

Vibrations induites par le frottement : problème quadratique aux valeurs propres, métamodèles et calcul par intervalles

J.Sadet^{1,2}, F.Massa¹, T.Tison¹, T.El-Ghazali²

¹ LAMIH UMR CNRS 8201, Université polytechnique Hauts de France, jeremy.sadet@uphf.fr

² CRISAL UMR CNRS 9189, Inria-Lille Nord Europe, Université de Lille 1

Résumé — L'objectif de cette communication est de discuter de l'efficacité de métamodèles, et de leurs conditions optimales de paramétrages, pour des problèmes de vibrations induites par le frottement, résolus par un problème quadratique aux valeurs propres. On s'intéressera au cas de la propagation d'incertitudes où le nombre de paramètres variables est significatif (supérieur à 10). Considérant un paramétrage optimal, un calcul par intervalles du graphe de coalescence achève cette présentation.

Mots clés — Instabilités, Problème quadratique aux valeurs propres, Métamodèles, Intervalles.

1 Introduction

Ces dernières années, les problèmes de vibrations induites par le frottement sont largement étudiés dans la littérature, en particulier les problématiques relatives au crissement. Ce phénomène, difficile à reproduire, à expérimenter et à modéliser de par son caractère incertain, retient l'attention des industriels du transport ainsi que de la communauté scientifique par des investigations à différentes échelles [7].

Une des tendances actuelles en simulation numérique est d'intégrer l'incertitude, observée expérimentalement, afin d'améliorer la prédictivité des simulations déterministes [16]. La mise en place de stratégies multiparamétriques [3] (simulations probabilistes, floues, intervalles, analyse de sensibilité, optimisation sous incertitudes, calculs de fiabilité) engendre un surcoût numérique indéniable qu'il faut nécessairement maîtriser grâce, en partie, à l'introduction de techniques de métamodèles ou de réduction de modèles, dont le niveau de précision doit être compatible avec des problèmes de stabilité fréquentielles ou temporelles non linéaires.

La littérature fait l'objet de plusieurs travaux [18] et états de l'art [8], très fournis, comparant l'efficacité de nombreux métamodèles, couramment utilisés en optimisation ou en calcul des structures. Toutefois, les conclusions apportées ne sont pas toujours, d'une part, homogènes quant à l'efficacité des métamodèles et sont généralement dépendantes du problème mathématique modélisant le phénomène, du nombre de paramètres étudiés et du temps consacré à l'optimisation des paramètres et hyperparamètres de la méthode. D'autre part, une question actuelle est d'identifier la stratégie numérique optimale en fonction de la nature du problème étudié avec des métamodèles multi-niveaux [9], des couplages de métamodèles [13], voire des couplages entre métamodèles et réduction de modèles [4].

Avant d'aborder ces dernières possibilités, cette communication a pour but de discuter de l'efficacité de 3 catégories de métamodèles (krigeage, réseaux de neurones, fonctions de base radiale) dans le cadre de l'analyse de stabilité, résolue par un problème quadratique aux valeurs propres, où les pulsations et les modes sont de nature complexes. Une attention particulière est portée sur le choix de l'ensemble d'entraînement et sur l'effet de l'optimisation des paramètres sur la qualité des résultats à la fois pour la partie réelle et imaginaire des valeurs propres. Enfin, le graphe de coalescence du modèle considéré permettra de mettre en avant les capacités de généralisation du métamodèle.

2 Problèmes de vibrations induites par le frottement

Le problème de vibrations induites par le frottement se pose de la manière suivante. Considérant l'équation de la dynamique, écrite sous une forme matricielle (1) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (1)$$

où \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} représentent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité du modèle, $\ddot{\mathbf{X}}$, $\dot{\mathbf{X}}$ et \mathbf{X} l'accélération, la vitesse et le déplacement du système et \mathbf{F} l'ensemble des efforts que subit le modèle.

Les efforts peuvent se décomposer en une contribution externe et une contribution due au contact. Comme décrit dans [17], le système peut se réécrire de la manière suivante (2) :

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{X}}} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{X}}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{NL}})\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \quad (2)$$

où $\ddot{\bar{\mathbf{X}}}$, $\dot{\bar{\mathbf{X}}}$ et $\bar{\mathbf{X}}$ représentent respectivement l'accélération, la vitesse et le déplacement de la perturbation et \mathbf{K}_{NL} la matrice de rigidité équivalente relative aux effets de friction.

Finalement, le problème (2) est réécrit sous la forme d'un problème aux valeurs propres (3) où l'analyse se fait au sens de Lyapunov.

Afin de résoudre ce système, le problème est réécrit pour se ramener à la forme (3) :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3)$$

$$\text{où } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\text{NL}}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}} \end{bmatrix}$$

Le modèle phénoménologique, le double Hulten, présenté en Figure 1 et décrit dans [2], est utilisé pour la discussion sur les métamodèles.

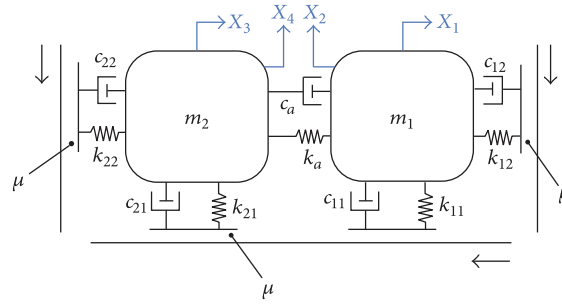


FIGURE 1 – Modèle étudié

Ce modèle comporte 4 degrés de liberté. Les 13 paramètres décrivant ce modèle sont considérés comme variables. Les 12 paramètres des constantes localisées évoluent dans un intervalle de $\pm 10\%$ de leur valeur nominale (présentée dans la Table 1) tandis que le coefficient de frottement est compris entre 0 et 1.

	m_1 (kg)	m_2 (kg)	k_{11} (N/m)	k_{12} (N/m)	k_{21} (N/m)	k_{22} (N/m)	k_a (N/m)	c_{11} (Ns/m)	c_{12} (Ns/m)	c_{21} (Ns/m)	c_{22} (Ns/m)	c_a (Ns/m)
Nominal	1	1	3000	6000	1000	3000	1000	1	1	1	1	1

TABLE 1 – Valeurs nominales des paramètres du modèle

3 Description des métamodèles utilisés

Plusieurs familles de métamodèles, à savoir le krigeage, les fonctions de base radiale (ou *RBF*) et les réseaux de neurones sont considérées dans ce travail pour approximer les valeurs et composantes des vecteurs propres complexes.

Les principales équations associées à ces métamodèles sont résumées dans la Table 2 alors que les paramètres clés de ces implémentations sont proposés dans la Table 3.

Dans les Tables 2 et 3, \hat{y} représente le prédicteur du métamodèle, x^* le point à évaluer, μ la participation moyenne du krigeage, ε la participation fluctuante du krigeage, K la fonction de corrélation, x_i et

Métamodèle	Krigeage	Fonctions de base radiale	Réseau de neurones
Prédicteur	$\hat{y}(\mathbf{x}^*) = \mu(\mathbf{x}^*) + \varepsilon(\mathbf{x}^*)$	$\hat{y}(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(\theta_i, \ \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_i\)$	$\hat{y}(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{n_n} \omega_i f(\mathbf{x}^{*T} \omega_i)$
Corrélation	$K(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}) = \prod_{i=1}^m K_i(\theta_i, x_i^{(1)} - x_j^{(2)})$	$\phi(\theta_i, \ x_i - x_j\)$	
Noyau/Fonction	$K_i(x_i, x_j) = \exp(-\theta_i \ x_i - x_j\)$	$\phi(x_i, x_j) = \exp(-\theta_i \ x_i - x_j\)$	$\text{Relu} - f(\mathbf{x}^T \omega_i) = \max(0, \mathbf{x}^T \omega_i)$ $\text{Logistic} - f(\mathbf{x}^T \omega_i) = \frac{1}{1 + \exp(-(\mathbf{x}^T \omega_i))}$ $\text{Tanh} - f(\mathbf{x}^T \omega_i) = \tanh(\mathbf{x}^T \omega)$
Références	[2]	[10]	[1], [14]

TABLE 2 – Equations caractéristiques des métamodèles

Métamodèle	Krigeage	Fonctions de base radiale	Réseau de neurones
Paramètres		θ_i	ω_i
Ensemble d'évaluation - section 4.1			<i>Latin Hypercube Sampling</i>
Paramètres optimisables (implémentation par défaut) - section 4.1		$\ln(L) = -\frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln(\det(\mathbf{K}))$	Pas de critère $\sum_{i=1}^n y_i - \hat{y}^* $
Algorithme d'optimisation (implémentation par défaut) - section 4.1		Recherche locale	Heuristique Descente de gradient
Ensemble d'évaluation (implémentation proposée) - section 4.2		<i>Space filling Sampling</i> avec la plus petite valeur $\Psi^{iq}(\mathbf{P}) = (\sum_{i=1}^m J_i d_i^{-q})^{1/q}$	
Paramètres optimisables (implémentation proposée) - section 4.3		$\ln(L) = -\frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln(\det(\mathbf{K}))$	$LOO = \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{\Phi_{ii}} \right)^2$
Algorithme d'optimisation (implémentation proposée) - section 4.3		Essaim particulière (PSO)	
Références		[15]	[12]

TABLE 3 – Paramètres clés des modèles

x_j les directions i et j , $\|\bullet\|$ la distance euclidienne, θ_i un coefficient de pondération dirigé selon i , c_i le coefficient de la direction i du *RBF*, ϕ la fonction de corrélation du *RBF* de type gaussien, ω les poids du réseau de neurones, Ψ , le critère d'échantillonnage optimisé, d la distance entre deux points au sens de Minkowski, J le nombre d'occurrence d'une distance d , q un paramètre du critère, L la fonction de vraisemblance, σ la variance du krigeage, \mathbf{K} la matrice de corrélation du krigeage, \mathbf{P} un ensemble de points issu d'un plan d'expérience, *LOO* le *Leave One Out*, Φ la matrice de corrélation du *RBF*.

4 Conditions optimales d'étude de métamodèles

Ce paragraphe résume quelques résultats phares de ce travail. Une plateforme commune de développement a été réalisée sur Python afin de lier les différentes boîtes à outil utilisées (Dace sur Matlab et SciKit-Learn sur Python) et de faciliter l'intégration de l'optimisation des paramètres clés des métamodèles.

Deux types d'améliorations de métamodèles sont discutés ici :

- La répartition spatiale de l'ensemble d'entraînement ;
- La méthode d'évaluation des paramètres optimisables.

On notera que seuls les résultats des valeurs propres 2 et 3, présentant le plus grand nombre de couplages, seront présentés dans cette communication. L'efficacité des métamodèles sera étudiée pour la partie réelle et imaginaire.

4.1 Comparaison des différentes boîtes à outil

On s'intéresse ici, comme évoqué précédemment, à la comparaison des performances des métamodèles. Quatre configurations (20, 60, 160 et 300 expériences) ont été générées par évaluation du double Hulten à l'aide d'un *LHS* standard. Une technique de validation croisée est utilisée pour entraîner et tester le métamodèle. Les évaluations sont donc scindées en 3 groupes qui serviront successivement à l'entraînement/test du métamodèle (Par entraînement, on entend le calcul des paramètres du modèle et par test, on entend la comparaison des prédictions faites par le métamodèle et les valeurs du modèle). Par exemple, pour 20 évaluations, trois groupes de 7, 7 et 6 valeurs sont créées. Le premier groupe de 7 valeurs sert dans un premier temps de validation alors que les 13 autres points servent d'entraînement. Dans un second temps, le second groupe de 7 valeurs sert de validation alors que les 13 autres points servent d'entraînement. Enfin, le dernier groupe de 6 valeurs sert de validation alors que les 14 autres points servent d'entraînement. Ainsi, toutes les évaluations servent successivement d'entraînement et de validation.

Le critère d'évaluation des métamodèles est le coefficient de détermination (4) qui permet de s'assurer de la performance des métamodèles sur la totalité de l'espace de variation des paramètres physiques.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (4)$$

où y_i représente la solution de référence, \hat{y}_i la prédiction du métamodèle et \bar{y} représente la moyenne de référence.

L'évolution du R^2 est présentée dans la Table 4.

Surrogate	Fonction	20 expériences	60 expériences	160 expériences	300 expériences
Réseau de neurones	VP2 Réelle	0.87	0.97	0.982	0.99
	VP2 Imaginaire	0.833	0.966	0.976	0.985
	VP3 Réelle	-0.305	0.091	0.453	0.866
	VP3 Imaginaire	0.247	0.618	0.934	0.952
RBF	VP2 Réelle	0.444	0.739	0.911	0.914
	VP2 Imaginaire	0.333	0.942	0.946	0.953
	VP3 Réelle	-0.822	-0.02	0.174	0.018
	VP3 Imaginaire	0.109	0.412	0.65	0.573
Krigage	VP2 Réelle	-0.093	-0.04	-0.04	-0.004
	VP2 Imaginaire	-0.039	-0.052	-0.026	-0.001
	VP3 Réelle	-0.305	-0.045	-0.009	-0.007
	VP3 Imaginaire	-0.067	-0.017	-0.034	-0.008

TABLE 4 – Résultats obtenus sur les métamodèles avec une optimisation locale (R^2)

De manière générale, le réseau de neurones est le métamodèle qui donne les meilleurs résultats. En effet, si les métamodèles sont entraînés avec 160 valeurs, le réseau de neurones donnent des valeurs de R^2 supérieures à 0.9 sauf pour la valeur propre 3 - partie réelle (0.453 pour le R^2). En ce qui concerne le *RBF*, celui-ci donne des résultats comparables seulement pour la partie réelle et imaginaire de la valeur propre 2. Si le nombre d'expériences d'entraînement est augmenté à 300, le réseau de neurones donne des résultats supérieurs à 0.85 pour toutes les fonctions alors que les performances du *RBF* restent du même ordre de grandeur que pour 160 valeurs. Le krigage, quant à lui, ne donne pas de résultats cohérents puisque tous les coefficients de détermination qui lui sont associés sont négatifs.

4.2 Répartition spatiale des points d'entraînement

Le sujet de la répartition des points d'entraînement est un point crucial. En effet, le positionnement de ceux-ci permet d'assurer la qualité du métamodèle utilisée. Ainsi, la littérature est assez vaste sur le sujet. Un bon état de l'art peut être trouvé dans [5] ou [6], dans une optique plus accès sur les métamodèles.

Dans cette communication, le critère d'optimisation spatiale est donné dans la Table 3. Le but est d'obtenir une valeur de Φ^q la plus petite possible en faisant évoluer la position des points contenus dans un plan d'expérience. Cette opération est répétée pour $q = [1, 2, 5, 10, 20, 50, 100]$. Le plan obtenant la plus petite valeur de Φ_q est alors conservé et utilisé pour calculer les réponses et construire le métamodèle.

Les résultats, en termes de R^2 , de ce critère appliqué au double Hulten sont donnés dans la Table 5. La différence entre le cas courant et le cas de référence permettant ainsi de mesurer le gain/perte de performance est ajouté entre parenthèses.

Une influence assez variable est constatée sur les réseaux du neurones. En effet, la partie réelle et imaginaire de la valeur propre 3 voient ses performances s'améliorer avec peu d'expériences en entrée alors qu'avec beaucoup d'expériences en entrée, ses performance se dégradent ou changent peu. Les performances du *RBF* sont diminuées lorsque peu d'expériences sont fournies lors de l'entraînement du métamodèle. A l'inverse, lorsqu'un nombre plus important d'expériences est fourni pour son entraînement, ses performances sont améliorées. Enfin, les performances du krigage semblent peu impactées par l'optimisation de la répartition des points.

On peut donc conclure que la modification de la répartition spatiale de l'ensemble d'évaluation a une influence non négligeable sur la performance du métamodèle. Néanmoins, le critère utilisé ne donne pas de résultats probants. Le choix d'un critère plus pertinent devra être envisagé ultérieurement.

4.3 Optimisation des paramètres du métamodèle

La recherche des paramètres des métamodèles dans les implémentations utilisées par défaut dans cette communication est réalisée soit par un optimiseur local, soit par une heuristique (Table 3). Ces

Surrogate	Fonction	20 expériences	60 expériences	160 expériences	300 expériences
Réseau de neurones	VP2 Réelle	0.81 (-0.06)	0.97 (0)	0.982 (0)	0.99 (0)
	VP2 Imaginaire	0.724 (-0.109)	0.967 (0.001)	0.971 (-0.007)	0.99 (0.005)
	VP3 Réelle	-0.249 (+0.056)	0.158 (+0.067)	0.424 (-0.029)	0.514 (-0.352)
	VP3 Imaginaire	0.35 (+0.103)	0.56 (-0.058)	0.93 (-0.004)	0.961 (0.009)
RBF	VP2 Réelle	0.231 (-0.213)	0.845 (0.106)	0.916 (0.005)	0.951 (0.037)
	VP2 Imaginaire	0.248 (-0.085)	0.927 (-0.015)	0.95 (0.004)	0.94(-0.013)
	VP3 Réelle	-0.145 (0.677)	-0.025 (-0.005)	0.231 (0.057)	0.312 (0.294)
	VP3 Imaginaire	-0.171 (-0.28)	0.347 (-0.065)	0.656 (0.006)	0.731 (0.158)
Krigage	VP2 Réelle	-0.07 (0.023)	-0.015 (0.025)	-0.007 (0.033)	-0.016 (-0.012)
	VP2 Imaginaire	-0.036 (0.003)	-0.018 (0.034)	-0.007 (0.019)	-0.014 (-0.013)
	VP3 Réelle	-0.149 (0.156)	-0.016 (0.029)	-0.04 (-0.031)	-0.011 (-0.004)
	VP3 Imaginaire	-0.276 (-0.209)	-0.003 (0.014)	-0.016 (0.018)	-0.029(-0.021)

TABLE 5 – Résultats obtenus sur les métamodèles avec une optimisation locale et une optimisation de la répartition spatiale des points initiaux (R^2)

méthodes sont rapides mais généralement peu efficace pour traiter des fonctions largement multimodales. Ainsi, les algorithmes de cette famille d'optimisation convergent souvent vers un optimum local.

A l'inverse, une approche de type globale permet de s'affranchir de ce blocage et de considérer une part plus importante d'optima. Néanmoins, ce gain se fait en contrepartie d'une augmentation du temps de calcul.

Le but est donc d'étudier l'impact d'une optimisation globale des paramètres des métamodèles sur la performance globale de ceux-ci. Dans cette étude, un algorithme de type "essaim particulaire" a été appliqué.

En ce qui concerne le krigage et le *RBF*, le paramètre optimisé correspond à celui présenté dans la Table 3. Le critère associé au *RBF* a, d'ailleurs, pour avantage de ne nécessiter qu'une seule inversion de la matrice de corrélation.

Surrogate	Fonction	20 expériences	60 expériences	160 expériences	300 expériences
RBF	VP2 Réelle	0.444 (0)	0.739 (0)	0.899 (-0.012)	0.889 (-0.025)
	VP2 Imaginaire	0.448 (0.115)	0.888 (-0.054)	0.935 (-0.011)	0.94 (-0.013)
	VP3 Réelle	-0.612 (0.21)	-0.02 (0)	-0.192 (-0.366)	0.018 (0)
	VP3 Imaginaire	0.109 (0)	0.412 (0)	0.649 (-0.001)	0.356 (-0.217)
Krigage	VP2 Réelle	0.953 (1.046)	0.987 (1.027)	0.991 (1.031)	0.995 (0.999)
	VP2 Imaginaire	0.926 (0.965)	0.972 (1.024)	0.99 (1.016)	0.994 (0.995)
	VP3 Réelle	-0.748 (-0.443)	0.863 (0.908)	0.882 (0.891)	0.911 (0.918)
	VP3 Imaginaire	0.337 (0.404)	0.838 (0.855)	0.968 (1.002)	0.958 (0.966)

TABLE 6 – Résultats obtenus sur les métamodèles avec une optimisation globale (R^2)

Comme on peut le voir dans la Table 6, la valeur du coefficient de détermination du krigage devient supérieure à 0.85 pour toutes les parties réelles et imaginaires des valeurs propres à partir de 60 expériences et supérieure à 0.9 pour 300 valeurs. En ce qui concerne le *RBF*, le constat est plus mitigé. En effet, l'optimisation des paramètres du métamodèle par le biais d'un algorithme de recherche global dégrade la valeur du coefficient de détermination. Le remplacement du type d'algorithme d'optimisation permet donc de gagner en précision pour le krigage. Pour le *RBF*, l'optimisation des paramètres par le biais du *LOO* ne permet pas d'obtenir des résultats probants.

5 Graphe de coalescence par intervalles

Considérant la technique de propagation décrite dans [11], où le problème à intervalles est transformé en un ensemble de problèmes d'optimisation min-max, les 12 paramètres du double Hulten sont pris comme variables et le coefficient de frottement évolue entre 0.1 et 1 avec un pas de 0.1. Un ensemble de 5000 points est généré par le biais d'un *LHS*. Le calcul des paramètres du meilleur métamodèle, *i.e* le krigeage optimisé, est réalisé avec 300 expériences en entrée.

Le métamodèle est évalué sur les 5000 points de l'ensemble de validation pour les deux valeurs propres considérées dans cette communication et les bornes min-max des valeurs obtenues sont ensuite reportées dans la Figure 2.

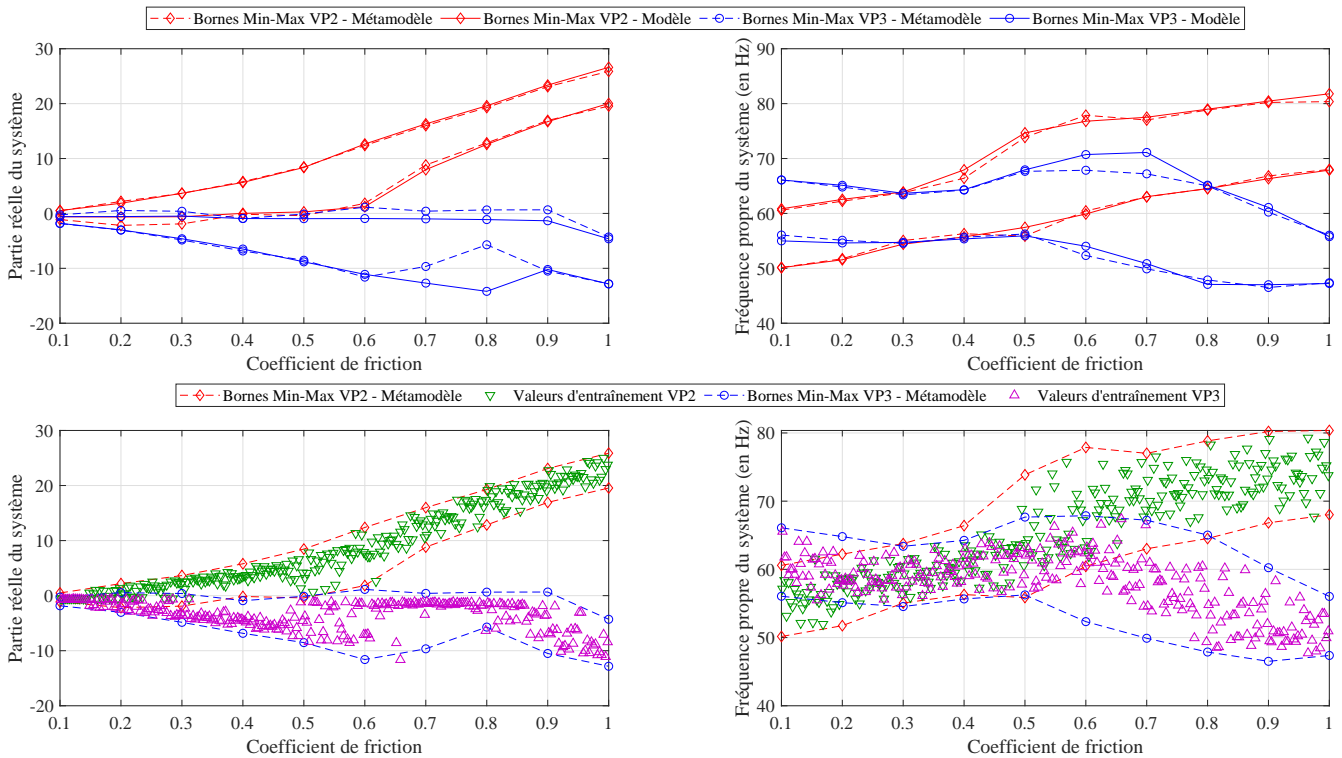


FIGURE 2 – Comparaison des bornes min-max prédites par le métamodèle et celles issues des résultats du modèle (a,b) et superposition des bornes min-max et des valeurs d'entraînement du métamodèle (c,d)

Les Figures 2(a) et 2(c) représentent le graphe de coalescence des parties réelles des valeurs propres considérées alors que les Figures 2(b) et 2(d) représentent les parties imaginaires.

On constate que le métamodèle prédit de manière assez précise l'évolution de l'incertitude dans le modèle pour les deux valeurs propres. Néanmoins, pour les coefficients de friction de 0.7 et 0.8, la partie réelle de la valeur propre 3 est sous-estimée. De la même manière, on retrouve ce comportement pour la partie imaginaire pour 0.6 et 0.7. Ceci s'explique par le fait que la zone de l'espace de conception engendrant ces valeurs n'a pas été exploré lors de la génération de l'ensemble d'entraînement. En effet, aucun point de l'ensemble d'entraînement ne se situe dans cette zone de l'espace de conception. Ainsi, ce manque de prédictibilité est cohérent et correspond *in fine* aux limitations mêmes de cette technique.

6 Conclusion et perspectives

Ce travail a permis de confronter l'efficacité de plusieurs métamodèles, ayant déjà fait leurs preuves en calcul de structures et principalement en optimisation, et de discuter du paramétrage optimal dans le cas de la propagation d'incertitudes pour un problème aux valeurs propres complexes en présence d'un nombre significatif de paramètres variables.

Les résultats actuels mettent en évidence que le réseau de neurones et le krigeage sont des techniques

efficaces même pour un nombre conséquent de paramètres variables à la fois pour la partie réelle et imaginaire des valeurs propres. Elles peuvent ainsi être intégrées dans des stratégies numériques de propagation d'incertitudes. Le couplage de ces deux approches pourrait être un élément essentiel pour combiner un nombre de paramètres incertains importants tout en conservant un degré de précision élevé.

Ce travail a donc permis de montrer que l'optimisation des paramètres était un point crucial dans la performance des métamodèles à nombre de paramètres supérieur à 10 tout comme l'optimisation de la répartition des points de l'ensemble d'évaluation du modèle.

Références

- [1] V. Baudouin, Optimisation robuste multiobjectifs par modèles de substitution, These, 2012
- [2] E. Denimal, L. Nechak, J.-J. Sinou, et S. Nacivet, *Kriging Surrogate Models for Predicting the Complex Eigenvalues of Mechanical Systems Subjected to Friction-Induced Vibration*, Shock and Vibration, 2016.
- [3] H. Q. Do, F. Massa, T. Tison, et B. Lallemand, *A global strategy for the stability analysis of friction induced vibration problem with parameter variations*, Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 84, p. 346-364, 2017.
- [4] V. T. Doan, *Reduced order models for multiparametric analyses of buckling problems - Application to additive manufacturing*, These, 2018
- [5] A. I. J. Forrester, A. Sbester, et A. J. Keane, *Engineering Design via Surrogate Modelling*. Chichester, UK : John Wiley & Sons, Ltd, 2008.
- [6] J. Franco, Planification d'expériences numériques en phase exploratoire pour la simulation des phénomènes complexes, These, 2008.
- [7] N. M. Kinkaid, O. M. O'Reilly, et P. Papadopoulos, *Automotive disc brake squeal*, Journal of Sound and Vibration, vol. 267, n 1, p. 105-166, 2003.
- [8] L. Laurent, R. Le Riche, B. Soulier, et P.-A. Boucard, *An Overview of Gradient-Enhanced Metamodels with Applications*, Archives of Computational Methods in Engineering, 2017.
- [9] L. Leifsson, S. Koziel, E. Jonsson, S. Ogurtsov, *Aerodynamic Shape Optimization by Space Mapping, Surrogate-Based Modeling and Optimization*, Springer, 2013
- [10] Z. Majdisova et V. Skala, *Radial basis function approximations : comparison and applications*, Applied Mathematical Modelling, vol. 51, p. 728-743, 2017.
- [11] F. Massa, H. Do, T. Tison, O. Cazier, *Uncertain Friction-Induced Vibration Study : Coupling of Fuzzy Logic, Fuzzy Sets, and Interval Theories*. ASME. ASME J. Risk Uncertainty Part B. 2015;2(1) :011008-011008-12. doi :10.1115/1.4030469.
- [12] M. Mongillo, *Choosing Basis Functions and Shape Parameters for Radial Basis Function Methods*, SIAM Undergraduate Research Online, vol. 4, p. 190-209, 2011.
- [13] L. Nechak et J. J. Sinou, *Hybrid surrogate model for the prediction of uncertain friction-induced instabilities*, Journal of Sound and Vibration, vol. 396, p. 122-143, 2017.
- [14] F. Pedregosa, G. Varoquaux, A. Gramfort, V. Michel, B. Thirion, O. Grisel, M. Blondel, P. Prettenhofer, R. Weiss, V. Dubourg, J. Vanderplas, A. Passos, D. Cournapeau, M. Brucher, M. Perrot, E. Duchesnay, *Scikit-learn : Machine Learning in Python*, Journal of Machine Learning Research, vol.12, p.2825-2830, 2011.
- [15] C. E. Rasmussen et C. K. I. Williams, *Gaussian processes for machine learning*, 3. print. Cambridge, Mass. : MIT Press, 2008.
- [16] A. Renault, F. Massa, B. Lallemand, et T. Tison, *Experimental investigations for uncertainty quantification in brake squeal analysis*, Journal of Sound and Vibration, vol. 367, p. 37-55, 2016.
- [17] T. Tison, A. Heussaff, F. Massa, I. Turpin, et R. F. Nunes, *Improvement in the predictivity of squeal simulations : Uncertainty and robustness*, Journal of Sound and Vibration, vol. 333, n° 15, p. 3394-3412, 2014.
- [18] L. Wang, D. Beeson, G. Wiggs, et M. Rayasam, *A Comparison Meta-Modeling Methods Using Practical Industry Requirements*, in 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2006.