

Couplage de modèles incompatibles pour des techniques de zoom structural sur matériaux hétérogènes

M. Wangermez^{1,2}, O. Allix¹, P.-A. Guidault¹, O. Ciobanu², C. Rey²

¹ LMT-Cachan, ENS-Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay, {maxence.wangermez, o.allix, guidault}@ens-paris-saclay.fr

² Safran Tech, Modelling & Simulation, {oana-alexandra.ciobanu, christian.rey}@safrangroup.com

Résumé — Nous présentons une méthode de couplage sans recouvrement entre un modèle microscopique (local) hétérogène et un modèle homogénéisé (global) de premier ordre, représentatif du comportement macroscopique d'une structure. L'objectif étant de coupler au mieux des modèles à des échelles différentes dans des cas de sollicitation où les variations de déformation macroscopique ne sont pas négligeables devant la taille des modèles en question.

Mots clés — Analyse Global/Local, Couplage de modèles, Formulation multi-échelle, Homogénéisation Second Gradient.

1 Introduction

1.1 Contexte

L'utilisation croissante des matériaux composites dans les milieux aéronautiques, notamment pour certaines pièces de moteur, a provoqué une véritable rupture technologique comme le prouve le succès du moteur LEAP (Figure 1) fabriqué par CFM International (General Electric et Safran).

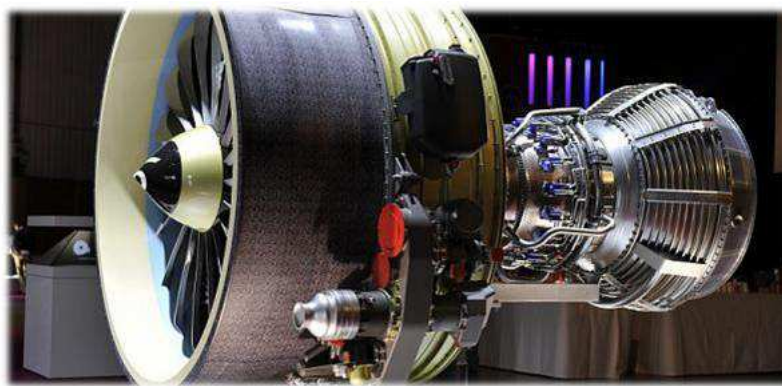


FIGURE 1 – Moteur CFM LEAP

Cette évolution a permis d'augmenter le rendement des moteurs de manière significative par rapport aux versions précédentes en augmentant le diamètre de la soufflante et donc le ratio de compression, tout en diminuant la masse (250 kg de gain par moteur).

Un objectif primordial lié au processus de fabrication des matériaux-structures tissés à architecture 3D est d'être capable d'évaluer précisément les effets de l'architecture du tissage à l'échelle des pièces afin d'assurer le dimensionnement des structures. Cet objectif est rendu réaliste par l'utilisation systématique de la tomographie pour les pièces concernées (Figure 2).

Si un calcul sur une pièce complète à l'échelle mésoscopique est prohibitif en terme de puissance de calcul et de données à stocker, une méthode de simulation à plusieurs échelles semble être un bon compromis pour introduire des détails structuraux mésoscopiques modélisés directement depuis une tomographie dans un calcul complet à l'échelle macroscopique modélisé à partir des données géométriques de CAO. L'enjeu est alors de coupler ces deux modèles bien qu'ils ne soient pas compatibles en terme de précision, de description, de maillage et de comportements.



FIGURE 2 – Tomographie d’une aube LEAP-1A (Copyright Adrien Daste / Safran)

Les questions que soulèvent cet enjeu sont nombreuses et sont l’objet de ces travaux. Après un bref rappel des méthodes de couplage utilisées en bureaux d’études, nous présenterons une méthode de couplage innovante basée sur les théories de l’homogénéisation au second gradient. Nous présenterons quelques exemples d’application pour illustrer les bénéfices qu’apporte une telle méthode de couplage par rapport aux méthodes classiques de *submodeling* ou de réanalyse locale. Finalement, nous présenterons les conclusions et perspectives de ces travaux.

1.2 Couplages de modèles en bureau d’étude, les techniques classiques

A l’heure actuelle, en bureaux d’étude, les pièces de structure en matériaux composites sont largement modélisés par des modèles de comportement homogènes équivalents (Figure 3b) ne prenant pas en compte les éventuels détails structuraux présents dans les pièces. Dans les cas où ces détails structuraux doivent être pris en compte dans des simulations, des techniques de zoom structural sont alors utilisées. Ces techniques assurent le couplage entre le modèle macroscopique (souvent nommé modèle global) et le modèle mésoscopique (souvent nommé modèle local) afin d’avoir une simulation prenant en compte localement la mesostructure de la pièce.

Une première manière pour assurer ce couplage est d’assurer la continuité du champ de déplacement d’interface entre les deux modèles. Ces techniques sont nommées *submodeling* et se retrouvent dans les travaux de [1]. Elles sont réputées donner de bons résultats dans le cas où la zone d’intérêt est loin de l’interface de couplage entre les deux modèles. Bien que très faciles à mettre en œuvre elles ne permettent pas de prendre en compte la réponse de la structure locale sur la partie globale. On parle alors d’analyse descendante.

Une deuxième manière est d’assurer l’équilibre des distributions des inter-efforts entre les modèles en plus de respecter la condition de continuité des déplacements d’interface. Cette deuxième famille de techniques est appelée méthodes *global/local* et se retrouve dans les travaux de [2, 3, 4]. La plus-value de cette famille de méthodes est que l’influence du modèle local est pris en compte dans le comportement global de la structure. On parle alors d’analyse bi-directionnelle. Plus complexe à mettre en œuvre, ces techniques peuvent néanmoins être utilisées en bureau d’étude, avec des codes commerciaux. Par exemple, [5, 6] s’attachent à proposer une méthode *global/local* itérative qui se veut la moins intrusive possible et qui s’appuie sur des outils et des données facilement accessibles dans les codes commerciaux.

D’autres techniques de couplage existent telle que la méthode Arlequin [7] mais sont difficilement utilisables dans un environnement industriel car nécessitent des lourdes modifications des logiciels de calcul existants et donc un haut niveau d’intrusivité.

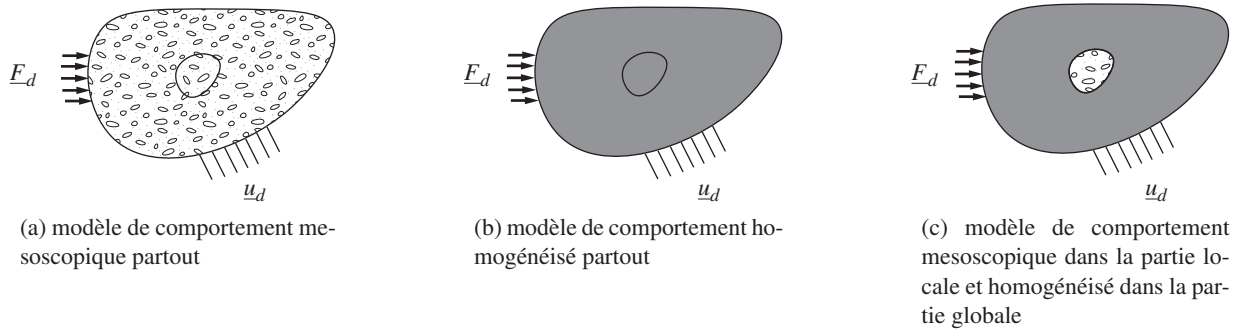
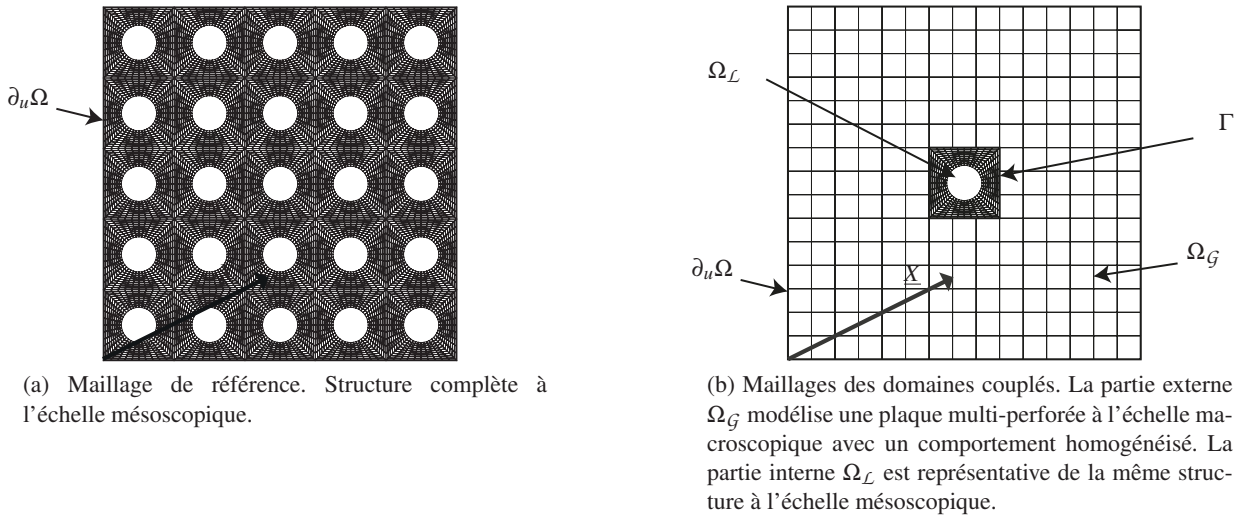


FIGURE 3 – Illustrations d’un domaine soumis à des sollicitations extérieures avec des modèles de comportements à deux échelles différentes. Problèmes avec modèles compatibles (a), (b) et incompatibles (c)

1.3 Utilisation des techniques de couplage classiques pour des modèles de structures hétérogènes

L’utilisation de ces techniques sur des modèles de matériaux hétérogènes pose problème quant à la compatibilité des modèles utilisés. En effet, dans le cas des matériaux hétérogènes, les modèles macroscopique et mésoscopique décrivent des échelles de la matière différente, il ne semble donc pas judicieux d’imposer un couplage fort entre ces modèles qui décrivent une même physique mais à des échelles différentes.

Pour illustrer cet aspect, considérons deux structures dont les maillages sont données à la Figure 4. La structure complètement mesostructurée de la Figure 4a sert de référence. Il s’agit d’une structure périodique en deux dimensions composée d’un ensemble de 5x5 VER (Volume Élémentaire Représentatif) troué. La taille l de chaque VER est prise égale à 2 mm. Le matériau utilisé est caractérisé par son module d’Young $E = 210$ GPa et son coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La Figure 4b représente la même structure modélisée avec deux échelles différentes. La partie locale mesostructurée Ω_L est située au milieu de la structure. La partie globale Ω_G est représentative de la même mésostructure mais à une échelle macroscopique. Ainsi, elle est modélisée par un comportement homogénéisé en contraintes plane avec les paramètres suivants : modules d’Young $E_1 = E_2 = 130.2$ GPa, coefficients de Poisson $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.27$ et module de cisaillement $G_{12} = 39.8$ GPa. Ces paramètres matériau ont été obtenus à partir d’un processus d’homogénéisation périodique au premier ordre sur un VER. Les conditions de couplage entre les deux modèles sont imposées sur l’interface commune Γ . Les deux structures (Figure 4) sont soumises



(a) Maillage de référence. Structure complète à l’échelle mésoscopique.

(b) Maillages des domaines couplés. La partie externe Ω_G modélise une plaque multi-perforée à l’échelle macroscopique avec un comportement homogénéisé. La partie interne Ω_L est représentative de la même structure à l’échelle mésoscopique.

FIGURE 4 – Maillages d’une plaque multi-perforée. Maillage à l’échelle mésoscopique (a) et maillages pour le calcul couplé à deux échelles (b).

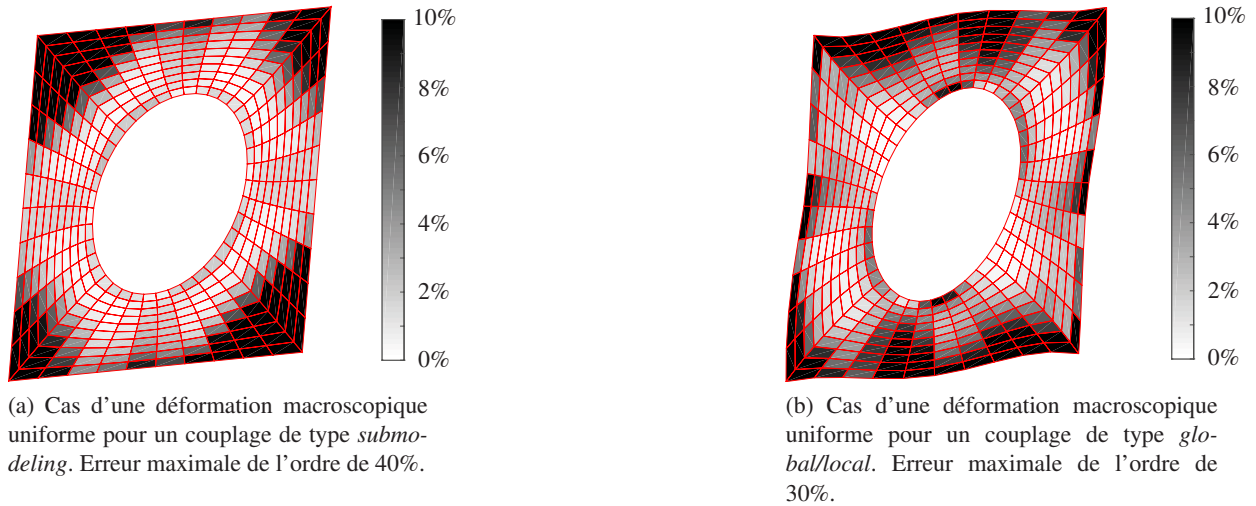


FIGURE 5 – Cartes d'erreur en énergie d'après la définition (2) avec \underline{u}_{ref} le déplacement de la cellule centrale du problème de référence (Figure 4a) et \underline{u} la solution en déplacement de la cellule centrale du problème couplé de la Figure 4b. Erreur tracée sur le maillage déformé de Ω_L avec un facteur d'amplification. Niveau de gris tronqué après 10%.

aux conditions limites suivantes :

$$\underline{u}|_{\partial_u \Omega} = \varepsilon_0 \cdot \underline{X} = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.01 \\ 0.01 & 0.02 \end{bmatrix} \cdot \underline{X} \quad (1)$$

Avec \underline{X} les coordonnées du point courant (Figure 4). De telles conditions limites permettent d'imposer une déformation moyenne égale à la valeur ε_0 imposée sur le bord : $\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon d\Omega = \varepsilon_0$. De cette manière une déformation macroscopique uniforme ε_0 peut être imposée sur tout un domaine homogène.

Pour comparer les solutions obtenues, une erreur locale est calculée entre la solution obtenue sur la cellule centrale du maillage de référence (Figure 4a) et la cellule centrale de la structure de la Figure 4b. L'erreur locale par élément est définie par le ratio :

$$e_{ele} = \frac{\frac{1}{\text{Vol}(ele)} \|\underline{u} - \underline{u}_{ref}\|_{ele}}{\frac{1}{\text{Vol}(VER)} \|\underline{u}_{ref}\|_{VER}} \quad (2)$$

avec comme norme énergétique :

$$\|\underline{u} - \underline{u}_{ref}\|_{ele} = \frac{1}{2} \int_{ele} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u} - \underline{u}_{ref}) : \mathbf{K}_L : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u} - \underline{u}_{ref})$$

Les cartes obtenues à la Figure 5 montrent l'erreur locale tronquée après 10% dans le cas d'un couplage de type *submodeling* d'une part (Figure 5a) et dans le cas d'un couplage *global/local* (Figure 5b) d'autre part. Dans ce dernier cas, les conditions de couplage entre les deux modèles ont été assurées par une formulation de type *Mortar* ([8]), avec un espace discret intermédiaire pris égale à l'espace engendré par la trace des fonctions de forme du maillage élément finis côté Ω_G . Les valeurs maximales de ces erreurs sont données dans le tableau 1. Les erreurs commises avec ces deux couplages sont donc relativement importantes pour ce cas de chargement "simple".

	submodeling	global/local
Erreur locale maximale	40%	30%

TABLE 1 – Erreur locale maximale en fonction de la technique de couplage utilisée

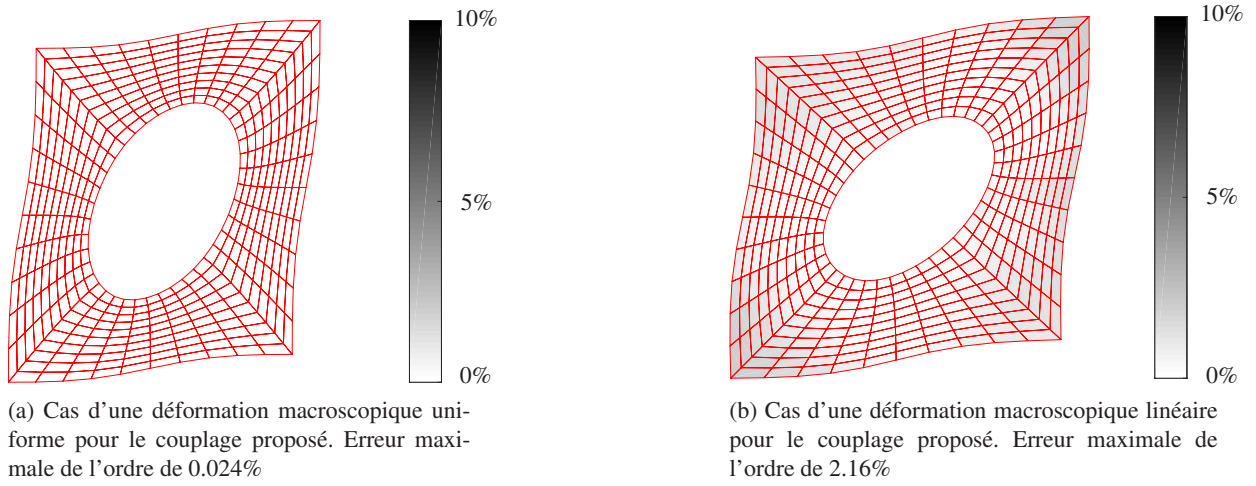


FIGURE 6 – Cartes d'erreur en énergie d'après la définition (2) avec \underline{u}_{ref} le déplacement de la cellule centrale du problème de référence (Figure 4a) et \underline{u} la solution en déplacement de la cellule centrale de la structure de la Figure 4b. Erreur tracée sur le maillage déformé de Ω_L avec un facteur d'amplification.

2 Une méthode de couplage de modèles incompatibles basée sur la théorie de l'homogénéisation au second gradient

A partir de la théorie de l'homogénéisation au second gradient de [9], nous proposons une technique de couplage "faible" qui permet de faire le lien entre un modèle microstructuré et son correspondant homogénéisé. Pour cela il est nécessaire d'assurer la continuité des composantes de translations des déplacements d'interface, l'égalité des sauts des parties linéaires du déplacement entre deux interfaces en vis-à-vis, la périodicité des parties quadratiques des déplacements d'interface, et la périodicité de la partie microscopique du champ de déplacement du côté local et enfin, la continuité du champ de déplacement total dans un coin.

2.1 Sollicitations au premier et second ordre

Considérons un premier exemple avec un cas de chargement macroscopique uniforme. Un couplage définis tel que dans la Section 2 permet, dans le cas d'une sollicitation définie par (1), de diminuer l'erreur considérablement par rapport à la solution de référence et d'obtenir exactement la solution locale de l'homogénéisation au premier ordre sur la cellule locale. La carte d'erreur obtenue à partir du critère d'erreur (2) est tracée en Figure 6a. L'erreur relative maximale entre le problème couplé et la référence est de l'ordre de 0.024%. La solution obtenue avec le couplage proposé est donc très proche de la solution de référence.

Un deuxième exemple permet d'illustrer un cas de chargement plus complexe. La structure de la Figure 4b est soumise à une déformation macroscopique linéaire. Les conditions limites appliquées sur Ω_G sont telles que :

$$\underline{u}|_{\partial_u \Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{G}_0 : \underline{\mathbf{X}} \otimes \underline{\mathbf{X}} \quad (3)$$

Les composantes de \mathbf{G}_0 sont $G_0^{xyx} = 10$, $G_0^{yxx} = 3$, $G_0^{yyx} = 2 G_0^{xyy} = 5$, $G_0^{xxx} = -2.52$ et $G_0^{yyy} = -4.49$. De telles conditions limites permettent d'imposer une déformation macroscopique linéaire sur un domaine homogène. La Figure 6b montre la carte d'erreur définie à partir de (2). L'erreur relative maximale est de l'ordre de 2.16% et peut être comparée à l'erreur obtenue avec une méthode *global/local* utilisée en bureau d'étude :

	Couplage proposé	Global/Local
e_{ele}^{max}	2.16%	35%

La solution obtenue avec le couplage proposé est une nouvelle fois très proche de la solution de référence.

3 Conclusions et perspectives

Nous avons proposé une méthode permettant de coupler un modèle de mésostructure avec son modèle homogénéisé de manière cohérente avec la théorie de l'homogénéisation au second gradient. Le traitement des conditions de couplage est réalisé en définissant des relations entre les composantes moyennes, linéaires et quadratiques des champs de déplacement de Ω_L et Ω_G sur l'interface Γ ainsi que des conditions de périodicité pour la partie complémentaire des déplacements d'interface. Ces conditions permettent d'assurer que la solution locale soit compatible avec les méthodes d'homogénéisation premier et second gradient, dans des cas de sollicitations correspondantes, sans avoir à calculer les grandeurs macroscopiques homogénéisées qui font le lien entre les échelles macroscopique et microscopique. Dans des cas de sollicitations plus complexes, le couplage proposé contraint la cinématique des sous-structures globale et locale à avoir une cinématique de type second gradient. Cela engendre des sur-contraintes au niveau de la zone de couplage mais qui restent inférieures aux sur-contraintes engendrées par des techniques de couplage conventionnelles.

En s'appuyant sur les développements proposés dans [5], une implémentation non-intrusive de la technique de couplage est actuellement en cours.

Références

- [1] FS Kelley. Mesh requirements for the analysis of a stress concentration by the specified boundary displacement method. In *Proceedings of the Second International Computers in Engineering Conference, ASME*, pages 39–42, 1982.
- [2] Ahmed K. Noor. Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2(4) :333–346, December 1986.
- [3] J. B. Ransom and N. F. Knight. Global/local stress analysis of composite panels. *Computers & Structures*, 37(4) :375–395, January 1990.
- [4] J. D. Whitcomb. Iterative global/local finite element analysis. *Computers & Structures*, 40(4) :1027–1031, January 1991.
- [5] Lionel Gendre, Olivier Allix, Pierre Gosselet, and François Comte. Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44(2) :233–245, 2009.
- [6] Maxime Blanchard. *Méthode global/local non-intrusive pour les simulations cycliques non-linéaires*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, January 2018.
- [7] Hachmi Ben Dhia. Problèmes mécaniques multi-échelles : La méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(12) :899–904, 1998.
- [8] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. Domain Decomposition by the Mortar Element Method. In Hans G. Kaper, Marc Garbey, and Gail W. Pieper, editors, *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*, number 384 in NATO ASI Series, pages 269–286. Springer Netherlands, 1993.
- [9] V. G. Kouznetsova, M. G. D. Geers, and W. a. M. Brekelmans. Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 54(8) :1235–1260, July 2002.