

# Formulation d'un problème non-linéaire avec forces suiveuses via une approche éléments finis de type PGD.

C. Hoareau<sup>1</sup>, J.-F. Deü<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC)  
Conservatoire national des arts et métiers (Cnam), Paris, {christophe.hoareau,jean-francois.deu}@lecnam.net

**Résumé** — Ce travail concerne la modélisation numérique de réservoirs sous pression partiellement remplis de liquides via la méthode des éléments finis. Cette problématique d'interaction fluide-structure fait encore l'objet de recherche, en particulier dans le domaine spatial pour le dimensionnement de lanceurs [1]. L'objectif est de calculer un état d'équilibre non-linéaire à partir d'une approche PGD *a priori* [2]. L'originalité porte sur la prise en compte de forces suiveuses et de non-linéarités géométriques dans la formulation. Les résultats sont comparés à ceux issus d'une approche incrémentale classique [3].

**Mots clés** — Forces suiveuses, non-linéarité géométrique, interaction fluide-structure, PGD.

## 1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce travail à la simulation numérique des vibrations hydroélastiques de réservoirs partiellement remplis de liquide avec prise en compte de non-linéarités géométriques. Une approche en deux temps est proposée. Elle consiste à calculer par la méthode des éléments finis (i) un état d'équilibre précontraint avec forces suiveuses [6, 7] puis, (ii) les vibrations hydroélastiques autour de l'état précontraint. Cette démarche montre que les non-linéarités géométriques jouent un rôle significatif sur le comportement dynamique linéarisé de l'ensemble ayant pour conséquence d'accroître les fréquences de résonance [4, 5]. Le calcul de l'état d'équilibre non-linéaire est donc une étape importante pour estimer les fréquences couplées et proposer des solutions adaptées lors de la phase de dimensionnement. Néanmoins, la résolution de problèmes non-linéaires rendent les études paramétriques très coûteuses en temps de calcul. Le développement de modèles réduits *a priori* sous forme PGD est une solution pour palier à cette difficulté. L'objectif de ce papier est de construire une base PGD [8, 2] pour la résolution de problèmes non-linéaires géométriques avec prise en compte des forces suiveuses, ce qui correspond à l'originalité du travail. Le problème dynamique linéarisé ne sera pas abordé dans cet article. Les éléments clés de la définition des travaux virtuels internes et externes et leur linéarisation sont détaillés en utilisant une représentation à variables séparées en espace et en paramètre de pression. Les opérateurs discrétisés ne sont pas explicités par soucis de concision. Il est important de signaler que des développements du même type ont été proposés dans le cadre de l'élasticité non-linéaire sans force suiveuse [9] ou pour des problématiques avec non-linéarités de comportement [10], et que l'utilisation de la PGD permet de traiter à moindre coût des problèmes multi-paramétriques [11].

Dans la section suivante, nous rappelons les étapes de la formulation d'un problème d'équilibre non-linéaire avec forces suiveuses. En Section 3, le problème à variables séparées est présenté sous forme de deux problèmes non-linéaires couplés : un en espace et un autre en paramètre de pression. La linéarisation utilisée dans la méthode de résolution par point fixe est détaillée en Section 4. Nous comparons dans la Section 5 la solution estimée à partir de modes calculés *a priori* à une solution de référence obtenue par une approche de type Newton-Raphson [3]. Pour cela, un exemple de disque flexible soumise à une pression uniforme est analysé, montrant l'intérêt de l'approche proposée.

## 2 Problème non-linéaire avec forces suiveuses

Considérons une structure élastique dans sa configuration de référence, occupant le domaine fermé  $\Omega^0$  de  $\mathbb{R}^3$  borné par  $\partial\Omega^0 = \partial_u\Omega^0 \cup \partial_t\Omega^0$  avec  $\partial_u\Omega^0$  et  $\partial_t\Omega^0$  les surface avec conditions aux limites de Dirichlet et de Neuman. Nous notons  $\mathbf{X} = X\mathbf{e}_x + Y\mathbf{e}_y + Z\mathbf{e}_z$  les coordonnées du vecteur position en configuration de référence avec  $\mathbf{X} \in \Omega^0$ . A l'équilibre, la structure est définie sur sa configuration courante par un domaine fermé  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  borné par  $\partial\Omega = \partial_u\Omega \cup \partial_t\Omega$ . Nous notons  $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$  les coordonnées du vecteur position en configuration courante avec  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Le vecteur  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$  correspond au vecteur des déplacements inconnus. Dans la suite **Grad** (resp. **grad**) représente le gradient lagrangien (resp. eulérien). Enfin, nous notons  $\mathbf{F}$  le gradient de la transformation défini par  $\mathbf{F} = \mathbf{Grad}\mathbf{x} = \mathbf{I} + \mathbf{Grad}\mathbf{u}$ .

### 2.1 Définition des charges suiveuses paramétrées

Les pressions internes, dues à la présence d'un liquide ou d'un gaz, correspondent aux efforts extérieurs appliqués à la structure. L'amplitude de ces efforts dépendent du niveau de pression. Le sens et l'orientation de ces efforts dépendent quant à eux de la normale extérieure à la structure en configuration courante et donc du déplacement comme l'illustre la Figure 1. Un exemple de ce type de chargement est un champ de pression hydrostatique tel que  $p = -\rho_f g(z - h)$  avec une dépendance linéaire en fonction de la coordonnée courante  $z$ . Les paramètres du modèle sont dans ce cas la masse volumique du fluide  $\rho_f$ , l'accélération de la pesanteur  $g$  et la hauteur de fluide  $h$  (Figure 1).

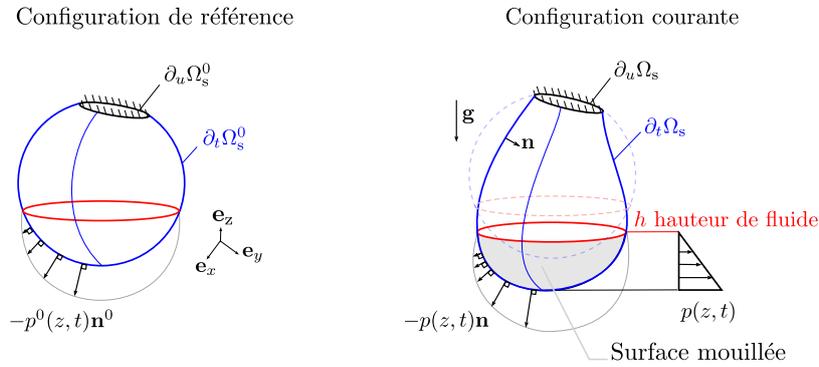


FIGURE 1 – Surface intérieure en configuration de référence et en configuration courante d'une structure soumise à une pression suiveuse hydrostatique avec prise en compte de non-linéarités géométriques.

Pour simplifier les développements, nous considérons dans la suite un modèle de pression uniforme indépendant de la position de la surface chargée :

$$p(\alpha) = \alpha \quad (1)$$

avec  $\alpha \in I = [0, \alpha_{\max}]$  un paramètres scalaire du chargement.

### 2.2 Formulation du problème non-linéaire avec forces suiveuses

On montre de manière classique [6] que le problème non-linéaire avec forces suiveuses consiste à déterminer le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  qui vérifie le principe des travaux virtuels :

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in C_u \quad (2)$$

où  $\delta \mathbf{u}$  est le champ de déplacement virtuel,  $C_u$  l'espace des fonctions cinématiquement admissibles à zéros,  $\delta W_{\text{int}}$  et  $\delta W_{\text{ext}}$  les travaux virtuels des efforts intérieurs et extérieurs définis par :

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega^0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} dV \quad (3)$$

$$\delta W_{\text{ext}}(\mathbf{u}) = - \int_{\partial_t\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot p \mathbf{n} ds \quad (4)$$

avec  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{S}$  respectivement le tenseur de Green-Lagrange et le second tenseur de Piola-Kirchhoff reliés par une loi de comportement de Saint-Venant Kirchhoff, valable en grands déplacements et petites déformations :

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda\text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{1} \quad \text{ou} \quad \mathbf{S} = \mathbb{D} : \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (5)$$

où  $\mathbb{D}$  est le tenseur d'élasticité du quatrième ordre. Notons que dans les équations (3) et (4),  $\delta W_{\text{int}}$  est exprimé sur la configuration de référence alors que  $\delta W_{\text{ext}}$  est exprimé dans la configuration actuelle. L'expression de cette dernière sur la configuration de référence sera détaillée plus loin sous l'hypothèse de variables séparées.

### 2.3 Équations d'équilibre non-linéaire discrétisées

Nous définissons le champs de déplacement discrétisé  $\mathbf{u}^h$  et le champ virtuel  $\delta\mathbf{u}^h$  tel que  $\mathbf{u}^h = \mathbf{N}\mathbf{q}$  et  $\delta\mathbf{u}^h = \mathbf{N}\delta\mathbf{q}$  avec  $\mathbf{N}$  une matrice de fonction de forme et  $\mathbf{q}$  et  $\delta\mathbf{q}$  le vecteur de déplacement nodal et son équivalent virtuel. La discrétisation éléments finis du principe des travaux virtuel conduit à la résolution du problème d'équilibre non linéaire suivant :

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (6)$$

avec  $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q})$  et  $\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{q})$  les vecteurs nodaux des efforts internes et externes, tous deux dépendants du vecteur des inconnues nodales  $\mathbf{q}$ . La résolution de ce problème peut être effectuée par méthode de Newton-Raphson [6, 7], qui consiste à résoudre une succession de systèmes linéaires :

$$[\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g - \mathbf{K}_f] \Delta\mathbf{q} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \quad (7)$$

avec  $\mathbf{R}$ , le résidu d'équilibre,  $\mathbf{K}_m$  et  $\mathbf{K}_g$  les matrices tangentes matériaux et géométriques liées à la variation des efforts internes, et  $\mathbf{K}_f$  la matrice tangente des forces suiveuse liée à la variation des efforts externes (i.e. la variation du champ de pression et de la normale extérieure). Une convergence quadratique du problème non-linéaire est obtenue via cette approche.

## 3 Formulation PGD du problème avec forces suiveuses

Dans cette section, nous cherchons à formuler le problème (2) en faisant l'hypothèse que le champ de déplacement solution  $\mathbf{u}$  peut s'écrire sous la forme d'une série de produits de fonctions à variables séparées [8]. Sachant que le champ de pression uniforme s'écrit  $p(\alpha) = \alpha$ , le champ de déplacement approché  $\mathbf{u}^{(n)}$  est alors défini par  $n$  couples  $(\Lambda_i, \lambda_i)$  de fonctions séparées en espace et en paramètre de pression avec  $\mathbf{X} \in \Omega^0$  et  $\alpha \in I$  tel que :

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \Lambda_i(\mathbf{X})\lambda_i(\alpha) \quad (8)$$

Dans la suite, nous montrons comment calculer le  $(k+1)^{\text{ème}}$  couple d'approximation noté  $(\Lambda, \lambda)$  connaissant les  $k$  premiers termes de la série :

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \Lambda(\mathbf{X})\lambda(\alpha) \quad (9)$$

### 3.1 Travaux virtuels des efforts intérieurs sous forme PGD

Compte tenu de la séparation de variables, le champ de déplacement virtuel s'écrit  $\delta\mathbf{u} = \delta\Lambda\lambda + \Lambda\delta\lambda$ . L'expression du travail virtuel des efforts intérieurs, intégré sur la l'intervalle du paramètre de pression, s'exprime alors comme une somme de deux termes :

$$\int_I \delta W_{\text{int}} d\alpha = \underbrace{\int_I \int_{\Omega^0} \delta\mathbf{E}_\Lambda : \mathbb{D} : \mathbf{E} dV d\alpha}_{\delta G_{\text{int}}(\delta\Lambda)} + \underbrace{\int_I \int_{\Omega^0} \delta\mathbf{E}_\lambda : \mathbb{D} : \mathbf{E} dV d\alpha}_{\delta H_{\text{int}}(\delta\lambda)} \quad (10)$$

avec  $\delta\mathbf{E}_\Lambda$  et  $\delta\mathbf{E}_\lambda$  des tenseurs qui ne dépendent respectivement que de  $\delta\Lambda$  et  $\delta\lambda$ . Le point clé de ce développement est l'expression de  $\delta\mathbf{E}$  en fonction de  $\delta\Lambda$  et  $\delta\lambda$  tel que  $\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}_\Lambda + \delta\mathbf{E}_\lambda$ .

Le tenseur virtuel des déformations de Green-Lagrange s'écrit :

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}) \quad \text{avec} \quad \delta \mathbf{F} = \mathbf{Grad} \delta \mathbf{u} \quad (11)$$

En introduisant les définitions  $\varepsilon$  et  $\gamma$  pour les champs de vecteur  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  :

$$\varepsilon(\mathbf{a}) = \mathbf{Grad} \mathbf{a} + \mathbf{Grad}^T \mathbf{a} \quad \text{and} \quad \gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{Grad}^T \mathbf{a} \mathbf{Grad} \mathbf{b} \quad (12)$$

on obtient après développement les expressions de  $\delta \mathbf{E}_\Lambda$  et  $\delta \mathbf{E}_\lambda$  :

$$\delta \mathbf{E}_\Lambda = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon(\delta \Lambda) + \frac{1}{2} \lambda [\gamma(\delta \Lambda, \mathbf{u}^{(k)}) + \gamma(\mathbf{u}^{(k)}, \delta \Lambda)] + \frac{1}{2} \lambda^2 [\gamma(\delta \Lambda, \Lambda) + \gamma(\Lambda, \delta \Lambda)] \quad (13)$$

$$\delta \mathbf{E}_\lambda = \frac{1}{2} [\varepsilon(\Lambda) + 2\lambda \gamma(\Lambda, \Lambda) + \gamma(\Lambda, \mathbf{u}^{(k)}) + \gamma(\mathbf{u}^{(k)}, \Lambda)] \delta \lambda \quad (14)$$

De même, le tenseur de Green-Lagrange s'écrit :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon(\mathbf{u}^{(k)}) + \gamma(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) + \lambda \varepsilon(\Lambda) + \lambda [\gamma(\mathbf{u}^{(k)}, \Lambda) + \gamma(\Lambda, \mathbf{u}^{(k)})] + \lambda^2 \gamma(\Lambda, \Lambda) \right) \quad (15)$$

Le développement de  $\delta G_{\text{int}}$  et  $\delta H_{\text{int}}$  ne sont pas explicités par soucis de concision. En effet, le développement de l'équation (10) conduit à un grand nombre de termes à expliciter. Néanmoins, nous pouvons détailler l'expression des opérateurs dépendant de  $\mathbf{u}^{(k)}$  qui s'expriment en fonction des modes  $(\lambda_i, \Lambda_i)$  :

$$\varepsilon(\mathbf{u}^{(k)}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varepsilon(\Lambda_i) \quad (16)$$

$$\gamma(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \gamma(\Lambda_i, \Lambda_j) \quad (17)$$

$$\gamma(\mathbf{u}^{(k)}, \Lambda) + \gamma(\Lambda, \mathbf{u}^{(k)}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\gamma(\Lambda_i, \Lambda) + \gamma(\Lambda, \Lambda_i)) \quad (18)$$

### 3.1.1 Travaux virtuels des efforts extérieurs sous forme PGD

Le travail des efforts extérieurs intégré sur l'intervalle du paramètre de pression, avec prise en compte du champ virtuel (11), s'exprime comme une somme de deux termes :

$$\int_I \delta W_{\text{ext}} d\alpha = \underbrace{- \int_I \int_{\partial_t \Omega} \lambda \delta \Lambda \cdot p(\alpha) \mathbf{n} ds d\alpha}_{\delta G_{\text{ext}}(\delta \Lambda)} - \underbrace{\int_I \int_{\partial_t \Omega} \delta \lambda \Lambda \cdot p(\alpha) \mathbf{n} ds d\alpha}_{\delta H_{\text{ext}}(\delta \lambda)} \quad (19)$$

avec  $\delta G_{\text{int}}$  et  $\delta G_{\text{ext}}$  des fonctions qui ne dépendent respectivement que de  $\delta \Lambda$  et  $\delta \lambda$ . Toutes les expressions intégrées sur la surface courante peuvent être exprimées via un changement de variable  $(\xi, \eta) \in \partial_t \Omega^0$ . Ainsi, l'intégrale de la normale extérieure peut s'exprimer de façon suivante :

$$\int_{\partial_t \Omega} \mathbf{n} ds = \int_{\partial_t \Omega^0} \mathbf{x}_{,\xi} \wedge \mathbf{x}_{,\eta} d\xi d\eta \quad (20)$$

$$= \int_{\partial_t \Omega^0} (\mathbf{X}_{,\xi} + \mathbf{u}_{,\xi}^{(k)} + \lambda \Lambda_{,\xi}) \wedge (\mathbf{X}_{,\eta} + \mathbf{u}_{,\eta}^{(k)} + \lambda \Lambda_{,\eta}) d\xi d\eta \quad (21)$$

Nous en déduisons les expressions de  $\delta G_{\text{ext}}$  et  $\delta H_{\text{ext}}$  en fonction de  $\mathbf{u}^{(k)}$ ,  $\Lambda$ ,  $\lambda$  et  $p(\alpha)$  :

$$\delta G_{\text{ext}} = - \int_{\partial_t \Omega^0} \lambda \delta \Lambda \cdot p(\alpha) (\mathbf{X}_{,\xi} + \mathbf{u}_{,\xi}^{(k)} + \lambda \Lambda_{,\xi}) \wedge (\mathbf{X}_{,\eta} + \mathbf{u}_{,\eta}^{(k)} + \lambda \Lambda_{,\eta}) d\xi d\eta \quad (22)$$

$$\delta H_{\text{ext}} = - \int_{\partial_t \Omega^0} \delta \lambda \Lambda \cdot p(\alpha) (\mathbf{X}_{,\xi} + \mathbf{u}_{,\xi}^{(k)} + \lambda \Lambda_{,\xi}) \wedge (\mathbf{X}_{,\eta} + \mathbf{u}_{,\eta}^{(k)} + \lambda \Lambda_{,\eta}) d\xi d\eta \quad (23)$$

Nous avons donc maintenant à notre disposition toutes les expressions nécessaires à la formulation du problème variationnel sous forme séparée.

## 4 Résolution du problème variationnel à variables séparées

Le problème revient à trouver  $(\Lambda, \lambda)$  tel que les deux équations suivantes soient vérifiées :

$$\delta G(\Lambda, \lambda) = \delta G_{\text{int}}(\Lambda, \lambda) - \delta G_{\text{ext}}(\Lambda, \lambda) = 0, \quad \forall \delta \Lambda \in C_\Lambda \quad (24)$$

$$\delta H(\Lambda, \lambda) = \delta H_{\text{int}}(\Lambda, \lambda) - \delta H_{\text{ext}}(\Lambda, \lambda) = 0, \quad \forall \delta \lambda \in C_\lambda \quad (25)$$

avec  $C_\Lambda$  et  $C_\lambda$  des espaces de fonctions régulières (et cinématiquement admissible à zero pour  $C_\Lambda$ ). Ce type de problème est classique avec la PGD et peut être résolu de façon itérative par une méthode de point fixe [8]. L'approche consiste à calculer  $\Lambda$  solution de Eq. (24) pour un mode de paramètre de pression  $\lambda$  fixé, puis à calculer  $\lambda$  solution de Eq. (25) à partir de la solution  $\Lambda$  précédemment obtenue. L'approche précédente est répétée jusqu'à stabilisation des solutions. De ce fait, deux problèmes non-linéaires doivent être résolus à chaque itérations du point fixe, par exemple par une méthode de Newton-Raphson nécessitant la linéarisation des Eqs. (24) et (25).

### 4.1 Expression et linéarisation de $\delta G$ pour $\lambda$ fixé

Dans le cadre d'une formulation EF, le champ dépendant de l'espace discrétisé s'écrit  $\Lambda^h = \mathbf{N}\mathbf{r}$  avec  $\mathbf{r}$  les inconnus nodales. Le problème revient à résoudre une équation discrète non-linéaire du même type que (6) :

$$\mathbf{G}_{\text{int}}(\mathbf{r}) - \mathbf{G}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (26)$$

Les vecteurs  $\mathbf{G}_{\text{int}}$  et  $\mathbf{G}_{\text{ext}}$  ne sont pas explicités ici, mais dépendent de coefficients fonction de  $\lambda$  et des  $k$  premiers modes  $\lambda_j$ .

Pour la résolution du problème non-linéaire Eq. (24), on utilise la linéarisation de  $\delta G$ , notée  $\Delta \delta G$ , qui se décompose en trois termes dans le cas où  $p$  est uniforme :

$$\Delta \delta G(\Lambda, \lambda) = \underbrace{\int_I \int_\Omega \Delta \delta \mathbf{E}_\Lambda : \mathbb{D} : \mathbf{E} dV dp}_{\delta G_g(\delta \Lambda, \Delta \Lambda)} + \underbrace{\int_I \int_\Omega \delta \mathbf{E}_\Lambda : \mathbb{D} : \Delta \mathbf{E} dV dp}_{\delta G_m(\delta \Lambda, \Delta \Lambda)} + \underbrace{\int_I \int_{\partial \omega} \Lambda \lambda \cdot p \Delta \mathbf{n} ds dp}_{-\delta G_f(\delta \Lambda, \Delta \Lambda)} \quad (27)$$

avec  $\delta G_g$ ,  $\delta G_m$  et  $\delta G_f$  des formes bilinéaires analogues à une raideur géométrique, une raideur matériaux et une raideur liée au travail des forces suiveuses. L'expression  $\delta G_f$  se base essentiellement sur la variation de la normale en fonction de  $\mathbf{u}^{(k)}$ ,  $\Lambda$ ,  $\lambda$  et  $\Delta \Lambda$  tel que :

$$\int_{\partial_t \Omega^0} \Delta \mathbf{n} ds = \int_{\partial_t \Omega^0} (\Delta \mathbf{x}_{,\xi} \wedge \mathbf{x}_{,\eta} + \mathbf{x}_{,\xi} \wedge \Delta \mathbf{x}_{,\eta}) d\xi d\eta \quad (28)$$

$$= \int_{\partial_t \Omega^0} (\lambda \Delta \Lambda_{,\xi} \wedge (\mathbf{X}_{,\eta} + \mathbf{u}_{,\eta} + \lambda \Lambda_{,\eta}) + (\mathbf{X}_{,\xi} + \mathbf{u}_{,\xi} + \lambda \Lambda_{,\xi}) \wedge \lambda \Delta \Lambda_{,\eta}) d\xi d\eta \quad (29)$$

La discrétisation des trois termes de l'équation (27) conduit à trois matrices tangentes assurant la convergence quadratique de la solution par une méthode de Newton-Raphson.

### 4.2 Expression et linéarisation de $\delta H$ pour $\Lambda$ fixé

Le développement de Eq. (25) conduit à une expression de la forme suivante :

$$\delta H(\lambda) = \int_I \delta \lambda (a_0 + b_0 \alpha + (a_1 + b_1 \alpha) \lambda + (a_2 + b_2 \alpha) \lambda^2 + a_3 \lambda^3) d\alpha = 0, \quad \forall \delta \lambda \in C_\lambda \quad (30)$$

avec  $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1$  et  $b_2$  des coefficients fonction du mode spatial  $\Lambda$  et des  $k$  premiers couples de mode  $(\Lambda_i, \lambda_i)$ . Sa linéarisation s'écrit de façon suivante :

$$\Delta \delta H(\lambda) = \int_I \delta \lambda (a_1 + b_1 \alpha + 2(a_2 + b_2 \alpha) \lambda + 3a_3 \lambda^2) \Delta \lambda d\alpha \quad (31)$$

La discrétisation par éléments finis s'effectue sur un espace à une dimension en paramètre de pression tel que  $\lambda^h = \mathbf{N}_p \lambda$  où  $\mathbf{N}_p$  est la matrice de fonction de forme. La discrétisation de Eq. (31) conduit à un opérateur de la forme suivante :

$$\mathbf{K}_h = \int_I (a_1 + b_1 \alpha + 2(a_2 + b_2 \alpha) \lambda + 3a_3 \lambda^2) \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p d\alpha \quad (32)$$

## 5 Résultats numériques

### 5.1 Modes PGD calculés *a priori* d'une plaque soumise à une pression uniforme

Considérons une plaque circulaire en Plexiglas encastrée sur la tranche et soumise à une pression uniforme  $p(\alpha) = \alpha$  avec  $\alpha \in I = [0, 150]$  Pa. Une loi de comportement de Saint-Venant Kirchhoff est utilisée. La structure est maillée avec des éléments hexahédriques à 20 noeuds. Les données géométriques, matériaux et du maillages apparaissent sur la Figure 2 et dans sa légende. Nous montrons en Figure 3 la déformée de la structure, ainsi que l'évolution du déplacement au centre du disque normalisé par l'épaisseur de la plaque sur la plage de pression considérée. Notons que le déplacement maximum, obtenu par la méthode de Newton-Raphson, est de l'ordre de huit fois l'épaisseur de la structure.

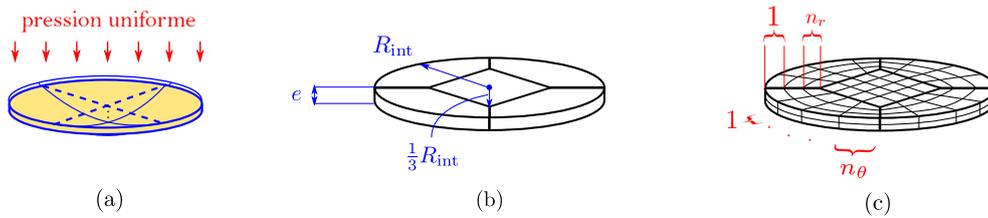


FIGURE 2 – (a) Plaque circulaire en Plexiglas soumise à une pression uniforme  $p$  avec un module de Young  $E = 7.10^9$  Pa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.38$ ; (b) Géométrie de la plaque pour la génération d'un maillage hexahédrique avec  $R_{\text{int}} = 0.144$  m et une épaisseur  $e = 0.25$  mm; (c) Héxahèdres à 20 noeuds paramétrés par  $n_r$  et  $n_\theta$  le nombre d'éléments sur les ligne décrites sur la figure.

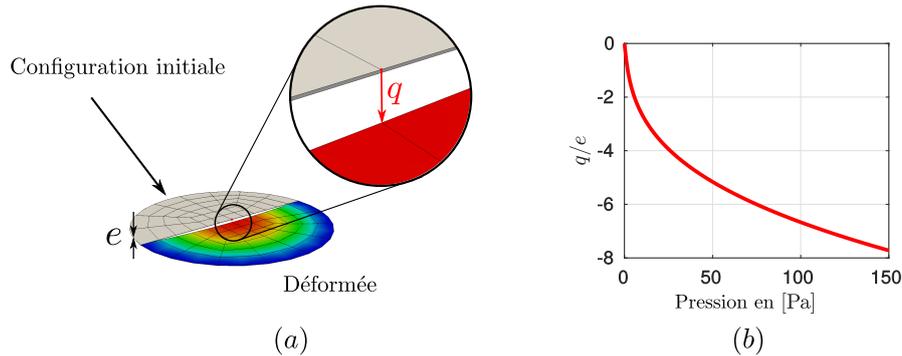


FIGURE 3 – (a) Configuration de référence (en gris) et configuration courante avec la norme du champ de déplacement ( $\|\mathbf{u}\|_{L_2} = 0$  en bleu et  $\|\mathbf{u}\|_{L_2} = 1.93$  mm en rouge); (b) Évolution du déplacement adimensionné par l'épaisseur en fonction de la pression pour un pas de pression  $\Delta p = 3$  Pa.

A partir de la résolution des problèmes non-linéaires couplés défini par les Eqs. (24) et (25), nous calculons les 8 premiers couples de modes PGD *a priori* dont 4 d'entre eux sont illustrés sur la Figure 4.

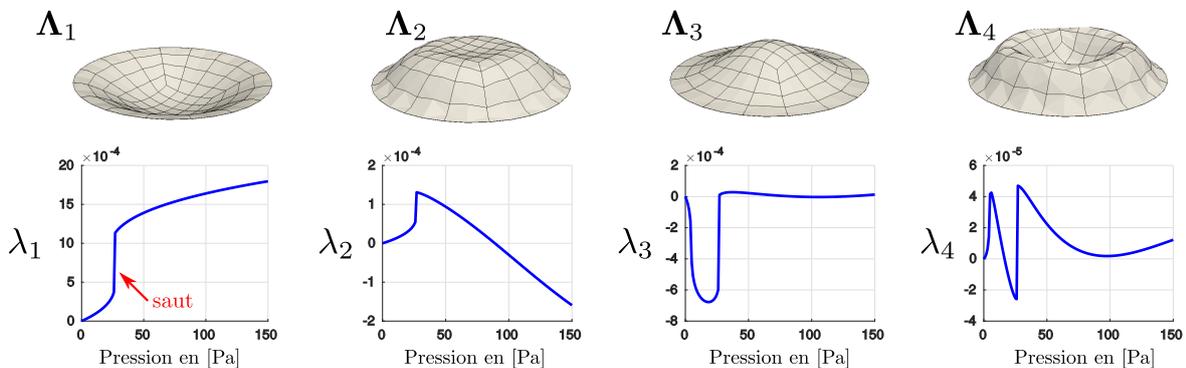


FIGURE 4 – Quatres premiers modes PGD  $(\Lambda_i, \lambda_i)$  calculés *a priori*.

Nous observons sur la Figure 4 que les modes en espace sont axi-symétriques et vérifient les conditions aux limites d'encastrement au bord. Les modes paramétriques en pression présentent quant à eux des sauts apparents laissant envisager une instabilité. En effet, des développements non décrits dans ce papier, mais qui seront présentés lors du congrès, montrent que l'équation (25) nécessite l'utilisation d'algorithmes de continuation pour capter toute l'information au niveau de ces zones. Néanmoins, l'étude de la convergence de l'erreur globale illustrée en Figure 5 montre que peu de modes suffisent (8 dans notre cas) pour reconstruire une solution approchée de la solution de référence, avec une erreur globale inférieure à 1%. On utilise comme mesure d'erreur la norme en énergie suivante :

$$E_{\text{globale}}^{(n)} = \int_I \frac{\|\mathbf{q}^{(n)}(\alpha) - \mathbf{q}_{\text{ref}}(\alpha)\|}{\|\mathbf{q}_{\text{ref}}(\alpha)\|} d\alpha \quad \text{et} \quad \|\bullet\| = \frac{1}{2} \int_{\Omega^0} \mathbf{S}(\bullet) : \mathbf{E}(\bullet) dV \quad (33)$$

où  $\mathbf{q}_{\text{ref}}$  est la solution EF de référence pour une pression donnée et  $\mathbf{q}^{(n)}$  la solution reconstruite avec  $n$  modes PGD. D'après la Figure 5, la solution approchée converge vers la solution de référence éléments finis. Cette convergence s'observe d'une part de façon qualitative via la comparaison de l'évolution du déplacement adimensionnée en fonction de la pression pour un nombre de mode donnée. D'autre part, cette convergence se quantifie par la décroissance de l'erreur globale Eq. (33) entre la solution de référence et la solution reconstruite.

On observe une évolution non régulière de la convergence et en particulier que les modes 1, 3 et 8 sont ceux qui contribuent le plus significativement à la diminution de l'erreur. Une étude plus approfondie de cette convergence serait nécessaire pour comprendre ce phénomène.

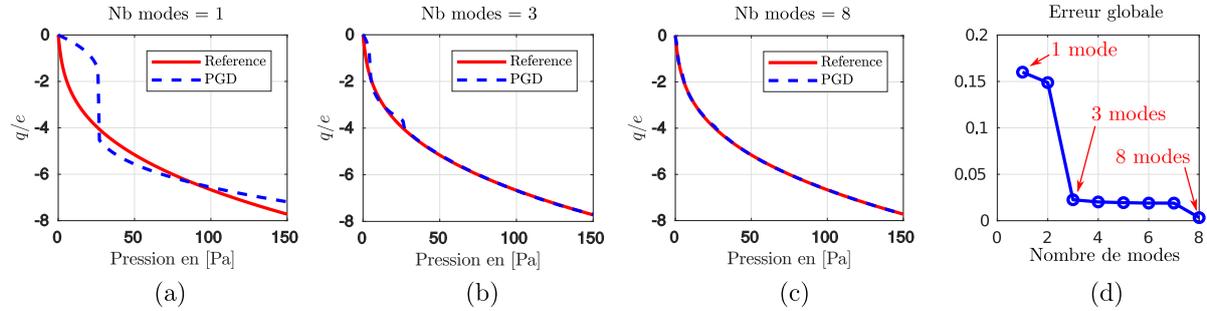


FIGURE 5 – Évolution du déplacement au centre du disque normalisé par l'épaisseur en fonction de la pression (solution de référence en rouge et solution approchée en pointillés bleu) pour différents nombres de modes : (a) 1 mode ; (b) 3 modes ; (c) 8 modes. (d) Évolution de l'erreur globale Eq. (33) en fonction du nombre de modes

## 6 Conclusions et perspectives

Au travers de cet article, nous avons cherché à résoudre un problème non-linéaire géométrique avec forces suiveuses à partir d'une base réduite PGD calculée *a priori*. Nous avons montré que le problème non-linéaire global revient à résoudre une succession de problèmes non-linéaires séparées en espace et en paramètre de pression via un algorithme de point fixe. L'originalité de cette approche porte sur la prise en compte de la charge suiveuse comme variable dans la solution reconstruite. D'un point de vue pratique, les points clés de cette approche ont consisté à exprimer la normale, ainsi que sa linéarisation, en fonction du déplacement dans le travail des efforts extérieurs. L'exemple numérique tridimensionnel développé montre que peu de modes PGD suffisent pour reconstruire une solution approchée qui converge vers la solution de référence obtenue par une approche classique de type Newton-Raphson. De nombreux points restent à approfondir, comme par exemple la résolution de problèmes paramétrique avec forces suiveuses faisant apparaître des instabilités ou le traitement des problèmes multi-paramétriques (avec paramètres matériaux et géométriques). On peut enfin signaler que ces solutions PGD vont être utilisées pour le calcul de la réponse dynamique linéarisée autour d'un état précontraint.

## Références

- [1] H. J.-P. Morand, R. Ohayon. *Fluid structure interaction*, Wiley, 1995.
- [2] S. Niroomandi, D. González, I. Alfaro, F. Bordeu, A. Leygue, E. Cueto, F. Chinesta. *Real-time simulation of biological soft tissues : a PGD approach*, International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 29, 586-600, 2013.
- [3] C. Hoareau, J.-F. Deü. *Non-linear finite element analysis of an elastic structure loaded by hydrostatic following forces*, Procedia Engineering, 199, 1302-1307, 2017.
- [4] C. Hoareau, J.-F. Deü, R. Ohayon. *A finite element approach for hydroelastic vibrations of partially filled prestressed elastic tanks*, Proceedings of the 6th European Conference on Computational Mechanic (Solids, Structures and Coupled Problems), ECCM 6, Glasgow, UK, June 11-15, 2018.
- [5] M. Chiba. *Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. Part I : Experiment*, Journal of Fluids and Structures, 6, 181-206, 1992.
- [6] M. Haßler, K. Schweizerhof. *On the static interaction of fluid and gas loaded multi-chamber systems in large deformation finite element analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197, 1725-1749, 2008.
- [7] Y. Zhou, A. Nordmark, A. Eriksson. *Instability of thin circular membranes subjected to hydro-static loads*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 76, 144-153, 2015.
- [8] F. Chinesta, P. Ladevèze, E. Cueto. *A short review on model order reduction based on PGD*, Archives of Computational Methods in Engineering, 18, 395-404, 2011.
- [9] S. Niroomandi, I. Alfaro, D. González, E. Cueto, F. Chinesta. *Model order reduction in hyperelasticity : a proper generalized decomposition approach*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 96, 129-149, 2013.
- [10] P. Ladevèze, J.-C. Passieux, D. Néron. *The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199, 1287-1296, 2010.
- [11] C. Paillet, D. Néron, P. Ladevèze. *A door to model reduction in high-dimensional parameter space*, Comptes Rendus Mécanique, 346, 524-531, 2018.