non locale de $\bar{\bar{\epsilon}}_{ij}(O_{ij})$ par l'allongement unitaire $\epsilon_{ij}(O_{ij}, \vec{x}_{ij})$ déduit uniquement via des paramètres locaux au contact (voir équation 4). De cette façon, le nouveau tenseur des déformations $\bar{\bar{\epsilon}}_{ij}(O_{ij})$ combine des informations locales et non locales. À partir de ce tenseur des déformations, il est possible d'en déduire un tenseur des contraintes en supposant un matériau élastique, homogène et isotrope grâce à la loi de Hooke :

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu \cdot \bar{\bar{\epsilon}} + \lambda \cdot \text{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}) \cdot \bar{\bar{I}} \quad (5)$$

où $\bar{\bar{\sigma}}$ est le tenseur de Cauchy des contraintes, μ et λ sont les coefficients de Lamé et $\bar{\bar{I}}$ le tenseur identité du second ordre. Finalement, les forces de contact \vec{f}_{ij} peuvent être déduites par :

$$\vec{f}_{ij} = \bar{\bar{\sigma}}_{ij}(O_{ij}) \cdot \vec{x}_{ij} \cdot S_{ij} \quad (6)$$

où $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}(O_{ij})$ est le tenseur des contraintes entre i et j exprimé au point O_{ij} et S_{ij} est la surface de l'interface de contact entre i et j . Les forces de contact \vec{f}_{ij} peuvent aussi être considérée comme les forces qui assurent la cohésion du milieu élastique discrétisé en un ensemble d'éléments discrets.

Afin de compléter le modèle élastique-fragile, un critère de rupture local, basé sur le critère de Rankine plus particulièrement adapté aux matériaux fragiles, est finalement introduit selon :

$$\bar{\bar{\sigma}}_{ij}(O_{ij}) \cdot \vec{x}_{ij} \cdot \vec{x}_{ij} > \sigma_f \quad (7)$$

où σ_f est la limite à rupture en traction du matériau supposé parfaitement élastique fragile. Si une rupture est détectée, alors l'interface de contact entre i et j est considérée comme une discontinuité (fissure). Cette discontinuité est alors prise en compte en excluant le couple (i, j) du calcul des champs de déplacement des moindres carrées $\vec{d}_i(x, y, z)$ et $\vec{d}_j(x, y, z)$. Si, au cours de la simulation, les ruptures conduisent à des configurations où le nombre de voisins de i devient strictement inférieur à 3, alors le système est sous-déterminé et le tenseur des déformations $\bar{\bar{\epsilon}}_i(O_i)$ est considéré comme nul.

Le modèle proposé ici permet donc d'introduire la loi de Hooke dans un modèle MED. Toutefois, dans un modèle MED, les rotation locales des éléments discrets doivent être aussi prises en compte. Il est proposé ici de considérer ces degrés de liberté en rotation en introduisant une rigidité angulaire selon :

$$K_{ij} = E \times L_{ij} \quad (8)$$

où K_{ij} est la rigidité angulaire entre i et j , E est le module de Young et L_{ij} est la longueur $\left\| \overrightarrow{O_i O_j} \right\|$. De cette façon, il est possible de calculer un moment induit par \vec{f}_{ij} et prenant en compte cette rigidité de contact selon :

$$\vec{m}_{ij}(O_i) = K_{ij} \cdot \vec{\theta}_{ij} + \overrightarrow{O_i O_j} \wedge \vec{f}_{ij} \quad (9)$$

où $\vec{m}_{ij}(O_i)$ est le moment exprimé au point O_i de l'élément discret j agissant sur i et $\vec{\theta}_{ij}$ est le vecteur de rotation relatif entre j et i . Le vecteur $\vec{\theta}_{ij}$ peut être déduit en utilisant le formalisme des quaternions unitaires qui permettent de décrire les mouvements angulaires par un triplet de nombres imaginaires et un nombre réel [12].

3 Schéma d'intégration explicite

Le schéma d'intégration est basé sur l'algorithme Verlet vitesse bien adaptée aux simulation MED comportant un grand nombre d'éléments discrets [13]. Toutefois, des instabilités numériques ont été observées qui peuvent conduire à faire diverger le schéma numérique. Afin de stabiliser le schéma d'intégration, un amortissement numérique est introduit comme décrit par Tchamwa et al. dans [14]. Cet amortissement est introduit via un coefficient φ dans le schéma d'intégration comme suit :

$$\dot{\vec{p}}(t + \Delta t) = \dot{\vec{p}}(t) + \varphi \Delta t [\ddot{\vec{p}}(t) + \ddot{\vec{p}}(t + \Delta t)] \quad (10)$$

où t est la variable de temps, Δt est le pas de temps du schéma numérique et \vec{p} , $\dot{\vec{p}}$ et $\ddot{\vec{p}}$ sont respectivement le vecteur position, vitesse et accélération. Des valeurs de ce coefficient φ comprises entre $1 \leq \varphi \leq 1.3$ permettent d'assurer une bonne stabilité du schéma numérique. Cet amortissement est également introduit au niveau de l'expression des rotations selon le même schéma [8] :

$$\dot{\mathbf{q}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{q}}(t) + \varphi \Delta t (\ddot{\mathbf{q}}(t) + \ddot{\mathbf{q}}(t + \Delta t)) \quad (11)$$

où \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ et $\ddot{\mathbf{q}}$ correspondent aux quaternions qui expriment respectivement les positions, vitesses et accélérations angulaires des éléments discrets.

4 Essais numériques de validation

4.1 Balle élastique tombante sur plan incliné

Cet essai consiste à lâcher une sphère élastique sur un plan incliné (avec une vitesse verticale initiale). Sous les effets conjugués de la gravité, des frottements de contact entre le plan incliné et la balle, mais aussi de l'élasticité de la balle, celle-ci doit rebondir, chuter selon le plan incliné tout en tournant sur elle-même. Bien qu'en apparence simple, cet essai numérique présente de réelles difficultés : mouvement de corps rigide non négligeable en translation et rotation, détection de contact impliquant des polyèdres convexes quelconques, prise en compte du contact avec frottement et écrasement de la balle à l'interface balle/plan qui induisent de fortes déformations et de forts gradients de déformation. De plus, cet essai présente l'avantage d'être très intuitif et donc facilement discriminant. Des résultats non réalistes peuvent très facilement être détectés et le modèle correspondant peut donc être aisément invalidé.

La figure 2 présente le résultat typique d'une simulation qui permet de valider qualitativement le modèle présenté¹. Cette simulation illustre les améliorations apportées à la méthode DLSM originale qui ne permet pas de simuler ce type de phénomènes (grands déplacements et grandes rotations). Cette configuration pouvant être présente par exemple, dans la simulation d'un impact. Le succès de cette simulation repose sur plusieurs améliorations du modèle DLSM initial, soit :

1. prise en compte de la rigidité angulaire,
2. prise en compte des moments induits par les forces de contact f_{ij} ,
3. expression des champs de déplacements \vec{d}_i dans les repères locaux \mathcal{F}_i des éléments discrets,
4. pavage complet de l'espace grâce aux polyèdres de Voronoi et
5. mise à jour des repères \mathcal{F}_{ij} attachés aux contacts.

Si l'un de ces éléments du modèle vient à manquer, les simulations divergent rapidement ou donnent des résultats non réalistes.

4.2 Essais quantitatifs dynamiques et statiques

Ces essais permettent de vérifier que les paramètres d'entrée locaux du modèle correspondent quantitativement aux valeurs attendues. Des essais virtuels de traction ont d'abord été conduits sur des éprouvettes numériques cubiques (cf Figure 3b). Il s'agit de comparer les paramètres élastiques d'entrée avec les constantes élastiques apparentes mesurées au cours des simulations. Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau suivant.

1. cf vidéo en ligne https://youtu.be/1J0969VoEFU?list=PLjFD44HqZ1diEt2lGMRUfdwtopyYJ_pJQm

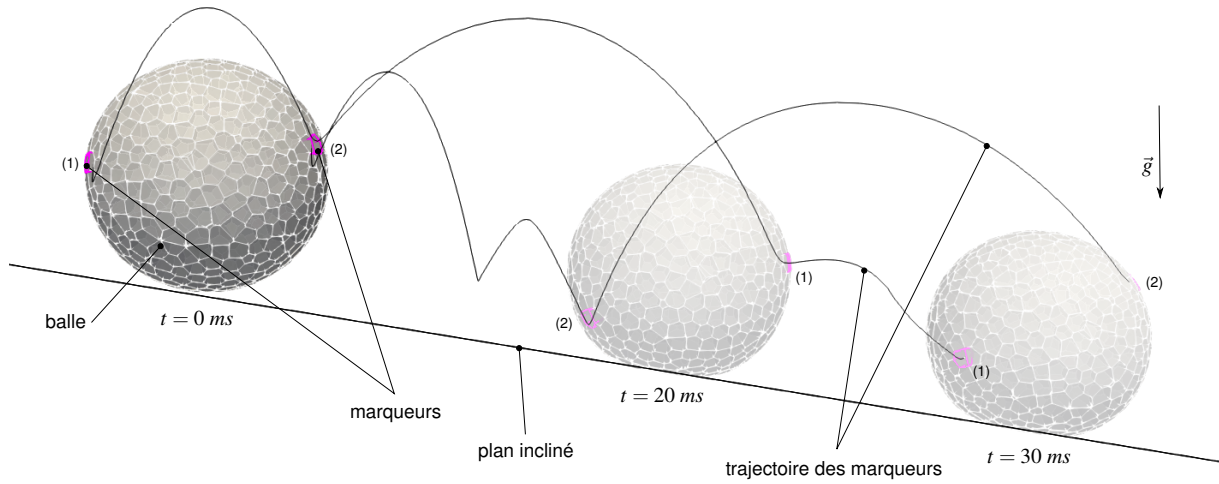
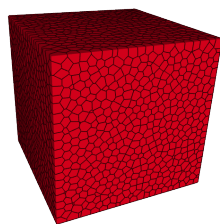


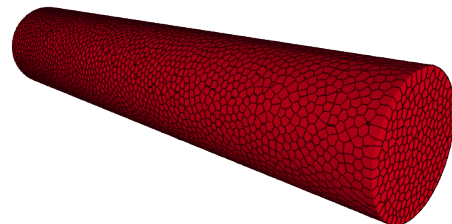
FIGURE 2 – Essai numérique de la balle élastique tombante sur plan incliné

Paramètres élastiques d'entrée		Constantes élastiques apparentes	
E (GPa)	ν	$\langle E \rangle$ (GPa)	$\langle \nu \rangle$
20	0.49	20.973	0.483
20	0.4	20.164	0.394
20	0.3	20.141	0.292
20	0.2	20.117	0.192
20	0.1	20.095	0.093
20	0.0	20.078	-0.006

Ces valeurs montrent un très bon accord entre les constantes élastiques apparentes (module de Young et coefficient de Poisson) et les paramètres élastiques d'entrée du modèle (module de Young et coefficient de Poisson également). Toutefois, les résultats se dégradent quelque peu pour des coefficients de Poisson proches de 0.5. Il est également constaté que les simulations divergent pour des valeurs très proches de 0.5. C'est pour cette raison que l'entrée correspondante dans le tableau ci-dessus n'existe pas. Toutefois, de telles valeurs de coefficient de Poisson sont peu courantes et le modèle présenté ici peut être appliqué à une large classe de matériaux couramment utilisés dans l'industrie.



(a) Domaine cubique



(b) Domaine cylindrique

FIGURE 3 – Échantillons numériques 3D à base de pavage de Voronoi

Des essais dynamiques ont également été conduits sur des éprouvettes numériques cylindriques (cf Figure 3a). À l'instant initial, des déplacements sont imposés à tous les éléments discrets de façon à placer l'éprouvette dans une configuration de solution statique de traction. Cette sollicitation est ensuite brusquement libérée, ce qui conduit la structure à osciller dans un mode vibratoire de traction-compression. De façon à déterminer la fréquence de ces oscillations, une analyse fréquentielle a été menée. Enfin, les valeurs mesurées ont ensuite été comparées aux valeurs théoriques données par la théorie de la résistance des matériaux [15]. Les résultats numériques montrent un très bon accord avec la théorie, moins de 1%. De plus, afin d'étudier la propagation des ondes mécaniques transversales, des configurations de torsion ont également été étudiées. Les résultats obtenus sont également en accord avec la théorie, soit, moins

de 1%.

Toutefois, dans ces deux cas tests, il a été observé une légère décroissance des amplitudes d'oscillation. Ce phénomène provient vraisemblablement du facteur d'amortissement φ introduit dans le schéma numérique (voir équations 10 et 11). Ces amortissements restent toutefois faibles, mais cela peut être problématique lorsqu'un schéma conservatif en énergie est fortement requis. Des investigations ultérieures sont envisagées pour résoudre ce problème. Malgré cette observation, les essais numériques quasi-statiques et dynamiques montrent que le modèle implémenté est bien en accord avec les résultats théoriques attendus en terme de constantes élastiques et de vitesse de propagation des ondes mécaniques longitudinales et transversales.

4.3 Essais quantitatifs à rupture : essais brésiliens

Ces essais ont pour but d'étudier le modèle local de rupture au travers d'essai de traction indirecte, aussi appelé essai brésilien. Cet essai consiste à solliciter, via deux plateaux, un disque jusqu'à atteindre la rupture de l'échantillon. L'essai brésilien est très largement utilisé pour caractériser les contraintes à rupture de matériaux fragiles tels que les roches, les bétons ou les céramiques [16]. La figure 4a montre le disque numérique dans sa configuration initiale. Des déplacements à vitesse constante sont appliqués sur les éléments discrets diamétralement opposés mis en évidence en jaune clair sur la figure 4a. Ces déplacements sont imposés jusqu'à la rupture totale de l'éprouvette. Cet évènement est marqué par une décroissance brutale de la force appliquée comme le montre la figure 5. Connaissant la limite à rupture σ_f et les dimensions du disque, il est possible de déterminer la force à rupture théorique P_f grâce à la relation analytique suivante [16] :

$$P_f = \frac{\pi}{2} \times \sigma_f \times D \times p \quad (12)$$

où D et p sont respectivement le diamètre et l'épaisseur du disque. Après application numérique, les résultats montrent une différence inférieure de 1.5% entre force à rupture théorique P_f déduite de l'expression précédente et la valeur mesurée sur la figure 5. De plus, la géométrie de fissuration montrée sur la figure 4b est bien verticale ce qui correspond bien aux observations expérimentales. Ces résultats montrent que le modèle permet de bien rendre compte de la fissuration de matériaux fragiles pour des essais non triviaux tels que l'essai brésilien.

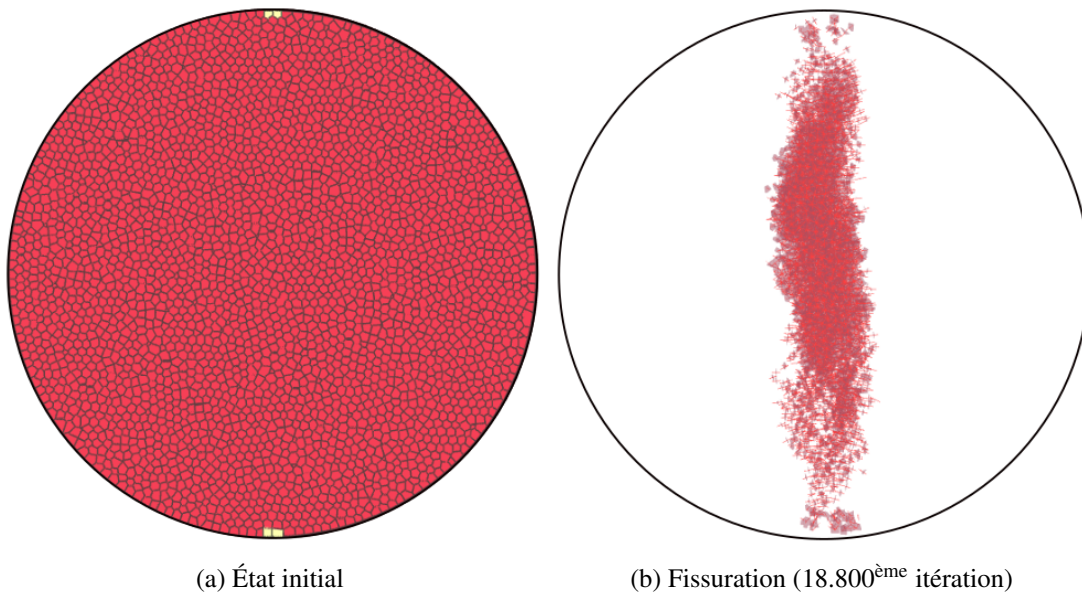


FIGURE 4 – Modélisation de l'essai de traction indirect

5 Conclusions et perspectives

Le modèle décrit dans cette étude présente des améliorations décisives du modèle lattice DLSM original. Alors que le modèle original utilise des structures lattices organisées, il est montré que cette

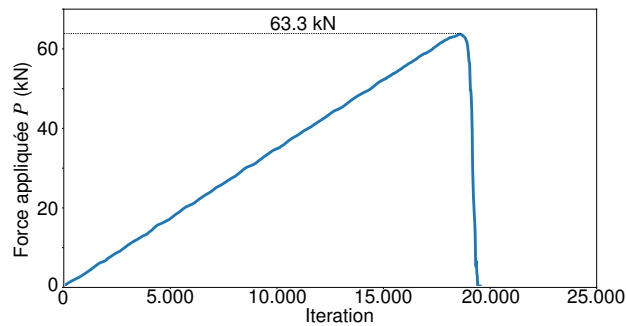


FIGURE 5 – Évolution de la force en fonction de l'iteration de calcul

nouvelle formulation permet l'emploi de structures lattices désorganisées permettant ainsi d'éviter des effets d'anisotropie de structure. De plus, par la prise en compte des rigidités locales de rotation, il semble que ce modèle soit capable de traiter des grandes transformations à condition d'utiliser une formulation locale des champs de déplacement. Aussi, il a été montré, au travers de différents essais virtuels, que ce modèle donne des résultats quantitatifs et qualitatifs en accord avec les théories de la résistance des matériaux en ce qui concerne la modélisation de milieux élastique fragile. En outre, des améliorations possibles sont envisagées concernant le facteur d'amortissement numérique nécessaire à la stabilisation du schéma numérique. Enfin, il est également envisagé d'implémenter des lois de comportement plus complexes comme des modèles dissymétriques en traction compression combinés à des critères de rupture plus sophistiqués tels que les critères de Mohr-Coulomb. Alors que l'étape de calibration représente un verrou à l'utilisation des méthodes MED appliquées aux milieux continus, l'étude présentée dans ce résumé pourrait permettre de faire émerger une nouvelle classe de méthode MED qui autorise l'introduction directe de loi de comportement en contrainte-déformation, ces dernières étant très largement utilisées dans la communauté de l'ingénierie mécanique.

6 Références bibliographiques

Références

- [1] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29 :47–65, 1979.
- [2] W Pompe, HJ Herrmann, and S Roux. Statistical models for the fracture of disordered media. *Crystal Research and Technology*, 26(8) :1076–1076, 1991.
- [3] Serguei Potapov, Aurélien Masurel, Philippe Marin, and Laurent Daudeville. Mixed dem/fem modeling of advanced damage in reinforced concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 143(2) :04016110, 2016.
- [4] D. O. Potyondy. Parallel-bond refinements to match macroproperties of hard rock. In C. Detournay D. Sainsbury, R. Hart and M. Nelson edition, editors, *Continuum and distinct element modeling in Geomechanics (Proceedings, 2nd International FLAC/DEM Symposium)*, Itasca International paper, pages 04–08, 2011.
- [5] Damien André, Bertrand Levraut, Nicolas Tessier-Doyen, and Marc Huger. A discrete element thermo-mechanical modelling of diffuse damage induced by thermal expansion mismatch of two-phase materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 318 :898–916, 2017.
- [6] M. Ostoja-Starzewski. Lattice models in micromechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 55 :35–60, 2002.
- [7] Gao-Feng Zhao, Qiuyue Yin, Adrian R. Russell, Yingchun Li, Wei Wu, and Qin Li. On the linear elastic responses of the 2d bonded discrete element model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 0(0).
- [8] Damien André, Ivan Iordanoff, Jean luc Charles, and Jérôme Néauport. Discrete element method to simulate continuous material by using the cohesive beam model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213–216(0) :113 – 125, 2012.
- [9] E. Schlangen and E. J. Garboczi. New method for simulating fracture using an elastically uniform random geometry lattice. *International Journal of Engineering Science*, 34(10) :1131–1144, 1996.

- [10] Jean-Yves Delenne Vincent Topin and Farhang Radjai. Lattice element method. Technical report, Laboratoire de Mécanique et Génie Civil UMR CNRS 5508, Cc. 048, Université Montpellier 2, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France, 2013.
- [11] Gao-Feng Zhao, Jiannong Fang, and Jian Zhao. A 3d distinct lattice spring model for elasticity and dynamic failure. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 35(8) :859–885.
- [12] J. Diebel. Representing attitude : Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. Technical report, Stanford University, California, 2006.
- [13] E. Rougier, A. Munjiza, and N. W. M. John. Numerical comparison of some explicit time integration schemes used in dem, fem/dem and molecular dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(6) :856–879, 2004.
- [14] Laurent Mahéo, Vincent Grolleau, and Gérard Rio. Damping efficiency of the tchamwa-wielgosz explicit dissipative scheme under instantaneous loading conditions. *Comptes Rendus Mécanique*, 337(11-12) :722–732, 2009.
- [15] A. Shabana. *Vibration of Discrete and Continuous Systems*. Mechanical Engineering Series. Springer New York, 1996.
- [16] Diyuan Li and Louis Ngai Yuen Wong. The brazilian disc test for rock mechanics applications : review and new insights. *Rock mechanics and rock engineering*, 46(2) :269–287, 2013.