

# Résolution numérique d'un problème d'interaction fluide-structure sandwich à l'aide d'une méthode itérative d'ordre élevé

L. Duigou<sup>1</sup>, B. Claude<sup>1</sup>, G. Girault<sup>1,2</sup>, JM. Cadou<sup>1</sup>

<sup>1</sup> IRDL, Université Bretagne Sud, {laetitia.duigou, bertille.claude, gregory.girault, jean-marc.cadou}@univ-ubs.fr

<sup>2</sup> Centre de recherche des Écoles de Saint-Cyr Coëtquidan, Écoles de Coëtquidan

**Résumé** — Dans ce travail, nous nous intéressons à un problème d'interaction fluide-structure. Une méthode de Newton d'ordre élevé est utilisée pour résoudre le problème de vibroacoustique d'une structure sandwich viscoélastique en contact avec un fluide (air ou eau). Cette méthode est basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation.

**Mots clés** — Vibration, couplage fluide-structure, viscoélasticité, homotopie, perturbation.

## 1 Introduction

La maîtrise du bruit et des vibrations est une problématique essentielle pour de nombreuses applications industrielles. En effet, le confort sonore et la sécurité des personnes ou des biens sont des préoccupations dans de nombreux domaines (transport, BTP, ingénierie civile, militaire...). Plusieurs moyens existent pour supprimer, réduire ou encore maîtriser les vibrations. Une solution est l'utilisation de structures sandwich, constituées d'une couche viscoélastique comprise entre deux couches élastiques. On parle alors d'amortissement passif.

Dans ce travail, le problème étudié concerne l'interaction entre un fluide interne et une structure sandwich viscoélastique. Il existe différentes formulations possibles pour résoudre numériquement ce problème [9]. Celle retenue est la formulation déplacement-pression. Elle présente l'avantage de n'avoir qu'une seule inconnue par noeud fluide et de ne pas générer de modes propres non-physiques. L'inconvénient est que cela mène à résoudre des systèmes non-symétriques.

Pour résoudre ce problème de vibration non linéaire, nous proposons un algorithme basé sur les techniques d'homotopie et de perturbation. Dans cette étude, la non linéarité est la dépendance du module d'Young du matériau en fonction de la pulsation.

## 2 Equations du problème

Dans cette étude, la formulation en déplacement  $u$  dans le solide et en pression  $p$  dans le fluide est choisie. Les équations du problème d'un solide entièrement rempli d'un fluide parfait compressible non pesant sont les suivantes :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_c) + \omega^2 \rho_s \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_S \quad (1a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_S = p \mathbf{n}_F \quad \text{sur } \partial\Omega_{SF} \quad (1b)$$

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad \text{in } \Omega_F \quad (1c)$$

$$\nabla(p) \cdot \mathbf{n}_F = \omega^2 \rho_f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \quad \text{sur } \partial\Omega_{SF} \quad (1d)$$

où les indices "s" et "f" indiquent respectivement les domaines solide et fluide. Les symboles  $\omega$ ,  $\rho_s$ ,  $\rho_f$  et  $c$  sont la pulsation, la masse volumique du solide et du fluide et la vitesse du son.

En utilisant la méthode des éléments finis, les équations précédentes s'écrivent sous forme discrète :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & 0 \\ \mathbf{C}' & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{P}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

avec  $K_S = K_S(0) + K_S(\omega)$

$K_S$  et  $K_F$  désignent respectivement les matrices de rigidité des domaines solides et fluides. Comme le solide considéré est une structure sandwich, la matrice de rigidité comporte une partie élastique  $K_S(0)$  à coefficients réels et constants et une matrice viscoélastique  $K_S(\omega)$ , à coefficients complexes et dépendants de  $\omega$ . Les matrices  $M_S$  et  $M_F$  sont les matrices de masse consistantes du solide et du fluide. Ce sont des matrices à coefficients réels et constants. Le couplage entre le fluide et la structure est noté  $C$ . Le problème s'écrit sous la forme généralisée suivante :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(\omega)\mathbf{K} + \Omega\mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \Omega = (i\omega)^2 \quad (3)$$

La viscosité étant modélisée par un module d'Young complexe  $E(\omega)$ , les inconnues  $U$  et  $\Omega$  sont également recherchées sous la forme complexe. La matrice de rigidité globale élastique des domaines solide et fluide  $K(0)$  et la matrice de masse globale  $M$  sont à coefficients réels et constants. Le couplage,  $C$ , conduit à des matrices  $K(0)$  et  $M$  qui sont non-symétriques.

Nous proposons de résoudre ce problème non-linéaire par un solveur d'ordre élevé basé sur les techniques d'homotopie et de perturbation.

### 3 Résolution du problème

L'algorithme proposé est un algorithme de Newton d'Ordre Elevé (NOE) basé sur la méthode de Mallil et al [8]. Les inconnues (le déplacement du solide, la pression dans le fluide et la pulsation) sont cherchées sous la forme incrémentale suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U} \\ \Omega &= \Omega_0 + \Delta\Omega \\ E(\omega) &= E_0 + \Delta E \quad \text{avec} \quad E_0 = E(\omega_0) \end{aligned} \quad (4)$$

$(U_0, \Omega_0, E_0)$  représente le point initial. Comme proposé dans [5], il est choisi comme la solution du problème conservatif [1]. Après insertion des développements (4) dans (3), il vient :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + (E_0 + \Delta E)\mathbf{K} + (\Omega_0 + \Delta\Omega)\mathbf{M}](\mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (5)$$

Ce problème s'écrit sous la forme quadratique classique (cf [8]) suivante :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} + \mathbf{Q}(\Delta\mathbf{X}, \Delta\mathbf{X}) = -\mathbf{R}_0 \quad (6)$$

où  $\Delta\mathbf{X}$  représente le vecteur inconnu :

$$\Delta\mathbf{X} = \{\Delta\mathbf{U} \quad \Delta\Omega \quad \Delta E\}^t \quad (7)$$

$R_0$  est le résidu initial :

$$\mathbf{R}_0 = [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0\mathbf{K} + \Omega_0\mathbf{M}]\mathbf{U}_0 \quad (8)$$

$\mathbf{L}_t$  et  $\mathbf{L}$  sont deux opérateurs linéaires :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} = \Delta\Omega\mathbf{M}\mathbf{U}_0 + [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0\mathbf{K} + \Omega_0\mathbf{M}]\Delta\mathbf{U} \quad (9)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} = \Delta E\mathbf{K}\mathbf{U}_0 \quad (10)$$

Le symbole  $\mathbf{Q}$  désigne un opérateur quadratique défini par :

$$\mathbf{Q}(\Delta\mathbf{X}, \Delta\mathbf{X}) = \Delta E\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} + \Delta\Omega\mathbf{M}\Delta\mathbf{U} \quad (11)$$

La deuxième étape de l'algorithme proposé consiste à appliquée la technique d'homotopie. Cela consiste à introduire un paramètre artificiel  $\varepsilon$  dans le problème à résoudre :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} + \varepsilon\mathbf{L}(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} + \mathbf{Q}(\Delta\mathbf{X}, \Delta\mathbf{X}) = -\varepsilon\mathbf{R}_0 \quad (12)$$

tel que lorsque  $\varepsilon = 0$ , le problème à résoudre est un problème "simple" et lorsque  $\varepsilon = 1$ , le problème à résoudre est le problème initial (3). A ce stade, les inconnues du problème sont cherchées sous la forme d'un développement en série tronquée à l'ordre  $N$ , en fonction du paramètre de perturbation  $\varepsilon$  :

$$\Delta \mathbf{X} = \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{X}_p \quad (13)$$

Afin d'avoir autant d'équations que d'inconnues, la condition d'orthogonalisation suivante est ajoutée :

$$\mathbf{U}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_{na} = 0 \quad (14)$$

$\mathbf{U}_{na}$  correspond au vecteur propre du système non amorti.

Le système à résoudre s'écrit donc de la façon suivante :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0) \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{X}_p + \varepsilon \mathbf{L}(\mathbf{X}_0) \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{X}_p + \mathbf{Q} \left( \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{X}_p, \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{X}_p \right) = -\varepsilon \mathbf{R}_0 \quad (15)$$

$$\left( \mathbf{U}_0 + \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{U}_p \right)^t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_{na} = 0 \quad (16)$$

L'identification suivant les puissances du paramètre  $\varepsilon$  permet de transformer le problème non linéaire (3) en une série de problèmes linéaires (17). Le système à résoudre à chaque ordre  $p$  peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{X}_p = \mathbf{F}_p \\ \mathbf{U}_p^t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_{na} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

avec le second membre  $\mathbf{F}_p$  défini comme suit :

$$\mathbf{F}_p = \begin{cases} -\mathbf{R}_0 & p = 1 \\ \mathbf{L}(\mathbf{X}_0) \mathbf{X}_{p-1} - \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{Q}(\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_{p-r}) & p \geq 2 \end{cases} \quad (18)$$

Le second membre ne dépend que des termes aux ordres précédents.

On peut noter qu'à tous les ordres, le même opérateur  $L_t$  apparaît. Il est donc calculé et triangulé une seule fois pour tous les ordres de troncature.

La solution polynomiale est obtenue en prenant  $\varepsilon = 1$  dans les développements (4) :

$$\mathbf{X}_{\text{poly}}(\varepsilon = 1) = \mathbf{X}_0 + \sum_{p=1}^N \mathbf{X}_p \quad (19)$$

Afin d'augmenter le rayon de validité de la solution polynomiale (19), les approximants de Padé [2] sont utilisés et la représentation rationnelle de la solution s'écrit :

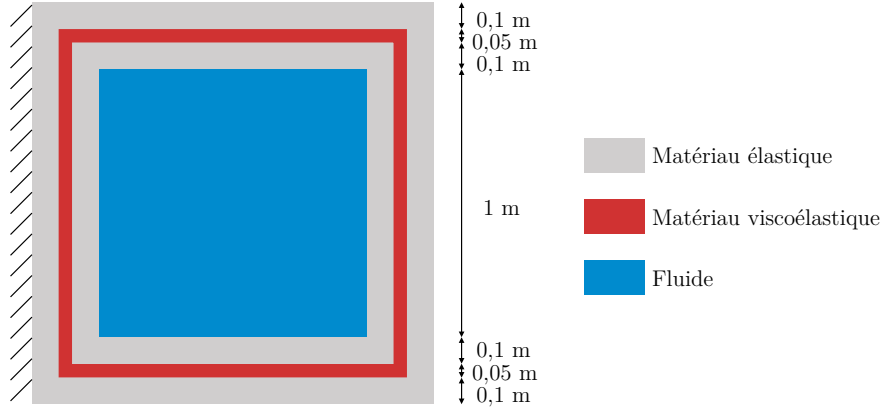
$$\mathbf{X}_{\text{Padé}}(\varepsilon = 1) = \mathbf{X}_0 + \sum_{p=1}^M \frac{\Delta_{M-p}(\varepsilon)}{\Delta_M(\varepsilon)} \mathbf{X}_p \quad \text{avec } M = N - 1 \quad (20)$$

où les  $\Delta_k$  sont définis par des polynômes de degré  $k$ . Quelque soit l'inconnue, le même dénominateur  $\Delta_k$  est utilisé [6]. A la fin de chaque itération, la représentation retenue (polynomiale ou Padé) est celle ayant le résidu le plus faible, en considérant le "meilleur" ordre, c'est à dire celui dont le résidu est le plus faible parmi les  $N$  ordres testés [8]. On considère que le processus itératif a convergé lorsque la norme du résidu complexe est inférieure au seuil de tolérance fixé :

$$\sqrt{\mathbf{R}^{(k)} \cdot \mathbf{R}^{(k)}} \leq \text{tolérance} \quad (21)$$

avec  $\mathbf{R}^{(k)}$  le résidu complexe évalué à la fin de chaque itération :

$$\mathbf{R}^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(\omega)^{(k)} \mathbf{K} + \Omega^{(k)} \mathbf{M}] \mathbf{U}^{(k)} \quad (22)$$



(a) Caractéristiques géométriques et conditions limites.

Couches élastiques	Couche viscoélastique	Domaine fluide	
<i>Aluminium</i>	<i>Polymère</i>	<i>Air</i>	<i>Eau</i>
$E_a = 6,9 \cdot 10^{10}$ Pa	$E_0 = 1,794^6$ Pa	$c_F = 340$ m.s <sup>-1</sup>	$c_F = 1430$ m.s <sup>-1</sup>
$\rho_a = 2766$ kg.m <sup>-3</sup>	$\rho_v = 968,1$ kg.m <sup>-3</sup>	$\rho_F = 1$ kg.m <sup>-3</sup>	$\rho_F = 1000$ kg.m <sup>-3</sup>
$\nu_a = 0,3$	$\nu_v = 0,3$		
épaisseur : 0,1m	épaisseur : 0,05m		

(b) Paramètres matériaux.

FIGURE 1 – Problème dissipatif étudié.

Une fois la convergence atteinte, la pulsation amortie et l'amortissement structural sont définis de la façon suivante :

$$\Omega_a = \sqrt{\omega^{R2} - \omega^{I2}} \quad (23)$$

$$\eta_m = \frac{2\omega^R \omega^I}{\omega^{R2} - \omega^{I2}} \quad (24)$$

Si la convergence n'est pas atteinte, une nouvelle itération est réalisée, en prenant comme point initial la solution à l'itération précédente :

$$\mathbf{X}_0^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} \quad (25)$$

## 4 Résultats

Pour valider nos résultats, nous considérons une cavité remplie d'air ou d'eau constituée d'une structure sandwich viscoélastique. Les paramètres géométriques et matériaux sont présentés à la Figure 1.

Le comportement du fluide est défini par sa masse volumique  $\rho_F$  et la célérité  $c_F$  des ondes acoustiques.

La loi de comportement pour les parties solides est respectivement une loi de Hooke pour les couches élastiques et une loi viscoélastique de type Maxwell généralisé pour la couche interne, soit :

$$E(\omega) = k_0 + \eta_0 i\omega + \sum_{j=1}^{N_{\max}} \frac{i\omega}{\left(\frac{i\omega}{k_j} + \frac{1}{\eta_j}\right)} \quad (26)$$

Les paramètres sont ceux obtenus lors d'essais en vibration sur un polymère ([7]) et utilisés par L. Dui-gou ([5]).

Mode	Newton (référence)		NOE		NOE + Padé	
	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$
1	218,54	$8,24 \cdot 10^{-2}$	218,54	$8,20 \cdot 10^{-2}$	218,54	$8,20 \cdot 10^{-2}$
2	425,07	$4,74 \cdot 10^{-1}$	428,87	$4,43 \cdot 10^{-1}$	428,98	$4,41 \cdot 10^{-1}$
3	441,81	$4,36 \cdot 10^{-1}$	444,81	$4,08 \cdot 10^{-1}$	444,81	$4,08 \cdot 10^{-1}$
4	598,06	$4,76 \cdot 10^{-1}$	603,27	$4,42 \cdot 10^{-1}$	603,65	$4,42 \cdot 10^{-1}$
5	859,98	$1,78 \cdot 10^{-1}$	860,49	$1,77 \cdot 10^{-1}$	860,49	$1,77 \cdot 10^{-1}$
6	1074,29	$8,64 \cdot 10^{-2}$	1074,36	$8,62 \cdot 10^{-2}$	1074,36	$8,62 \cdot 10^{-2}$
7	1068,70	$1,49 \cdot 10^{-4}$	1068,70	$1,49 \cdot 10^{-4}$	1068,70	$1,49 \cdot 10^{-4}$
8	1068,61	$1,69 \cdot 10^{-4}$	1068,61	$1,69 \cdot 10^{-4}$	1068,61	$1,69 \cdot 10^{-4}$
9	1394,33	$2,16 \cdot 10^{-1}$	1394,33	$2,16 \cdot 10^{-1}$	1395,92	$2,15 \cdot 10^{-1}$
10	1511,25	$5,92 \cdot 10^{-5}$	1511,25	$5,92 \cdot 10^{-5}$	1511,25	$5,92 \cdot 10^{-5}$

TABLE 1 – Modèle de Maxwell généralisé,  $T=30^\circ\text{C}$ , fluide = air - Pulsations amorties et amortissements structurels calculés par le solveur de Newton et le solveur de Newton d'ordre élevé (NOE) avec ou sans approximatifs de Padé. Les deux versions du solveur NOE sont validées par comparaison avec les résultats obtenus par l'algorithme de Newton, utilisé comme référence.

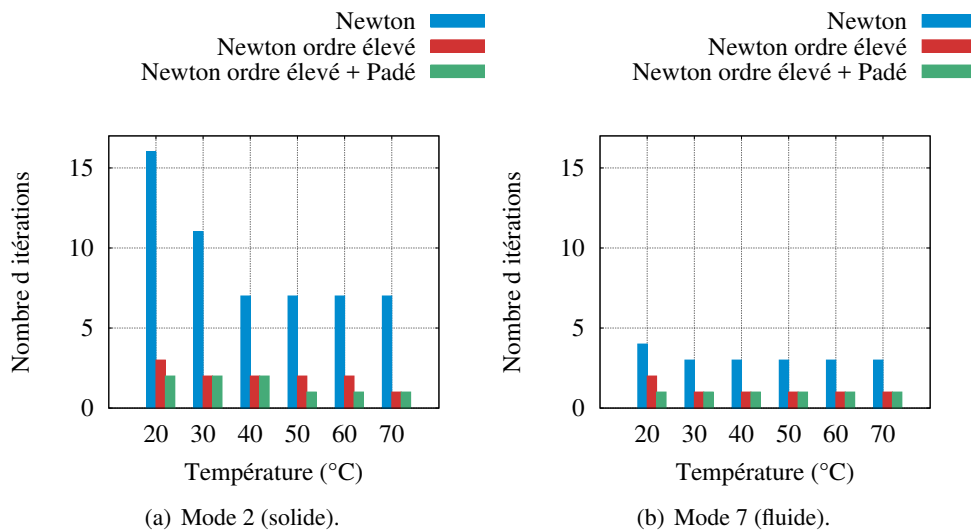


FIGURE 2 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air - Comparaison du nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence suivant l'algorithme utilisé, pour différentes températures.

Le solveur NOE nécessite un point initial. Celui-ci est pris comme étant la solution du problème vibroacoustique en considérant la structure avec une couche centrale élastique ([1]).

Les résultats présentés utilisent un maillage de 8100 éléments finis quadrangles linéaires soit 28722 degrés de liberté complexes).

Dans le Tableau 1, les dix premières pulsations amorties et les dix premiers amortissements obtenus par le solveur NOE avec ou sans approximatifs de Padé sont comparés avec ceux obtenus par la méthode classique de Newton [10], [3] dans le cas où le fluide est de l'air et la température choisie est  $30^\circ\text{C}$ .

On note que quelque soit la méthode utilisée les fréquences et amortissements sont proches. A la Figure 2, le nombre d'itérations nécessaire pour l'obtention des modes 2 et 7, respectivement un mode solide et un mode fluide, est comparé pour les trois méthodes. L'intérêt d'utiliser l'algorithme de Newton d'ordre élevé avec ou sans les approximatifs de Padé est mis en évidence. On peut remarquer également que le mode 2, mode solide est plus impact  par l'augmentation de la température que le mode 7, qui est un mode fluide. De plus, le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la convergence est plus élevé lorsque la température diminue. Ceci s'explique par le fait qu'à une température de  $20^\circ\text{C}$ , l'amortissement est plus important qu'à  $50^\circ\text{C}$ .

## 5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé un algorithme de Newton d'ordre élevé (NOE) pour résoudre le problème d'interaction fluide avec une structure sandwich viscoélastique. Cette méthode est basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation. Elle permet de passer d'un problème non-linéaire en une série de problèmes linéaires. L'utilisation "récurrente" de la matrice tangente permet un gain en temps de calcul en limitant le nombre de factorisation de matrices. L'ajout des Approximants de Padé permet la convergence. L'algorithme proposé a donc deux variantes avec et sans les approximants de Padé. Celles-ci sont comparées à la méthode de Newton classique qui est une méthode itérative supposée robuste. La comparaison en terme de nombre d'itérations permet de mettre en évidence les performances de la méthode proposée. Les exemples considérés dans ce papier sont en deux dimensions d'espace. Les perspectives de ce travail concernent, notamment, une modélisation 3D des domaines fluide et solide. Pour ce dernier, une approche géométrique de type coque est privilégiée.

### 5.1 Références bibliographiques

#### Références

- [1] Claude, B. and Duigou, L. and Girault, G. and Guevel, Y. and Cadou, J. M *Numerical comparison of eigenvalue algorithms for vibroacoustic problems*, Mechanics Research Communications, 39-45, 2018.
- [2] Cochelin, B. and Damil, N. and Potier-Ferry, M., *Méthode asymptotique numérique*, Livre, Hermès Science publications, 2007.
- [3] Deuffhard, P., *Newton Methods for Nonlinear Problems*, Springer Berlin Heidelberg, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 35, 2011.
- [4] Duigou-Kersulec L. *Modélisation numérique de l'amortissement passif et actif des tôles sandwich comportant des couches viscoélastiques ou piézoélectriques*,Thèse, Université de Metz, 2002.
- [5] Duigou L., Daya E.M., Potier-Ferry M., *Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, 1323-1335, 2003.
- [6] Elhage-Hussein, A. and Potier-Ferry, M. and Damil, N., *A numerical continuation method based on Padé approximants*, International Journal of Solids and Structures, vol. 37, 6981-7001, 2000.
- [7] Landier J. *Modélisation et étude expérimentale des propriétés amortissantes des tôles sandwich*, Thèse, Université de Metz, 1993.
- [8] Mallil, E. and Lahmam, H. and Damil, N. and Potier-Ferry, M. *An iterative process based on homotopy and perturbation techniques*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.190, 1845-1858, 2000.
- [9] Morand H.J.P., Ohayon R., *Fluid Structure interaction, Applied Numerical Methods*, John Wiley Sons, Masson, 1995.
- [10] Quarteroni, A. and Cacco, R. and Saleri, F., *Méthodes Numériques - Algorithmes, analyse et applications*, Springer Milan,2007.