

Enrichissement des modèles réduits POD non intrusifs multiniveaux

H. Khatouri^{1,2,3}, T. Benamara², P. Breitskopf¹, V. Marguin³

¹ Laboratoire Roberval, Université Technologique de Compiègne {hanane.khatouri,piotr.breitskopf}@utc.fr

² Cenaero Belgique, {hanane.khatouri,tariq.benamara}@cenaero.be

³ Safran Aircraft Engines, {hanane.khatouri, virgile.marguin}@safran.com

Résumé — Dans un contexte où des niveaux de simulations sont disponibles, cette contribution propose un critère d'erreur permettant à terme de sélectionner les sites et les niveaux de simulations afin d'enrichir la base de l'espace vectoriel réduit, tout en maîtrisant le budget alloué aux simulations. Un benchmark analytique représentatif d'un modèle en champ complet permet de valider l'approche proposée, l'objectif étant d'intégrer la méthode proposée dans une approche plus générale de l'optimisation multidisciplinaire.

Mots clés — multifidélité, enrichissement, plan d'expériences, Proper Orthogonal Decomposition .

1 Introduction

Dans le cadre de l'optimisation multi-disciplinaire, des méthodes de substitution de modèles sont développées dans l'objectif de réduire le coût des optimisations faisant appel à des simulations, sans intervenir dans le code source des solveurs. L'exploitation des données d'entrée utilise des paramètres de la conception (Exemple : modification de géométrie d'aubages) et des données de sortie (pressions, champ de vitesses) permettant de construire le méta-modèle puis l'enrichir dans l'objectif d'améliorer sa qualité. Les principaux enjeux sont d'une part d'exploiter l'ensemble des simulations disponibles pour mettre à profit différents niveaux de coût et qualité de modèles en fonction du besoin, voire de les fusionner. Dans ce cadre, l'approche de fusion des niveaux de fidélité a été développée par Benamara 2016. Dans le cas présent, il s'agit de proposer des stratégies originales d'enrichissement du plan d'expériences, pour tirer profit des différents niveaux de fidélité du modèle en maîtrisant le budget global alloué à la simulation.

Nous proposons de fusionner les observations de fidélités variables (champs des vitesses, déplacements . . .), en construisant un espace vectoriel commun avec une variante de la POD (Proper Orthogonal Decomposition) [1]. La stratégie d'enrichissement EGO, Efficient Global Optimization et le critère EI, Expected Improvement [2] développé pour le krigeage est ici testée. Il s'agit par la suite d'évaluer différentes stratégies basées sur des critères de Guttman par exemple sur un modèle RBF [3] qui présente l'avantage d'être moins coûteux et donc utilisable en plus hautes dimensions que le krigeage.

Une nouvelle démarche consiste à mettre à profit les deux niveaux de fidélité afin de paramétrer un modèle haute fidélité HF directement par un modèle basse fidélité LF. L'écart entre les deux modèles sera exploité pour construire un critère d'enrichissement permettant à terme de choisir le nouveau point dans l'espace de conception et le niveau de simulation nécessaire.

2 La méthode à base réduite

Sous les conditions définies dans les travaux sur la base réduite, Reduced Basis RB [4], la séparation des variables est possible, les réponses approchées sont construites par combinaison linéaire des modes spatiaux. L'approche présentée s'inspire de la méthode non intrusive à base réduite, Non Intrusive Reduced Basis NIRB développée par Maday et al. [5, 6] . Elle est adaptée à la représentation de données de simulations en "boîte noire", sans intervenir dans les codes de simulation. L'objectif de la méthode est de trouver le meilleur espace d'approximation linéaire pour lequel l'erreur est définie par une petite

épaisseur de Kolmogorov.

L'idée est d'exprimer une solution HF s^{HF} par une solution LF s^{LF} . L'objectif à terme est d'utiliser deux niveaux de fidélités physiques directement sans passer par un métamodèle.

$$s^{HF} \approx \tilde{s}^{HF}(s^{LF}(\theta)) \quad (1)$$

L'ensemble des points HF et LF sont échantillonnés dans un premier temps à partir d'un plan d'expérience DOE (Design Of Experiment), comportant M points définis par un vecteur de paramètres Θ ,

$$s_j^{HF}(x, \theta_j) \approx \bar{s} + \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \langle s_j^{HF}(x, \theta_j), \phi_i(x) \rangle, \theta_j \in DOE, x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

$$s_j^{HF}(x, \theta_j) \approx \bar{s} + \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \alpha_i(\theta_j) \quad (3)$$

avec

$$\alpha_i(\theta_j) = \phi_i^T s^{HF}(\theta_j), i = 1 \dots m, j = 1 \dots M \quad (4)$$

avec \bar{s} la moyenne des clichés HF, m l'ordre de troncature de la base et n la dimension du problème tel que $m < M \ll n$. On introduit la base Φ de l'espace linéaire .

3 Définition de la multifidélité

Le modèle MF approché est construit à partir de la méthode RB présentée pour un ensemble M de clichés HF. On considère $\tilde{\alpha}_i(\theta) \approx \alpha_i(\theta)$, les coefficients de la combinaison linéaire du modèle approché

$$s^{HF}(x, \theta) \approx \bar{s} + \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \langle s^{LF}(x, \theta), \phi_i(x) \rangle, \theta \notin DOE \quad (5)$$

$$\tilde{s}(x, \theta) = \bar{s} + \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \tilde{\alpha}_i(\theta) \quad (6)$$

avec

$$\tilde{\alpha}_i(\theta) = \phi_i^T s^{LF}(\theta), i = 1 \dots m \quad (7)$$

À chaque point, la réponse est représentée en champ complet par projection du cliché LF sur la base HF. L'intérêt est d'une part de réduire le nombre d'évaluation de s^{HF} , et d'autre part d'obtenir un modèle HF directement à partir de la réponse LF. La méthode nécessite uniquement un plan d'expériences HF, et à chaque nouveau point d'évaluation le modèle LF est évalué, il n'y a pas de régression de coefficients. Une erreur existe toutefois aux points d'apprentissage, la méthode n'est pas interpolante aux points HF, donc les données du DOE ne sont pas restituées exactement :

$$\sum_{i=1}^m \phi_i(x) \phi_i^T s^{HF}(\theta_j) \neq \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \phi_i^T s^{LF}(\theta_j)$$

On se sert ainsi de cette erreur pour construire le critère d'enrichissement.

4 La stratégie d'enrichissement

La base HF pourrait être enrichie par l'ajout de points LF ou HF suivant une stratégie prenant en compte les coûts de calculs, la pertinence quant à la recherche d'optimum ou l'erreur par rapport à la référence. La donnée la plus fiable constitue la valeur de référence.

Les données LF sont exprimées dans la base HF. L'erreur d'approximation aux points d'apprentissage est contrôlée avec une correction basée sur un modèle de $\alpha^{HF}(\theta) - \tilde{\alpha}^{HF}(\alpha^{LF}(\theta))$. La correction multifidélité MF se définit par :

$$\Delta_i(\theta_j) = \phi_i^T(s^{HF}(\theta_j) - s^{LF}(\theta_j)), j \in DOE \quad (8)$$

L'erreur $\Delta_i(\theta)$ servira de correction pour la suite et sera corrigée durant l'optimisation :

$$\tilde{\Delta}_i(\theta) \approx \Delta_i(\theta) \quad (9)$$

Par la suite, le modèle approché est défini comme

$$\tilde{s}^{MF}(\theta) = \bar{s} + \sum_{i=1}^m \phi_i \phi_i^T s^{LF}(\theta) + \tilde{\Delta}_i(\theta) \quad (10)$$

L'idée est d'appliquer un modèle d'approximation $\tilde{\Delta}_i(\theta)$ sur les points $\Delta_i(\theta)$ pour corriger le modèle et faire évoluer cette correction avec des points "bien" choisis. Le krigeage fournit l'approximation et la variance de $\Delta_i(\theta)$ qui est exploitée pour le choix d'un point d'enrichissement. Cette idée a été développée dans [2], dans le cadre de l'Efficient Global Optimization EGO.

La prédiction d'un point à partir du modèle des M données échantillonnées est réalisée de manière à maximiser la vraisemblance, Maximum Likelihood Estimation MLE [7]. Le critère d'amélioration espérée Expected Improvement EI répond à cet objectif. On détermine ce point au maximum de l'EI

$$E[I(\theta)] = (\Delta_{min} - \tilde{\Delta}_i(\theta)) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\Delta_{min} - \tilde{\Delta}_i(\theta)}{\hat{\gamma} \sqrt{2}} \right) \right] + \hat{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\Delta_{min} - \tilde{\Delta}_i(\theta))^2}{2\hat{\gamma}^2} \right] \quad (11)$$

avec $\hat{\gamma}^2(\theta)$ l'erreur moyenne quadratique du processus gaussien sous-jacent.

5 Application

Pour illustrer les méthodes présentées, un modèle analytique multifidélité inspiré de la fonction à deux niveaux de fidélités de Forrester et al. 2007 [8] est adaptée par Benamara et al. [1] de manière à être représentatifs d'un problème d'optimisation aérodynamique. L'aspect multi-modal se retrouve dans l'expression de l'objectif d'efficacité par exemple, que l'on retrouve dans les calculs sur les aubes de turbine basse pression de moteur aéronautique.

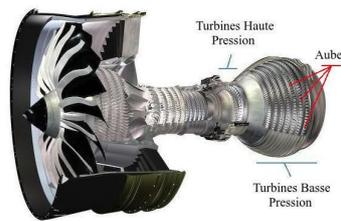


FIGURE 1 – Moteur LEAP développé par SAFRAN [9]

On considère un espace \mathcal{D} dans \mathbb{R}^2 tel que $\mathcal{D} = [4, 6] \times [10, 14]$ décrit une fonction continue HF définie par y

$$\begin{aligned} y_{\theta}(x) &: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}_h(\mathbb{R}^{[0,1]}) \\ \theta &\mapsto \frac{1}{2}(6x-2)^2 \sin(\theta_2 x - 4) + \sin(10 \cos(\theta_1 x)) \end{aligned}$$

et une fonction LF z

$$\begin{aligned} z_{\theta}(x) &: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}_l(\mathbb{R}^{[0,1]}) \\ \theta &\mapsto \frac{1}{2}(6x-2)^2 \sin(\theta_2 x - 4) + 10(x - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

La modélisation s'effectue à partir d'un plan d'expérience DOE Design Of Experiment du type Latin Hypercube Sampling LHS. On considère un échantillon de M points sur le plan d'expériences des paramètres à deux dimensions θ_1 et θ_2 , soit $x \in \mathbb{R}^n$ avec $n > M$.

La figure 1 (gauche) représente l'échantillonnage $M=3$ réalisé sur les données de fonctions HF et LF pour une valeur de discrétisation $n=100$. Sur l'ensemble est évalué la différence entre les fonctions MF et LF, approchée par le métamodèle de krigeage interpolant les points d'apprentissage du DOE figure 1 (droite). Les valeurs de la fonction HF, LF et MF sont évalués sur un point $\theta(4.95, 11.67)$ de la grille de validation figure 1 (milieu).

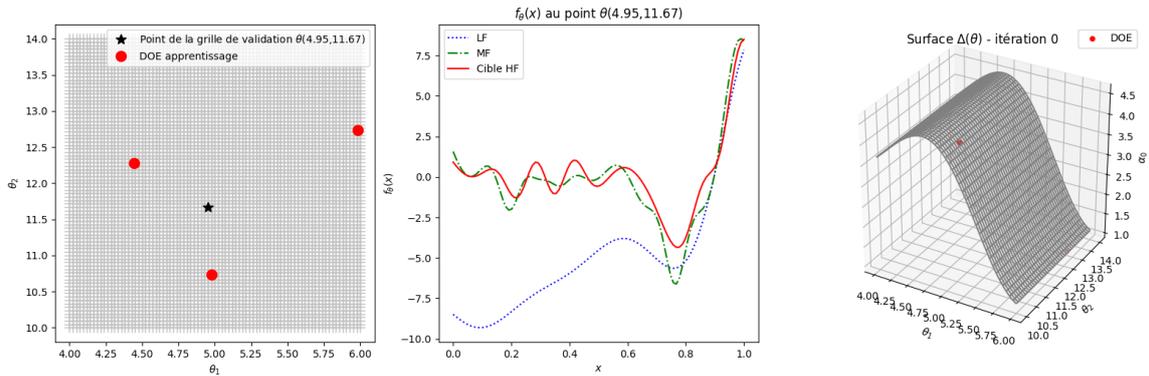


FIGURE 2 – Evaluation de modèles HF et MF à partir d'un DOE à 3 points avec la surface de correction correspondante

La fonction LF est évaluée sur 3 points du DOE initial. On obtient une matrice à $S_{(100,3)}$ correspondant à un point par mode pour n lignes de la discrétisation. Sur la figure 1 (milieu), on peut observer que la fonction LF (bleu pointillé) présente moins d'oscillations que la courbe HF (rouge continue). Il est intéressant d'observer également que la fonction MF (verte) capte la tendance globale de HF. Les clichés HF, MF et MF corrigées sont projetées dans la base HF pour obtenir les coefficients $\alpha^{MF}(\theta)$ tel que $S^{MF}(x, \theta) = \Phi(x)\alpha^{MF}(\theta)$. Sur la figure 3 on peut visualiser les différences entre la représentation des modes pour les données HF et MF.

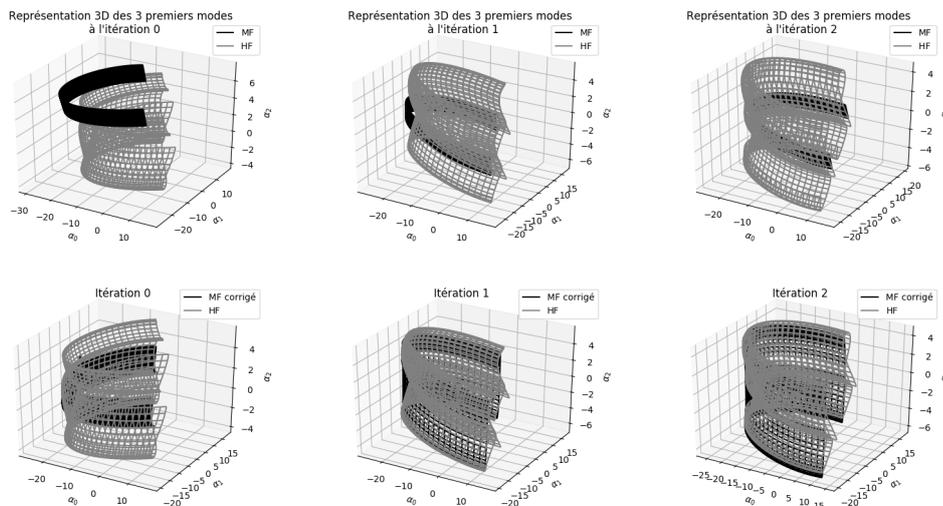


FIGURE 3 – Manifold des coefficients HF et MF

Le nombre de modes HF est supérieur à celui capté par la fonction MF. On observe bien, sur la représentation des trois premiers coefficients MF, que la projection des clichés LF sur la base HF représente une surface 2D tandis que l'espace HF varie sur les trois composantes de la base. Les éléments manquants aux fonctions MF sont évalués à partir de Δ .

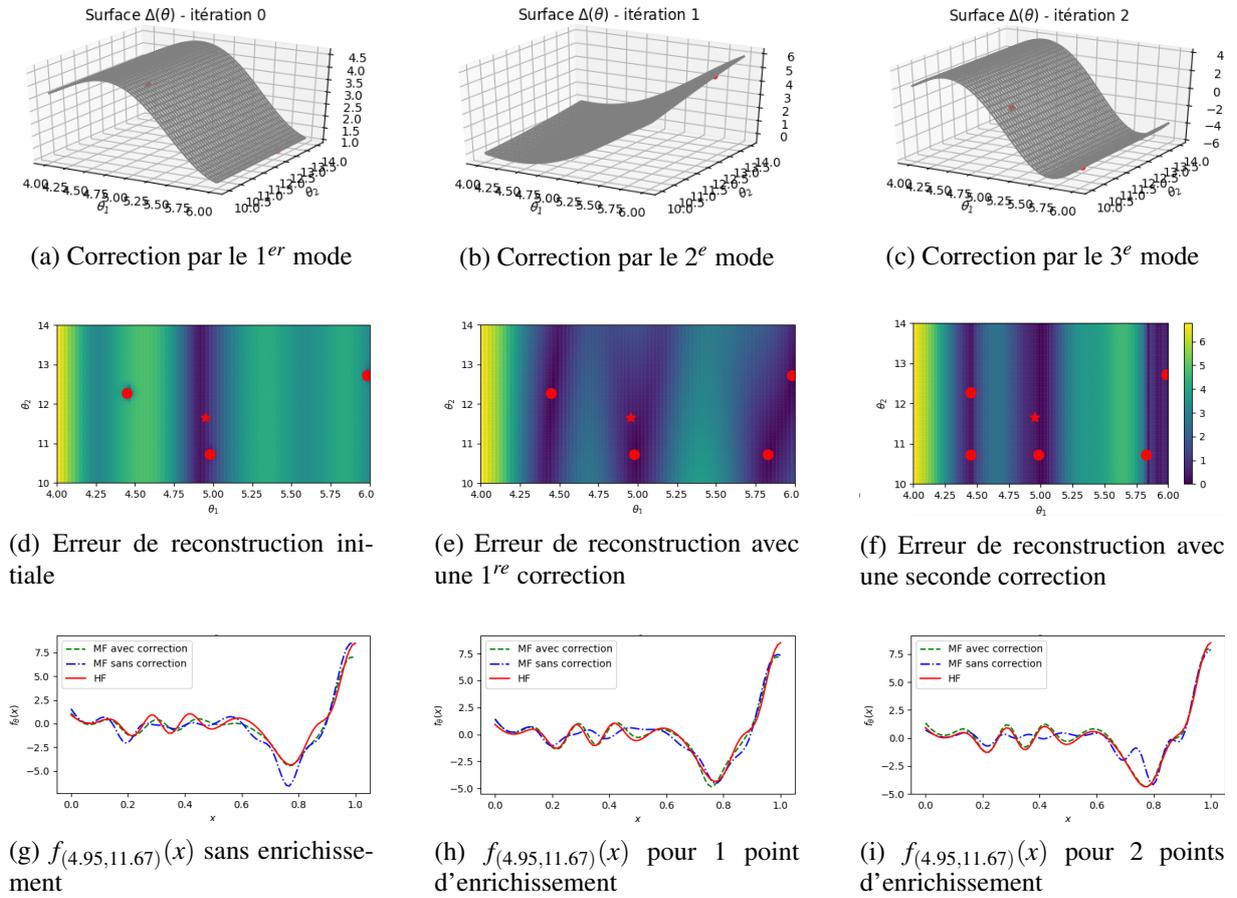


FIGURE 4 – Evaluation des courbes multifidélité NIRB pour un enrichissement de 2 points et l'erreur correspondante

La figure 3 présente les fonctions obtenues pour un point de la grille (g), (h) et (i) et l'erreur sur l'ensemble de la grille (d), (e) et (f). Au niveau des points d'enrichissement, l'erreur est proche de 0. Sur les trois itérations, elle diminue sur l'ensemble la grille de validation. Les surfaces d'erreurs (a), (b) et (c) sont évaluées sur les trois premiers modes les plus impactants. Deux points sont fournis par le critère EI (1 point à chaque itération) sur la surface de réponse Δ .

Pour le point choisi $\theta(4.95, 11.67)$ (étoile rouge), on observe une amélioration de la fonction NIRB MF avec correction et de MF sans correction, ces courbes se rapprochent de la courbe HF. A la troisième itération, la fonction MF corrigée est similaire à la courbe HF. Dans cet exemple, la surface de correction a été réduite par l'enrichissement, l'amélioration est bien observable sur la courbe avec la correction.

6 Conclusion

La régression se fait uniquement sur la différence entre HF et LF supposée régulière, sa représentation nécessite un échantillonnage plus faible que pour le modèle complet. Dans le cas limite où les deux niveaux de fidélités sont identiques, l'interpolation HF permet de retrouver la solution exacte. D'autre part, la méthode nécessite seulement un plan d'expérience HF, le modèle LF est toujours évalué au point d'évaluation.

La fonction analytique choisie confirme l'intérêt d'explorer cette méthode et proposer des améliorations pour des cas tests industriels. Il serait également intéressant de comparer cette méthode à la MFNIPOD qui propose une base multifidélité. Enfin, l'utilisation du critère EI pourrait être comparé au critère de Guttman pour une surface de réponse RBF, le krigeage étant limité en hautes dimensions. L'objectif à terme est de déterminer les limites de la méthode dans des cas réels et proposer un algorithme adapté à deux niveaux de fidélités ou plus.

Références

- [1] Tariq Benamara. *Full-field Multi-Fidelity Surrogate Models for Optimal Design of Turbomachines*. PhD thesis, 2017.
- [2] D.R. Jones and M. Schonlau. Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions. *Journal of Global Optimization*, page 38, 1998.
- [3] Cedric Durantin. Métamodélisation et optimisation de dispositifs photoniques. page 157, 2018.
- [4] R. Chakir, Y. Maday, and P. Parnaudeau. A non-intrusive reduced basis approach for parametrized heat transfer problems. *Journal of Computational Physics*, 376 :617–633, January 2019.
- [5] Yvon Maday. Reduced basis method for the rapid and reliable solution of partial differential equations. In Marta Sanz-Solé, Javier Soria, Juan Luis Varona, and Joan Verdera, editors, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians Madrid, August 22–30, 2006*, pages 1255–1270. European Mathematical Society Publishing House, Zuerich, Switzerland, May 2007.
- [6] Mario Bebendorf, Yvon Maday, and Benjamin Stamm. Comparison of Some Reduced Representation Approximations. In Alfio Quarteroni and Gianluigi Rozza, editors, *Reduced Order Methods for Modeling and Computational Reduction*, pages 67–100. Springer International Publishing, Cham, 2014.
- [7] Alexander I.J. Forrester and Andy J. Keane. Recent advances in surrogate-based optimization. *Progress in Aerospace Sciences*, 45(1-3) :50–79, January 2009.
- [8] Alexander I.J. Forrester, András Sóbester, and Andy J. Keane. Multi-fidelity optimization via surrogate modelling. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2088) :3251–3269, December 2007.
- [9] Kevin Dugois. *Simulation à l'échelle microscopique et analyse macroscopique de l'imprégnation d'un matériau composite par un fluide chargé en particules*. PhD thesis, 2017.