

Dynamique non-linéaire de treillis par approche ondulatoire multi-harmonique

B. Chouvion¹

¹ LTDS, UMR CNRS 5513, Ecole Centrale de Lyon, benjamin.chouvion@ec-lyon.fr

Résumé — Une approche ondulatoire est proposée pour simuler la dynamique de structures de type treillis présentant des non-linéarités localisées. Le déplacement dans chaque élément du treillis est exprimé comme une somme d'ondes multi-harmoniques. Les amplitudes de ces ondes sont les inconnues du système algébrique à résoudre obtenu après équilibrage harmonique des équations caractéristiques des différentes discontinuités. Cette approche continue offre un gain de temps important par rapport à la méthode classique d'équilibrage harmonique d'un modèle discrétisé par éléments finis.

Mots clés — non-linéarités localisées, propagation d'ondes, équilibrage harmonique

1 Introduction

Ce travail est motivé par la volonté de pouvoir traiter efficacement la dynamique non-linéaire de systèmes de type treillis (assemblage de poutres et de masses discrètes) car ceux-ci sont souvent utilisés en simulation lors de l'étape de pré-dimensionnement de modèles industriels 3D complexes. On peut, entre autres, citer des études sur la dynamique de roues aubagées où les pales sont initialement modélisées par des poutres [1, 9]. On retrouve aussi les treillis comme représentation de systèmes réellement composés d'assemblage de barres et de poutres, comme par exemple les ponts et charpentes en génie civil, ou même de nombreux types de micro-capteurs [17].

Afin d'éviter une discrétisation en éléments finis (EF) qui peut amener à des systèmes lourds du point de vue du nombre de variables, des méthodes de résolution sans maillage adaptées aux treillis, comme par exemple la méthode de la rigidité dynamique [11] ou l'approche ondulatoire [8, 10, 6, 14], ont fait leurs preuves dans le domaine linéaire. En revanche dans le domaine non-linéaire, ces méthodes ne sont plus si simples car il faut alors prédire correctement l'interaction non-linéaire entre les éléments structurels. L'approche ondulatoire reste tout de même prometteuse car elle permet de simuler la dynamique du système tout en s'affranchissant des approximations apportées par une discrétisation (contrairement à l'approche EF ou même à une approche modale). Elle est, de ce fait, remarquablement bien adaptée à l'analyse de structures dans le domaine des hautes fréquences où une analyse EF requiert généralement un maillage fin afin de séparer d'éventuels modes proches en fréquence. L'objectif du travail proposé ici est ainsi la généralisation de l'approche ondulatoire, dont la formulation linéaire a été détaillée dans [6], pour traiter des systèmes de type treillis présentant des non-linéarités. Plus de détails sur le développement de cette méthode, ainsi que des études plus approfondies de convergence et de validation, pourront être trouvés dans [4].

2 Présentation de l'approche ondulatoire multi-harmonique

2.1 Généralités et formulation des déplacements

L'idée générale de l'approche ondulatoire est de décomposer la structure en différents éléments (à comprendre ici au sens d'une structure guide d'ondes élémentaire, comme une poutre par exemple) couplés par différentes discontinuités (connexion entre éléments, ajout de raideurs ou masses ponctuelles, conditions limites, etc.). L'évaluation du déplacement dans la structure n'est pas approximé par une discrétisation mais est exprimé par une représentation continue exacte sur chaque guide d'ondes. Les discontinuités de la structure vont affecter le comportement (dispersion, atténuation, changement de

phase, etc.) des ondes qui se propagent et se transmettent d'élément à élément.

En utilisant les travaux de Vakakis [15] qui a montré qu'une onde incidente sur une non-linéarité génère des ondes réfléchies avec des fréquences égales à des multiples de la fréquence de l'onde incidente, le déplacement dans chaque élément de la structure sera défini comme la somme d'ondes associées à la fréquence fondamentale et ses harmoniques. Brennan et al. [13, 2] ont récemment utilisé une approximation mono-harmonique dans leur approche ondulatoire appliquée à un système composé d'une poutre seule ayant pour condition limite une non-linéarité dont l'effet était supposé faible. Dans la suite, grâce à une description multi-harmonique, aucune hypothèse ne sera faite sur l'effet de la non-linéarité. De plus, en utilisant l'approche matricielle présentée pour des problèmes linéaires dans [6] pour rendre compte de la progression des ondes et du couplage des différents éléments au sein de la structure, la méthode proposée se verra plus générale et pourra traiter n'importe quel type de structure en treillis.

Une représentation simplifiée du type de structures considérées et du phénomène de propagation et réflexion des ondes est illustrée dans la Figure 1. Les ondes se transmettent à travers la structure aux points de discontinuités qui définissent les bornes des éléments. Lorsque qu'une onde est incidente sur une non-linéarité (dont la force associée est notée f_{nl} sur la figure), celle-ci enrichit le spectre fréquentiel de la réponse en créant des ondes avec de nouvelles harmoniques qui vont à leur tour se propager.

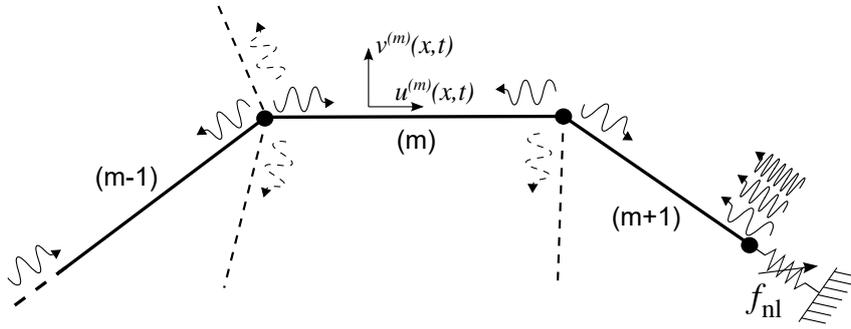


FIGURE 1 – Propagation et transmission d'ondes dans une structure de type treillis – illustration de la création de nouvelles harmoniques lorsqu'une onde est incidente sur une non-linéarité.

La manière d'aborder les effets non-linéaires est similaire à la méthode d'équilibrage harmonique (HBM) appliquée à un modèle EF (notée par la suite EF-HBM) dans laquelle la solution stationnaire du problème est supposée être une solution périodique multi-harmonique. Ici, on utilisera comme inconnues les amplitudes d'ondes multi-harmoniques à la place des projections dans une base de Fourier des degrés de liberté nodaux d'un maillage EF.

Le déplacement transverse, noté $v^{(m)}$, et le déplacement longitudinal, noté $u^{(m)}$ de chaque élément (m), supposé être ici une poutre d'Euler-Bernoulli droite, sont donnés dans l'approche ondulatoire multi-harmonique par les relations suivantes. Celles-ci décrivent la réponse stationnaire périodique de la structure.

$$u^{(m)}(x,t) = \sum_{i=1}^2 U_i^{(m)} N_i^l(x) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_h} \left(\left(\hat{u}_p^{(m)+} e^{-ik_p^l x} + \hat{u}_p^{(m)-} e^{ik_p^l (x-L^{(m)})} \right) e^{ip\omega t} + c.c \right), \quad (1a)$$

$$v^{(m)}(x,t) = \sum_{i=1}^4 V_i^{(m)} N_i^f(x) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_h} \left(\left(\hat{v}_p^{(m)+} e^{-ik_p^f x} + \hat{v}_p^{(m)-} e^{ik_p^f (x-L^{(m)})} + \hat{w}_p^{(m)+} e^{-k_p^f x} + \hat{w}_p^{(m)-} e^{k_p^f (x-L^{(m)})} \right) e^{ip\omega t} + c.c \right). \quad (1b)$$

Les deuxièmes termes des relations (1) traduisent le fait que les déplacements sont écrits en utilisant une somme d'ondes associées à la fréquence fondamentale et ses harmoniques. Dans ces relations les amplitudes des ondes longitudinale, transverse progressive et transverse évanescente sont respectivement $\hat{u}^{(m)}$, $\hat{v}^{(m)}$ et $\hat{w}^{(m)}$. Ces ondes se déplacent dans les deux directions de l'élément (m) (direction signalée par l'exposant + ou - associé à l'amplitude). L'indice p fait référence à l'harmonique considérée. Le nombre d'harmoniques total pris en compte est N_h . Les nombres d'onde sont notés k_p^l (déplacement longitudinal) et k_p^f (déplacement transverse). Ils sont fonction de l'harmonique en question et donc de la

fréquence $p\omega$, où ω est la fréquence fondamentale de l'excitation. La coordonnée x est locale à l'élément (m) et varie entre 0 et la longueur $L^{(m)}$ de cet élément. Les amplitudes des ondes sont des nombres complexes et c.c signifie le complexe conjugué. Les déplacements u et v sont donc bien des valeurs réelles.

Les premiers termes des relations (1) traduisent l'harmonique 0 de la réponse. Ils sont utilisés pour rendre possible une déformation statique de la structure ou un "offset" constant éventuellement créé par effet non-linéaire. Les variables $U_i^{(m)}$ et $V_i^{(m)}$ représentent simplement les déplacements longitudinaux, transverses, et les rotations aux différents points de discontinuité. Ils sont identiques aux degrés de liberté d'un élément de type poutre Euler-Bernoulli dans la méthode EF classique. Adjoints à ces inconnues statiques, on retrouve les fonctions $N_1^l(x)$ et $N_2^l(x)$ qui sont les fonctions de forme utilisées pour ce type d'élément. On a par exemple pour le déplacement longitudinal : $N_1^l(x) = 1 - x/L^{(m)}$ et $N_2^l(x) = x/L^{(m)}$.

2.2 Equation caractéristique

Après équilibrage harmonique de toutes les équations caractérisant la continuité des déplacements et l'équilibre des forces aux différentes discontinuités du système prises indépendamment les unes des autres (voir un exemple détaillé dans [6]), la dynamique de la structure se définit par l'équation algébrique suivante :

$$\mathbf{Z}(\omega)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{f}_{\text{ext}}(\omega). \quad (2)$$

avec

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{nl},0} \\ \mathbf{f}_{\text{nl}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{T}\mathbf{D}_F\mathbf{a}_F \end{bmatrix}$$

Dans cette équation (2), les inconnues du système sont les composantes du vecteur $\hat{\mathbf{x}}$. Ce vecteur contient les déplacements statiques aux discontinuités (les $U_i^{(m)}$ et $V_i^{(m)}$ de (1), composantes de \mathbf{a}_0) ainsi que les amplitudes de chacune des harmoniques des ondes (les $\hat{u}_p^{(m)\pm}$, $\hat{v}_p^{(m)\pm}$ et $\hat{w}_p^{(m)\pm}$ de (1), composantes de \mathbf{a}). La matrice \mathbf{K}_0 est une matrice classique de raideur linéaire. Elle est identique à la matrice de raideur du modèle EF de la structure treillis complète dans lequel chaque élément poutre (au sens utilisé jusqu'à présent pour l'approche ondulatoire, i.e. un guide d'ondes défini entre deux discontinuités) n'est discrétisé que par un seul élément fini. Cette matrice est associée aux degrés de liberté des points de discontinuités exprimés dans \mathbf{a}_0 . \mathbf{I} est la matrice identité.

La principale difficulté de l'approche ondulatoire réside dans une connaissance détaillée des caractéristiques de transmission et réflexion des ondes aux discontinuités de la structure. Les coefficients de transmission linéaires sont regroupés dans la matrice \mathbf{T} de l'équation (2). Ils expriment directement les relations entre ondes incidentes et ondes réfléchies ou transmises. Ces coefficients sont généralement fonction de l'harmonique considérée. Les effets non-linéaires aux discontinuités sont eux traités séparément et définis dans le vecteur appelé $\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}$. Ce vecteur contient ainsi les différentes harmoniques des ondes créées par les effets non-linéaires : $\mathbf{f}_{\text{nl},0}$ pour l'harmonique 0 et \mathbf{f}_{nl} pour les harmoniques 1 à N_h . Les matrices \mathbf{D} et \mathbf{D}_F expriment respectivement la propagation des ondes (changement de phase et amortissement éventuel) le long des éléments, et entre le(s) point(s) d'application des efforts extérieurs et les discontinuités adjacentes. On y retrouve par exemple la composante $e^{-ik_p L^{(m)}}$ associée à une onde longitudinale d'harmonique p définie sur l'élément (m).

Les efforts extérieurs sont pris en compte dans les termes \mathbf{f}_0 et \mathbf{a}_F . Ceux-ci représentent respectivement les efforts statiques appliqués aux points de discontinuités et les amplitudes des ondes créées par la partie harmonique des efforts extérieurs.

L'équation du problème explicitée en (2) est ainsi posée sous une forme semblable à la méthode EF-HBM. Cependant, dans l'équation (2), une grande partie des inconnues représente des amplitudes d'ondes et non des projections sur la base de Fourier des degrés de liberté d'une discrétisation EF. Ainsi la matrice \mathbf{Z} renseigne de notions de propagation et de transmission d'ondes, et non de masse et de raideur du système discrétisé. Tout comme dans la méthode EF-HBM, cette équation est résolue par un algorithme itératif en utilisant, si nécessaire, des techniques de continuation pour suivre une branche périodique de solutions. Au cours des différentes itérations de l'algorithme de résolution, les effets non-linéaires (le terme $\hat{\mathbf{f}}_{\text{nl}}$) sont évalués grâce à la méthode dite d'alternance temps-fréquence ou AFT [3].

Pour une certaine fréquence d'excitation, une fois les amplitudes des ondes trouvées, le déplacement en tout point de la structure est reconstitué en utilisant (1).

3 Validation

La méthode présentée brièvement en Section 2 est ici validée par comparaison avec des résultats issus d'intégrations temporelles et de la méthode EF-HBM. Pour illustration, deux cas d'étude sont présentés. Les valeurs numériques utilisées dans ces simulations sont données dans [4].

On s'intéresse premièrement à une représentation simplifiée d'une pale de turbomachine avec un amortisseur sous plateforme. Le système est représenté Figure 2(a). La force non-linéaire appliquée est de type frottement sec ; elle est simulée sous une forme régularisée. La Figure 2(b) illustre l'amplitude du déplacement transverse en bout de poutre calculé par l'approche ondulatoire en fonction de la fréquence d'excitation, aux alentours de la première fréquence propre linéaire. La convergence lorsque le nombre d'harmoniques augmente y est démontrée par comparaison avec une solution obtenue par intégration temporelle d'un modèle EF du système (utilisant des éléments de type poutre Euler-Bernoulli).

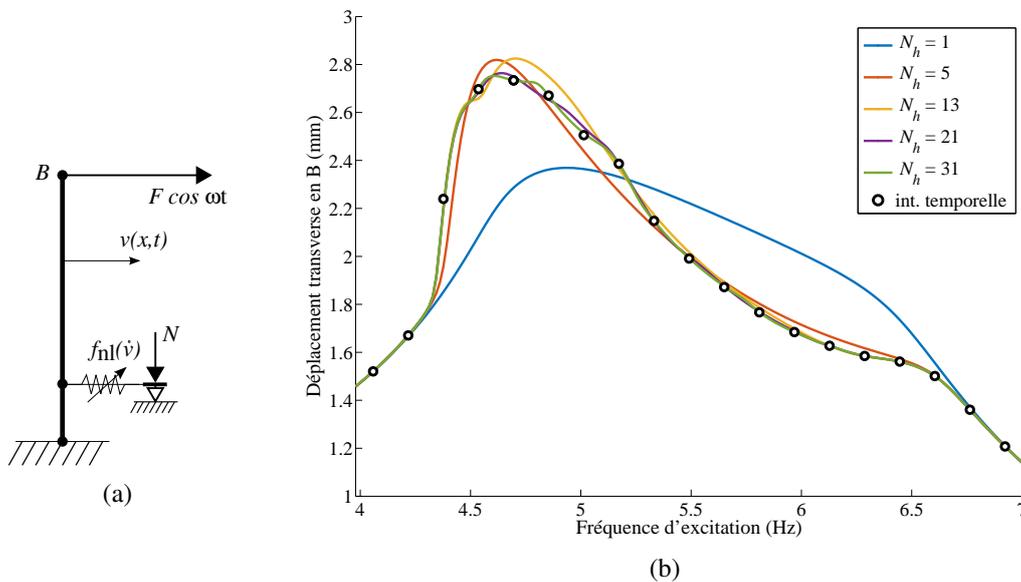


FIGURE 2 – Poutre encadrée-libre avec une non-linéarité de type frottement sec. (a) Illustration du système. (b) Amplitude du déplacement transverse en bout de poutre en fonction de la fréquence d'excitation et du nombre d'harmoniques – comparaison entre approche ondulatoire multi-harmonique et intégrations temporelles d'un système EF équivalent.

Le deuxième exemple proposé est une structure treillis en forme de L avec une condition limite qui regroupe des effets linéaires (raideur et amortissement visqueux) et une non-linéarité polynomiale (avec des termes quadratique et cubique). Le système est illustré dans la Figure 3(a). Celui-ci est utilisé pour valider les points suivants :

- le couplage entre ondes longitudinales et ondes transverses ;
- le calcul des coefficients de transmission à une jonction entre éléments, point de départ de la modélisation de structures treillis quelconques ;
- la méthodologie pour dissocier dans (2) les effets linéaires des effets non-linéaires d'une condition limite quelconque ;
- la prise en compte des termes d'harmonique 0 qui seront créés par la composante quadratique de l'effet non-linéaire.

La Figure 3(b) représente l'amplitude du déplacement longitudinal au point A en fonction de la fréquence d'excitation dans un domaine de hautes fréquences (aux alentours du vingtième mode linéaire). Il a été calculé, avec un nombre d'harmoniques fixé, par la méthode proposée et par la méthode EF-HBM pour différentes discrétisations EF. On remarque que la méthode EF-HBM converge vers la solution ondulatoire lorsque le nombre d'éléments augmente. L'approche ondulatoire multi-harmonique est en fait de meilleure qualité que la méthode EF-HBM car on évite une approximation par discrétisation EF

puisque la solution est directement recherchée de façon continue. Dans la méthode EF-HBM, environ 280 degrés de libertés sont nécessaires pour atteindre la convergence. En utilisant $N_h = 3$, le nombre d'inconnues à résoudre est d'environ 2000. Mis en regard des 81 inconnues de l'approche ondulatoire, le gain en temps de calcul correspondant est notable : celui-ci est réduit d'un facteur 20 environ sans effort particulier d'optimisation de code.

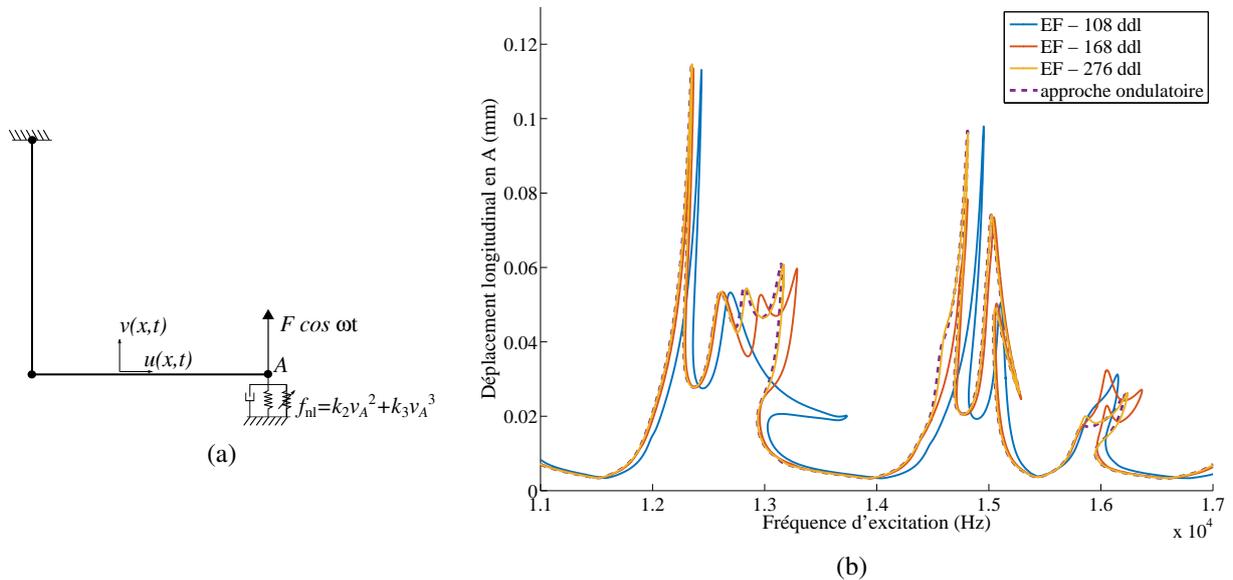


FIGURE 3 – Système de type treillis sous forme de L avec comme condition limite une force linéaire et une non-linéarité polynomiale. (a) Illustration du système. (b) Amplitude du déplacement longitudinal au point d'application de la non-linéarité en fonction de la fréquence d'excitation – comparaison entre approche ondulatoire multi-harmonique et méthode EF-HBM pour différentes discrétisations EF.

4 Application sur une poutre avec absorbeur d'énergie non-linéaire

L'influence d'un absorbeur d'énergie non-linéaire (appelé NES par la suite) sur une structure primaire a été l'objet de nombreuses études [16]. La dynamique du système est complexe et présente de nombreux points de bifurcation. On propose ici d'utiliser l'approche ondulatoire multi-harmonique présentée précédemment sur un système composé d'une poutre bi-encastée et d'un NES (masse attachée à la poutre par une raideur cubique et un amortisseur linéaire). Le système considéré est illustré dans la Figure 4(a).

La Figure 4(b) montre l'influence de l'effet non-linéaire sur l'amplitude vibratoire. Les valeurs numériques utilisées sont données dans [5]. On remarque sur cette figure une très grande variabilité de l'amplitude maximale de vibration sur la plage de fréquence considérée (autour du premier mode linéaire) en fonction de la valeur de la non-linéarité. On montre aussi l'existence de solutions sous forme de courbes fermées dans le plan fréquence - amplitude qui se rattachent à la courbe principale lorsque l'effet non-linéaire augmente. La Figure 4(b) illustre également la déformation, avec différents facteurs d'échelles, du système pour trois points de fonctionnement stables caractéristiques. La notion de stabilité est hors des objectifs du travail présenté ici mais plus de détails peuvent être trouvés dans [5]. Il est notamment intéressant de voir qu'à une fréquence donnée, deux déformées antagonistes (la poutre et le NES sont soit en phase soit en opposition de phase) sont associées à des amplitudes vibratoires foncièrement différentes (facteur $\times 10$ environ). Ceci s'explique par le fait que l'énergie dissipée dans l'amortisseur du NES est beaucoup plus faible lorsque la masse du NES bouge en phase avec la poutre.

Le fait de montrer l'existence de courbes fermées pour des problèmes avec un NES n'est pas original, voir par exemple [12]. En revanche, la méthode utilisée pour y arriver l'est et celle-ci mérite les quelques explications résumées ci-dessous. La démarche générale est la suivante :

1. Calculer la courbe de résonance principale pour une valeur de raideur non-linéaire relativement faible par continuation "classique" (avec ω comme paramètre de continuation).

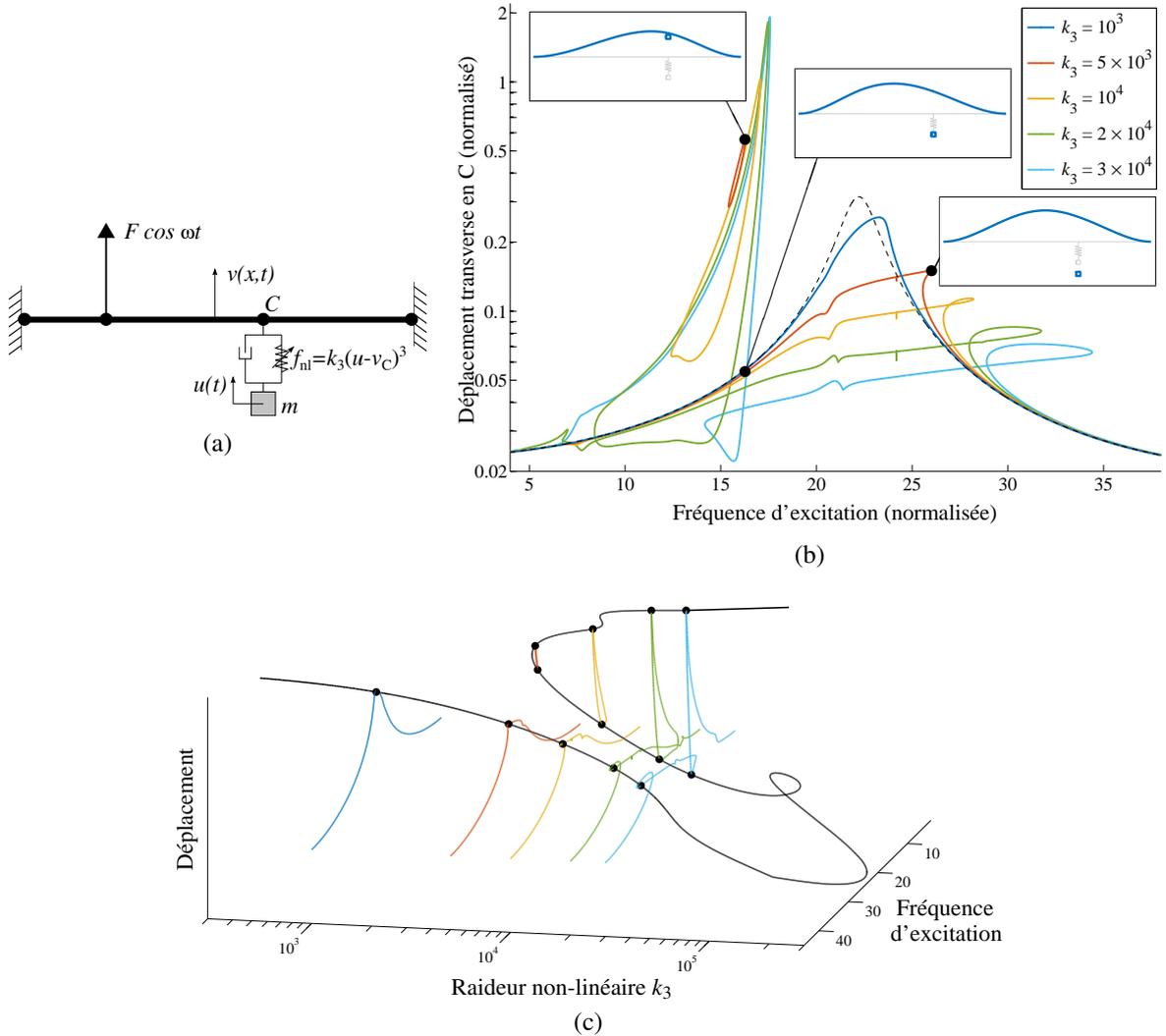


FIGURE 4 – Poutre bi-encastée avec un NES. (a) Illustration du système. (b) Amplitude (normalisée, et en échelle log) de la réponse au point d’application du NES en fonction de la fréquence d’excitation – influence de la raideur non-linéaire. Le mode linéaire est tracé en ligne pointillée. (c) Continuation sur la raideur non-linéaire avec une équation de phase imposée.

2. Détecter le point où la différence de phase entre la réponse et l’excitation saute de π . Ceci est caractéristique de la résonance pour un système linéaire. Pour une réponse multi-harmonique d’un système non-linéaire, la notion de phase est difficile à définir, et on utilisera alors par la suite la différence de phase entre la première harmonique (uniquement) de la réponse et l’excitation.
3. Effectuer une nouvelle procédure de continuation en utilisant la raideur non-linéaire comme paramètre de continuation. Le système est alors sous-déterminé et on impose comme équation supplémentaire une phase de $\pi/2$ entre la réponse et l’excitation. Cette continuation est initiée sur le pic de résonance trouvé en étape 2. Elle est illustrée en ligne noire dans la Figure 4(c).
4. Pour des valeurs de raideur non-linéaires données, les points où la nouvelle courbe coupe les plans fréquence - amplitudes sont utilisés comme initialisations de nouvelles procédures de continuation "classique" (sur ω). Ces dernières courbes vont alors soit venir se superposer à la courbe de résonance principale, soit former des courbes fermées.

Cette méthodologie est similaire à la méthode de suivi de bifurcation présentée notamment dans [7]. Cependant, l’approche détaillée ici suit la résonance par une condition de phase, alors que celle-ci est suivie par une équation caractéristique de la bifurcation de type point de retournement dans [7].

5 Conclusion

Une méthode originale pour simuler la dynamique non-linéaire de treillis a été présentée. Celle-ci est basée sur une approche ondulatoire qui considère la propagation et la transmission d'ondes vibratoires multi-harmoniques à travers différents éléments. Les effets non-linéaires sont traités grâce à la méthode d'équilibrage harmonique qui apparaît naturellement puisque le déplacement est déjà exprimé dans le domaine fréquentiel (utilisation d'ondes). La méthode a été validée par comparaison avec un modèle EF, et a été utilisée pour déceler des courbes fermées d'une manière originale d'un système avec absorbeur d'énergie non-linéaire.

Les principales hypothèses et contraintes de l'approche ondulatoire multi-harmonique présentée, non communes avec la méthode plus classique d'EF-HBM, sont résumées ci-dessous.

- On ne peut modéliser que des structures de type treillis formées d'assemblage de poutres, de barres, et de masses discrètes. La théorie développée ici est basée sur un assemblage 2D de poutres droites d'Euler-Bernoulli mais son extension à des poutres de Timoshenko, à des poutres courbes, et à des problèmes 3D ne devrait pas présenter de difficultés majeures. Les éléments doivent cependant rester des guides d'ondes unidirectionnels.
- Les non-linéarités doivent être localisées. Elles peuvent tout de même rester assez générales grâce à la méthode numérique utilisée pour traiter leurs effets.

En revanche, pour représenter une même structure, les avantages de l'approche ondulatoire multi-harmonique par rapport à la méthode EF-HBM sont :

- Le nombre de variables et le coût de résolution associé sont réduits.
- La solution ne dépend pas de la qualité de la discrétisation EF ; ce qui rend la méthode bien adaptée à des simulations sur de larges bandes de fréquences.
- L'approche ondulatoire renseigne intrinsèquement de notions de transmission et dissipation d'énergie au travers des discontinuités. Ceci est particulièrement intéressant pour des études de contrôle de la répartition énergétique dans la structure (absorption, localisation, etc.).

Malgré certaines contraintes inhérentes à l'équilibrage harmonique, utiliser une approche ondulatoire plutôt qu'une discrétisation EF est ainsi un moyen astucieux de modéliser les vibrations non-linéaires de structures à géométrie simple car il permet de réduire le coût numérique tout en gagnant des possibilités d'interprétation physique de la répartition vibratoire dans la structure.

Références

- [1] P. Almeida, C. Gibert, F. Thouverez, X. Leblanc et J.-P. Ousty : Numerical analysis of bladed disk-casing contact with friction and wear. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 138:122802, 2016.
- [2] M. J. Brennan, E. Manconi, B. Tang et V. Lopes Jr : Wave reflection at the end of a waveguide supported by a nonlinear spring. Eurodyn 2014 : IX International Conference On Structural Dynamics. Munich., 2014.
- [3] T. M. Cameron et J. H. Griffin : An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1):149–154, 1989.
- [4] B. Chouvion : Vibration analysis of beam structures with localized nonlinearities by a wave approach. *Journal of Sound and Vibration*, 439:344–361, 2019.
- [5] B. Chouvion : A wave approach to show the existence of detached resonant curves in the frequency response of a beam with an attached nonlinear energy sink. *Mechanics Research Communications*, 95:16–22, 2019.
- [6] B. Chouvion, C. H. J. Fox, S. McWilliam et A. A. Popov : In-plane free vibration analysis of combined ring-beam structural systems by wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 329:5087–5104, 2010.
- [7] T. Detroux, L. Renson, L. Masset et G. Kerschen : The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 296:18–38, 2015.
- [8] K. F. Graff : *Wave motion in Elastic Solids*. Ohio State University Press, 1975.
- [9] M. Legrand, C. Pierre, P. Cartraud et J. P. Lombard : Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 319:366–391, 2009.
- [10] B. R. Mace : Power flow between two continuous one-dimensional subsystems : A wave solution. *Journal of Sound and Vibration*, 154(2):289–319, 1992.
- [11] T. H. Richards et Y. T. Leung : An accurate method in structural vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 55(3):363–376, 1977.

- [12] Y. Starosvetsky et O. V. Gendelman : Response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink with harmonic forcing and frequency detuning. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3):746–765, 2008.
- [13] B. Tang, M. J. Brennan et E. Manconi : On the use of the phase closure principle to calculate the natural frequencies of a rod or beam with nonlinear boundaries. *Journal of Sound and Vibration*, 433:461–475, 2018.
- [14] L. Tang, D. Huang, R. Cao et H. He : Vibration analysis of a multi-span rotating ring with ray tracing method. *Wave Motion*, 52:91–102, 2015.
- [15] A. F. Vakakis : Scattering of structural waves by nonlinear elastic joints. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115(4):403–410, 1993.
- [16] A. F. Vakakis, O. V. Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen et Y. S. Lee : *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems*. Springer-Verlag, 2008.
- [17] M. I. Younis : *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*. Springer, 2011.