

## Réduction de modèle multi-niveau pour la quantification de l'incertitude dans le cas de la dynamique vibroacoustique

J. Reyes<sup>1,2</sup>, C. Desceliers<sup>2</sup>, C. Soize<sup>2</sup>,  
L. Gagliardini<sup>1</sup>

<sup>1</sup> PSA Group, {justin.reyes, laurent.gagliardini}@mpsa.com

<sup>2</sup> Université Paris-Est Marne-la-Vallée, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Echelle, MSME UMR 8208 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 02, France {christophe.desceliers, christian.soize}@u-pem.fr

**Résumé** — Dans un contexte probabiliste, l'amélioration des capacités de prédiction des modèles vibroacoustiques nécessite un indicateur adapté pour comparer les mesures avec les prédictions. La comparaison est faite en utilisant la vraisemblance, dès qu'elle peut être estimée pour un résultat donné. L'analyse repose principalement sur des fonctions de réponse en fréquence complexes à valeurs matricielles qui peuvent être mesurées et calculées. Une réduction statistique est proposée. Cette réduction statistique présente en plus de la réduction des données, une analyse du comportement physique du système étudié.

**Mots clés** — Vibroacoustique, modèle réduit, multi-échelle, automobile.

### 1 Contexte de la recherche

La fonction de densité de probabilité commune des parties réelle et imaginaire de chaque variable aléatoire indépendante est estimée à l'aide d'un modèle stochastique non paramétrique mis en œuvre dans MSC/NASTRAN et la méthode de simulation de Monte Carlo. La réduction statistique proposée présente de nombreuses propriétés intéressantes, y compris la réduction des données, sur le comportement physique du système étudié. Dans l'industrie automobile, des modèles vibroacoustiques numériques sont utilisés pour la conception des automobiles pour la réduction du bruit (voir par exemple [4, 18, 2]). Cependant, les dimensions des modèles numériques en vibroacoustique peuvent être très élevées : Le modèle numérique utilisé dans ce travail est décrit par quinze millions de degrés de liberté (DDLs) pour la partie structure et environ huit millions de DDLs pour la cavité acoustique. Cette dimension élevée du modèle numérique pose de nombreuses difficultés qui sont pour la plupart surmontées en introduisant un modèle vibroacoustique réduit (ROM) construit par une méthode d'analyse modale réduite. L'automobile étant un produit industriel, elle est soumise à des incertitudes de fabrication. En raison de l'introduction de simplifications dans le processus de modélisation, des incertitudes dans le modèle de calcul vibroacoustique sont introduites et doivent être prises en compte. L'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes a été introduite il y a dix ans pour modéliser les incertitudes de modélisation dans les grands modèles numériques. Concernant l'analyse vibroacoustique des automobiles, les fonctions de réponse en fréquence (FRFs) sont fréquemment utilisées pour mesurer la transmission des vibrations. L'avantage des FRFs à valeurs matricielles est que, même pour des structures aussi complexes que les automobiles, elles fournissent toujours une relation linéaire simple entre une entrée (excitation) à valeur vectorielle et une sortie (observation) à valeur vectorielle. Le modèle vibroacoustique numérique permet un calcul facile des matrices de FRFs pour un ensemble de fréquences échantillonnées. Les matrices de FRFs complexes peuvent également être mesurées expérimentalement. Les fluctuations aléatoires des matrices de FRFs peuvent également être modélisées à partir d'un modèle stochastique vibroacoustique. Afin de comparer les mesures expérimentales avec les résultats donnés par un modèle numérique vibroacoustique stochastique, nous proposons une approche basée sur la vraisemblance [14, 17], qui a été introduite dans [7, 16]. Dans ce travail, nous utilisons la vraisemblance pour quantifier la "distance" entre les mesures expérimentales et le modèle numérique vibroacoustique stochastique. On notera  $[FRF] = \{\omega \mapsto [FRF(\omega)]\}$ , la FRF complexe à valeur matricielle calculée numériquement. L'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes [15, 4, 16, 11] tient compte à la fois des incertitudes des paramètres et des incertitudes

du modèle induites par les erreurs de modélisation. Le principe de cette approche consiste à remplacer les matrices généralisées du modèle numérique vibroacoustique réduit par des matrices aléatoires dont les lois de probabilités sont construites [17] selon le principe du maximum d'entropie et l'information disponible. Un ensemble de réalisations des matrices de FRFs aléatoires est construite par la méthode de Monte-Carlo [13]. Puisque les estimations statistiques des quantités d'intérêt (les moyennes, écart-types de [FRF], etc.) nécessitent un nombre relativement important de réalisations pour obtenir la convergence, l'espace de stockage requis peut être important et sources de difficultés de mise en œuvre de ces méthodes probabilistes. L'approche proposée vise à quantifier la cohérence du modèle vibroacoustique numérique - décrit par un ensemble de réalisations - avec les mesures expérimentales. Elle est basée sur deux réductions statistiques successives qui sont construites à l'aide l'algorithme Joint Approximation Diagonalization of Eigenmatrices (JADE) [1]. Cette méthode a été proposée dans [12] afin d'obtenir une compression élevée des données.

## 2 Rappel sur l'approche probabiliste nonparamétrique des incertitudes

Un modèle vibroacoustique numérique est souvent construit en phase de conception afin de prédire la dynamique du système réel, qui sera, plus tard, fabriqué à l'issue de la conception. Le processus de modélisation doit tenir compte de deux sources d'incertitudes : les incertitudes portant directement sur les valeurs des paramètres du système et les incertitudes portant sur les hypothèses de modélisations. Il est nécessaire de quantifier ces incertitudes dans les modèles numériques en phase de conception. Cependant, l'approche probabiliste paramétrique habituelle, laquelle consiste à remplacer les paramètres incertain du modèle par des variables aléatoires, ne peut pas tenir compte des incertitudes du modèle. Nous utiliserons l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes [15, 4, 11, 17] qui permet de quantifier à la fois les deux types d'incertitudes. Les valeurs nominales (choisies comme valeurs moyennes) des matrices généralisées réduites du modèle numérique sont remplacées par des matrices aléatoires. Les distributions de probabilité de ces matrices aléatoires dépendent de six hyperparamètres  $\delta$  qui contrôlent leur niveau de fluctuation statistique respective. Toutefois, dans ce document, les incertitudes sur la matrice de couplage ne sont pas prises en compte. Le logiciel MSC/Nastran, dans lequel l'approche probabiliste non paramétrique a été mise en œuvre [10], est utilisée pour construire  $N_{MC}$  réalisations  $[FRF^{(1)}] \dots, [FRF^{(N_{MC})}]$  de la FRF matricielle aléatoire [FRF], en utilisant les valeurs des six hyperparamètres  $\delta$  identifiées dans [4]. Nous traitons le problème vibroacoustique linéaire d'une structure complexe couplée à une cavité acoustique interne. Le modèle numérique est construit en utilisant la méthode des éléments finis comme le montre la figure 1. La convergence des estimateurs statistiques

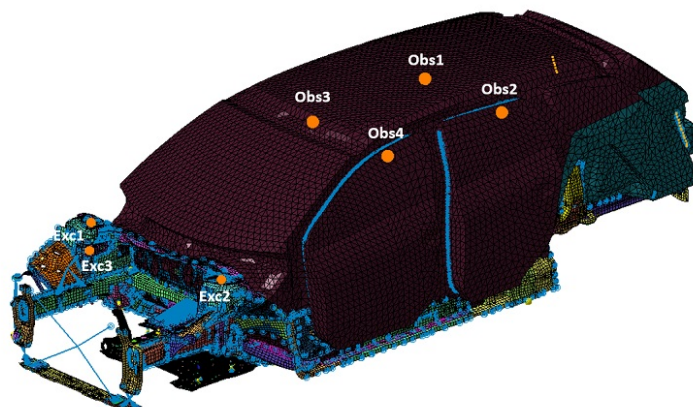


FIGURE 1 – Maillage du modèle élément fini numérique avec les points d'observations et les points d'excitations.

pour la méthode numérique de simulation de MonteCarlo est atteinte pour  $N_{MC} = 200$ .

Sur la figure 2, on remarque distinctement que l'intervalle de confiance s'élargit lorsque la fréquence augmente. En effet, il est connu que le niveau d'incertitude augmente avec la fréquence. De plus, nous

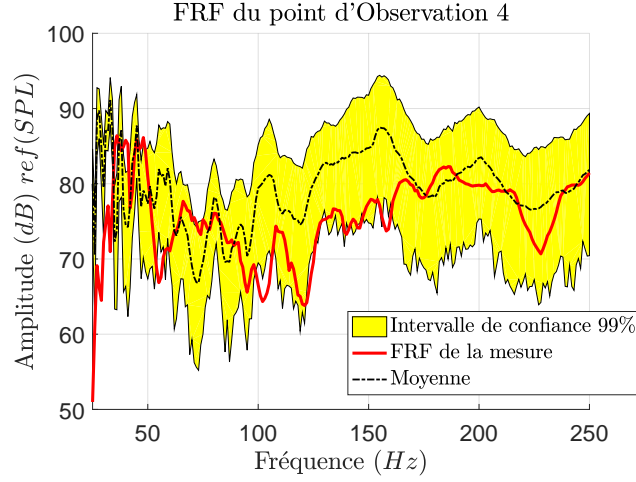


FIGURE 2 – Intervalle de confiance des 200 réalisations à 95% (zone en jaune), la moyenne (en noire), et une mesure expérimentale (en rouge).

apercevons que dans la bande  $[0, 15]$  Hz, la mesure est éloignée de la valeur simulée par le modèle numérique nominal. Cela s'explique par la difficulté de faire des mesures expérimentales en très basse fréquence et que le modèle numérique, contrairement au véhicule utilisé au banc d'essai expérimentale, ne comporte pas une modélisation des trains.

### 3 Réductions Statistiques

Dans cette partie, nous proposons deux réductions statistiques [12] basées sur l'utilisation de l'analyse en composantes indépendantes (ACI). La principale différence avec l'analyse en composantes principales (ACP) est que les coordonnées généralisées sont statistiquement indépendantes. L'ACI permet d'obtenir une meilleure interprétation physique des composantes extraites. Nous utiliserons l'algorithme JADE (Joint Approximation Diagonalization of Eigenmatrices) tel que présenté dans [1], qui utilise les moments du quatrième ordre.

Soit  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices complexes  $(n \times m)$ . Soit  $\omega_1, \dots, \omega_{N_f}$  l'échantillonnage fréquentiel. Soit  $N_o$  le nombre de DDLs d'observation, et soit  $N_e$  le nombre de DDLs d'excitation. La FRF aléatoire  $[\text{FRF}(\omega_j)]$  à la fréquence d'échantillonnage  $\omega_j$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{M}_{N_o, N_e}(\mathbb{C})$  avec  $j = 1, \dots, N_f$ . Les éléments de matrice aléatoire  $[\text{FRF}(\omega_j)]$  sont réarrangés sous la forme d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{F}(\omega_j)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^N$  avec  $N = N_o \times N_e$ . Soit  $[\mathbf{Y}] = [\mathbf{F}(\omega_1), \dots, \mathbf{F}(\omega_{N_f})]$  la matrice aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{M}_{N, N_f}(\mathbb{C})$ . Les réalisations indépendantes  $N_{\text{MC}}$  de la matrice aléatoire  $[\mathbf{Y}]$  sont notées  $\{[Y^{(n)}], n = 1, \dots, N_{\text{MC}}\}$  et sont construites avec le modèle numérique stochastique.

#### 3.1 Première réduction statistique

La première réduction statistique est construite par ACI et est mise en œuvre par l'algorithme JADE. Ainsi, une base est construite pour la représentation fréquentielle en sous-bande de la FRF aléatoire et les coordonnées de la représentation de la FRF aléatoire sur cette base "fréquentielle" sont des variables aléatoires  $[Y^{(n)}]$  à valeurs dans  $\mathbb{M}_{N, N_f}(\mathbb{C})$  qui sont mutuellement statistiquement indépendantes par construction. On introduit la matrice d'autocorrélation  $[R]$  défini par

$$[R] = \frac{1}{N_{\text{MC}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{MC}}} \overline{[Y^{(n)}]}^T [Y^{(n)}] \in \mathbb{M}_{N_f, N_f}(\mathbb{C}) \quad (1)$$

On résout le problème aux valeurs propres  $[R] \mathbf{x}^\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ . On ordonne les valeurs propres  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_f} > 0$  par ordre décroissant. Chaque réalisation  $[Y^{(n)}]$  peut s'écrire sous la forme

$$[Y^{(n)}] = [A^{(n)}] \overline{[x]}^T, \quad (2)$$

où  $[x] = [\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{N_p}]$  est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres associés aux  $N_p$  plus grandes valeurs propres  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_p} > 0$  et  $[A^{(1)}], \dots, [A^{(N_{MC})}]$  sont les réalisations indépendantes d'une matrice aléatoire  $[A]$  construite comme étant les projection des matrices  $[Y^{(n)}]$  sur la base de vecteurs propres  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{N_p}$ . L'ACI permet alors d'obtenir une première réduction statistique permettant de réécrire chaque réalisations  $[Y^{(n)}]$  sous la forme suivante

$$[Y^{(n)}] = [\widehat{A}^{(n)}] [S] \quad , \quad (3)$$

où  $[\widehat{A}^{(1)}], \dots, [\widehat{A}^{(N_{MC})}]$  sont les réalisations indépendantes d'une matrice aléatoire  $[\widehat{A}]$  construite lors de la mise en œuvre de l'algorithme JADE pour l'ACI. Les composantes indépendantes issues de l'ACI sont

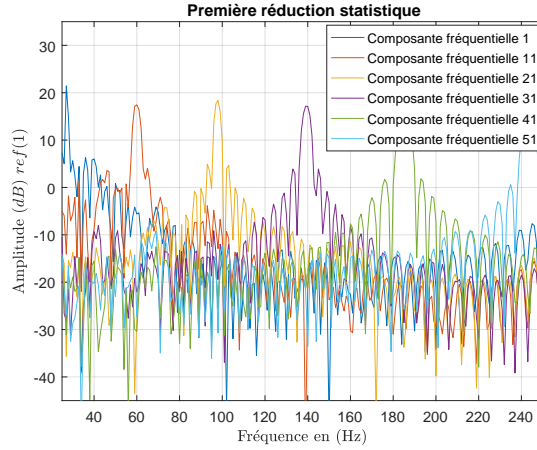


FIGURE 3 – Composante indépendante de la base fréquentielle

présentées sur la Fig. 3. On peut voir des pics tout au long de la bande de fréquences. Chaque composante a une contribution différente sur la bande de fréquence. Nous allons maintenant, appliquer une deuxième réduction statistique sur la matrice aléatoire  $[\widehat{A}]$  pour observer le comportement spatial des DDLs sur chaque sous bande de fréquence de la base fréquentielle.

### 3.2 Deuxième réduction statistique

La première réduction statistique est construite par ACI et est mise en œuvre par l'algorithme JADE. Ainsi, une base est construite pour la représentation fréquentielle en sous-bande de la FRF aléatoire et les coordonnées de la représentation de la FRF aléatoire sur cette base "fréquentielle" sont des variables aléatoires  $[Y^{(n)}]$  à valeurs dans  $\mathbb{M}_{N_s, N_f}(\mathbb{C})$  qui sont mutuellement statistiquement indépendantes par construction. La seconde réduction statistique est construite par l'ACI de la matrice aléatoire  $[\widehat{A}]$  et est aussi mise en œuvre par l'algorithme JASE. On montre alors, que pour tout  $n = 1, \dots, N_{MC}$ , on a

$$[\widehat{A}^{(n)}]_{k\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\widehat{N}_p(\alpha)} [\widehat{F}]_{k\beta} [\chi^{(n)}]_{\beta\alpha} \quad (4)$$

où les matrices  $[X^{(1)}] \dots, [X^{(N_{MC})}]$  et la matrice  $[\widehat{F}]$  sont construites par l'algorithme JADE. La matrice  $[X^{(n)}]$  représente la base "spatiale". Sur la Fig.4, nous voyons l'influence des excitations par rapport aux points d'observations, ce qui nous permet de déterminer les voies de transferts pour la sous-bande de fréquence associée. A partir des bases fréquentielle et spatiale calculées. Nous allons faire une double projection d'une mesure expérimentale comme explicité dans [12].

### 3.3 Méthode du maximum de vraisemblance

Dans cette section, nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance proposée dans [16, 7]. La méthode consiste à introduire une double réduction statistique comme précédemment. La fonction

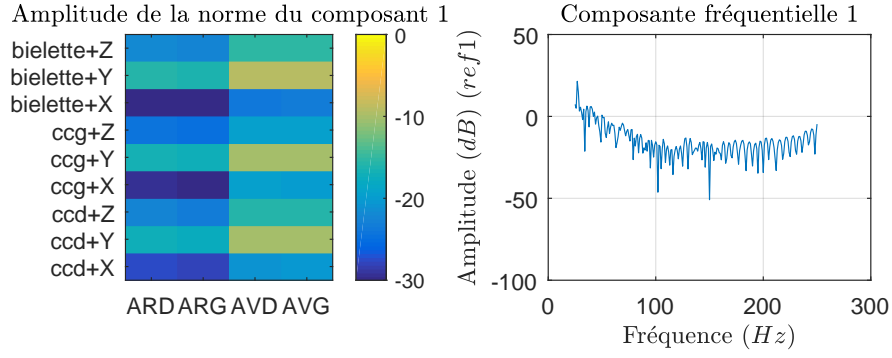


FIGURE 4 – Composante indépendante de la base spatiale pour une composante fréquentielle donnée

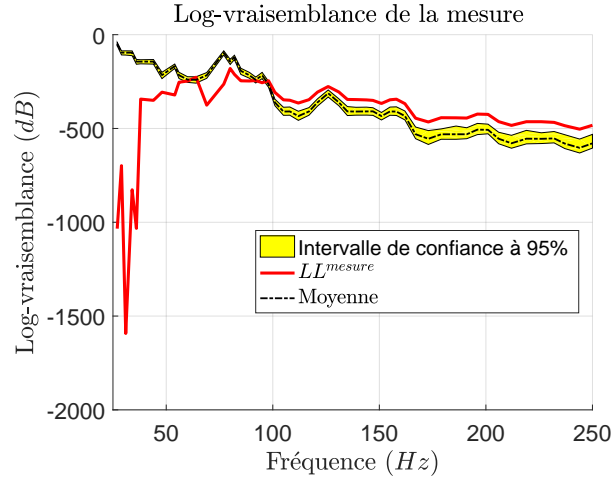


FIGURE 5 – Intervalle de confiance à 95% pour du log-vraisemblance de la base stochastique (en jaune), le log-vraisemblance pour la mesure projetée (en rouge).

de vraisemblance est estimée à l'aide de la méthode d'estimation par noyaux [8]. On réarrange les éléments de la matrice  $[X^{(n)}]$  dans un vecteur  $\mathbf{W}^{(n)}$ . Les vecteurs  $\mathbf{W}^{(1)}, \dots, \mathbf{W}^{(N_{MC})}$  sont donc les réalisations indépendantes d'un vecteur aléatoire noté  $\mathbf{W}$  dont la dimension est notée  $N_{\text{comp}}$ . En appliquant la double projection présentée dans le paragraphe précédant sur les données expérimentales, on construit alors des réalisations expérimentales indépendantes  $\mathbf{W}^{\text{exp},1}, \dots, \mathbf{W}^{\text{exp},N_{MC}}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{W}$ . Soit  $\mathbf{w} \mapsto p_{\mathbf{W}}(\mathbf{w})$ , la fonction de densité de probabilité du vecteur aléatoire  $\mathbf{W}$  définie sur  $\mathbb{R}^{N_{\text{comp}}}$ . On introduit l'approximation suivante de la log-vraisemblance  $\mathcal{L}$  (en db)

$$\mathcal{L} = \sum_{\ell=1}^{v_{\text{exp}}} \sum_{\gamma=1}^{N_{\text{comp}}} \mathcal{L}_{\gamma,\ell} \quad , \quad \mathcal{L}_{\gamma,\ell} = 10 \log_{10} p_{w_{\gamma}}(w_{\gamma}^{\text{exp},\ell}). \quad (5)$$

où  $w \mapsto p_{w_{\gamma}}(w)$  est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire  $W_{\gamma} = \{\mathbf{W}\}_{\gamma}$ . La Fig.5 montre les valeurs de la log-vraisemblance des mesures et son intervalle de confiance à 95%.

### 3.4 Remarque

Pour s'assurer que les deux réductions statistiques sont correctement calculées, nous pouvons régénérer les FRFs à partir des deux bases réduites. De plus, les réductions statistiques donnent une réduction

$\tau$	0.80	0.90	0.95	0.99
$F_{\text{red}}$	78	48	34	20

TABLE 1 –  $F_{\text{red}}$  en fonction de  $\tau$

de données non négligeable (précisé dans Tab.1). On remarque que lorsque la précision souhaitée noté  $\tau$  augmente, le facteur de réduction  $F_{red}$  diminue.

## 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons essentiellement présenté une méthodologie pour construire une réduction statistique d'une matrice de FRF aléatoire complexe. La matrice de FRF aléatoire est représentée par une base de données de réalisations calculées par un modèle numérique stochastique construit par l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes et implémentée dans MSC/NASTRAN. Étant donné que nous considérons la FRF complexe à valeur matricielle, l'utilisation de réductions statistiques en deux étapes est efficace. La première étape fournit une décomposition de la gamme de fréquences étudiée en sous-bandes indépendantes, tandis que la deuxième étape traite l'interaction des DDLs dans chacune de ces sous-bandes. L'indépendance statistique des composants de réduction est garantie par une analyse en composante indépendante telle qu'implémentée dans l'algorithme JADE. Une fois que les composantes ont été caractérisées, la PDF de leur amplitude complexe est déterminée, ce qui permet ensuite le calcul de la vraisemblance. La réduction du modèle s'effectue selon une précision demandée : plus la précision est faible, plus le nombre de composantes est faible et plus la réduction est élevée. Cette représentation réduite a été validée en resynthétisant la FRF. Enfin, la vraisemblance d'une mesure sur un véhicule complet a été calculée et analysée. La réduction statistique proposée offre de nombreuses perspectives dans différents domaines. Premièrement, compte tenu des capacités de réduction des données, le modèle compressé pourrait être manipulé par des outils de synthèse NVH afin de propager des incertitudes pour diverses sources de vibrations et conditions de fonctionnement. Deuxièmement, la signification physique profonde des composantes indépendantes n'a pas encore été étudiée. Les résultats présentés dans cet article sont très prometteurs : la décomposition automatique de la gamme de fréquences étudiée, la relation de phase dominante entre DDLs....

Finalement, une modélisation vibroacoustique multi-fréquentielle [5, 6] est en cours de recherche pour pouvoir filtrer les déplacements globaux des déplacements locaux dans chaque bande de fréquence dans le cas d'une structure complexe couplée à une cavité acoustique interne.

## Références

- [1] J.-F. Cardoso, A. Souloumiac, *Blind beamforming for non-Gaussian signals*, IEEE Proceedings F (Radar and Signal Processing), Vol. 140, No. 6 (1993), pp. 362-370.
- [2] R. Citarella, L. Federico (eds), *Advances in Vibroacoustics and Aeroacoustics of Aerospace and Automotive Systems*, Applied Sciences, MDPI, Basel, Switzerland (2018).
- [3] R. Dony, et al., *Karhunen-Loève transform*, The transform and data compression handbook, Vol. 1 (2001), pp. 1-34.
- [4] J.-F. Durand, C. Soize, L. Gagliardini, *Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 124, No. 3 (2008), pp. 1513-1525.
- [5] O. Ezvan, & al., *Multilevel reduced-order computational model in structural dynamics for the low- and medium-frequency ranges*, Computers and Structures, Vol. 160, (2015), pp. 111-125.
- [6] O. Ezvan, & al., *Multilevel model reduction for uncertainty quantification in computational structural dynamics*, Comput. Mech., Vol. 59, (2017), pp. 219-246.
- [7] C. Fernandez, C. Soize, L. Gagliardini, *Sound-insulation layer modelling in car computational vibroacoustics in the medium-frequency range*, Acta Acustica United with Acustica (AAUWA), Vol. 96, No. 3 (2010), pp. 437-444.
- [8] P. D. Hill, *Kernel estimation of a distribution*, Communications in statistics - Theory and Methods. Vol. 14, No. 3 (1985), pp. 605-620.
- [9] A. Hyvarinen, J. Karhunen, E. Oja, *Independent Component Analysis*, John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey (2004).
- [10] *Mid-frequency acoustics*, chapter 12 of the Dynamic Analysis user guide, MSC Nastran, 2017. 2017.
- [11] R. Ohayon, C. Soize, *Advanced Computational Vibroacoustics - Reduced-Order Models and Uncertainty Quantification*, Cambridge University Press, New York (2014).

- [12] J. Reyes & al *Vehicle model likelihood computation using a probabilistic complex FRF matrix statistical reduction*, Isma/Usd 2018
- [13] R. Y. Rubinstein, D. P. Kroese, *Simulation and Monte Carlo Method*, Second Edition, John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey (2008).
- [14] R. J. Serfling, *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey (1980).
- [15] C. Soize, *A Nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics*, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 15, No. 3 (2000), pp. 277-299.
- [16] C. Soize, E. Capiez-Lernout, J.-F. Durand, C. Fernandez, L. Gagliardini, *Probabilistic model identification of uncertainties in computational models for dynamical systems and experimental validation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 198, No. 1 (2008), pp. 150-163.
- [17] C. Soize, *Uncertainty Quantification. An Accelerated Course with Advanced Applications in Computational Engineering*, Springer, New York (2017).
- [18] E. Yuksel, G. Kamci, I. Basdogan, I. *Vibro-acoustic design optimization study to improve the sound pressure level inside the passenger cabin*, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 134, No. 6 (2012), pp. 061017.