

Modélisation adaptative pour l'analyse statique des structures par éléments finis

G. Wei, P. Lardeur, F. Druesne

*Sorbonne Universités, Université de Technologie de Compiègne, CNRS FRE2012, Laboratoire Roberval, 60203 Compiègne, France
guoqiang.wei@utc.fr, pascal.lardeur@utc.fr, frederic.druesne@utc.fr*

Résumé — Cette recherche s'inscrit dans le contexte de l'amélioration de la capacité prédictive des modèles éléments finis. L'objectif est de définir une méthode permettant d'identifier, dans le contexte de l'analyse linéaire statique, des modèles éléments finis optimum du point de vue de la théorie utilisée et du maillage. L'approche de modélisation adaptative proposée utilise des modèles constitués uniquement d'éléments volumiques. Dans chaque zone de la pièce considérée, la théorie appropriée : poutre, coque, volumique, est appliquée, en utilisant des relations cinématiques adaptées.

Mots clefs — Modélisation adaptative, éléments finis, poutre, coque, volumique.

1. Introduction

Jusqu'à présent, de nombreux travaux de modélisation adaptative ont concerné le maillage et on trouve sur ce sujet une littérature abondante. En revanche, dans les calculs par éléments finis, le choix de théorie mécanique utilisée est rarement complètement justifié. Nous présentons ici une méthode de modélisation adaptative permettant d'identifier, dans le contexte de l'analyse linéaire statique, des modèles éléments finis optimum du point de vue de la théorie.

2. Le processus actuel et ses limitations

2.1 Description du processus actuel de modélisation par éléments finis

En règle générale, tout d'abord, la préparation d'un modèle éléments finis consiste à définir un scénario de simulation qui précise le type de calcul à réaliser et les variables de sortie à analyser (déplacements, contraintes...). La première étape consiste à choisir le type de théorie (volumique, coque, poutre...). La deuxième étape consiste à créer la géométrie et à définir les propriétés du matériau. La troisième étape est la préparation du maillage. Dans les applications industrielles, le choix de la théorie est déterminé de manière empirique, sur la base de règles acquises par l'expérience. Mais, comme décrit ci-dessous, la pertinence de ce choix n'est pas toujours garantie.

2.2 Inconvénients du processus actuel

Des inconvénients apparaissent dans le processus actuel de modélisation par éléments finis. Certaines de ces difficultés peuvent être mises en évidence à l'aide d'exemples (voir Figure 1). Le choix d'une théorie appropriée peut s'avérer difficile lorsque la géométrie, les conditions aux limites, les chargements et les matériaux sont complexes. Par exemple, le meilleur choix de théorie est ambigu lorsque les objets ont des géométries complexes ou contiennent des raidisseurs (Figure 1a). La limitation des théories de poutre et de coque est également un problème difficile pour les structures composites ou sandwichs. Par exemple, même si un pare-brise de voiture est mince d'un point de vue géométrique, la théorie des coques peut être inappropriée pour ce type de structure sandwich. Lorsque la théorie de coque est choisie, à partir de la définition géométrique volumique de l'objet étudié, une géométrie surfacique est requise. C'est souvent une tâche difficile pour une structure industrielle et les outils actuels échouent généralement dans ce contexte. Pour éviter d'avoir à créer une géométrie surfacique, les éléments finis de type solide-coque ont été développés [1-4]. De la même manière,

lorsque la théorie des poutres est choisie, des difficultés apparaissent pour créer une géométrie filaire. Des éléments finis de type solide-poutre ont également été développés [5,6]. La Figure 1b montre une pale de ventilateur qui combine une zone massive (partie cylindrique) et une zone mince. Le modèle optimal est certainement constitué d'un mélange d'éléments volumiques et d'éléments de coque. Cependant, mélanger différents types d'éléments dans le même modèle nécessite un traitement numérique spécifique. En particulier aux interfaces entre les zones volumiques et les coques, des relations spécifiques entre les degrés de liberté sont nécessaires pour assurer la compatibilité des déplacements entre les éléments volumiques et les éléments de coque.

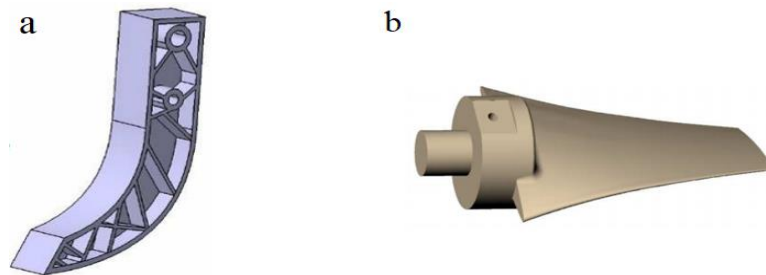


Figure 1 – Exemples de structures complexes : (a) support de pédale, (b) pale de ventilateur

2.3 Objectif de la recherche

L'objectif final de la recherche est de définir une méthodologie permettant d'identifier, dans le contexte de l'analyse linéaire statique ou dynamique, des modèles éléments finis optimum tant du point de vue théorique que du maillage. En effet, un modèle éléments finis peut être optimal si le choix de la théorie, ainsi que celui du maillage, sont pertinents. Nous décrivons dans les paragraphes suivants l'approche proposée pour l'analyse linéaire statique. Cette étude est réalisée dans le contexte de la méthodologie dite de Vérification et Validation [7,8], qui a pour objectif d'améliorer la capacité prédictive des modèles éléments finis.

3. Modélisation adaptative proposée

3.1 Principes généraux de la méthode

Toute structure est définie par une géométrie volumique, même si certaines dimensions sont petites par rapport aux autres. Pour faciliter la transition entre la modélisation géométrique (CAO) et le calcul de structure, la géométrie volumique est toujours conservée dans notre processus adaptatif, même si dans certaines zones de la pièce les théories de coque ou de poutre sont retenues. Ainsi, on évite la construction d'une géométrie surfacique ou filaire à partir d'un volume, ce qui constitue une tâche complexe. Du point de vue du maillage, seuls les éléments finis volumiques sont exploités dans les modèles. La technique du voxel [9] est utilisée pour le maillage.

Comme tout processus adaptatif, une approche itérative est développée. La première itération utilise un maillage volumique grossier, afin de calculer le critère de choix de théorie dans chaque élément fini. Ce critère permet de retenir la théorie pertinente sur l'ensemble de la structure. On définit alors les zones poutre, les zones coque et les zones volumiques. Actuellement, le critère de choix repose essentiellement sur l'analyse des contraintes principales dans chaque élément. Pour les itérations suivantes, il s'agit d'appliquer les champs de déplacement de coque et de poutre dans les zones concernées, en revanche dans les zones volumiques aucun traitement spécifique n'est nécessaire. Pour respecter les champs de déplacement de coque ou de poutre, des relations cinématiques entre les déplacements des nœuds sont imposées. La notion de nœuds maîtres et de nœuds esclaves est introduite. Des équations linéaires, utilisées pour traduire ces relations cinématiques, mènent à la

suppression des degrés de liberté esclaves. Pour la théorie de poutre, les équations impliquent des nœuds esclaves et des nœuds maîtres dans les sections concernées. Pour la théorie de coque, les équations impliquent des nœuds esclaves et des nœuds maîtres à travers l'épaisseur de chaque segment concerné. La conséquence de la technique utilisant les équations décrites ci-dessus est que, pour une même structure, les théories volumiques, de coque ou de poutre peuvent être utilisées ensemble, sans problème de compatibilité entre les zones respectives. Le processus itératif s'arrête quand la convergence des déplacements et des contraintes est atteinte.

La méthodologie proposée peut être interprétée comme une méthode de réduction de modèle, comparée à une approche complètement volumique. En fonction de l'exemple traité, le niveau de réduction peut être plus ou moins élevé, mais le gain en termes de coût de calcul est généralement important.

3.2 Critère de choix de théorie

Toute stratégie adaptative repose sur la construction de critères qui permettent de faire évoluer le processus. Différents critères existent pour le maillage adaptatif mais ne conviennent pas pour le développement de notre méthodologie. Dans notre critère, les contraintes principales sont utilisées pour classer différents états de contraintes [10]. À la fin du processus, tous les éléments sont supposés être classés en trois groupes correspondant aux zones poutre, coque et volumique respectivement. Dans chaque élément les trois contraintes principales sont classées comme suit : σ_1 , σ_2 et σ_3 dans l'ordre décroissant de leurs valeurs absolues. Après avoir calculé les trois contraintes principales,

- si $|\sigma_1| \gg |\sigma_2|$, la théorie de poutre est utilisée ;
- si $|\sigma_1| \gg |\sigma_3|$, la théorie de coque est utilisée ;
- pour les autres éléments, la théorie volumique est utilisée.

3.3 Méthodologie basée sur les relations cinématiques

Le critère présenté dans le paragraphe précédent est calculé sur les éléments mais les relations cinématiques sont appliquées aux nœuds. Notre méthodologie repose sur l'idée d'appliquer des relations entre les degrés de liberté dans les zones poutre et les zones coque. Cela mène à une réduction du nombre de degrés de liberté, par rapport au modèle volumique.

3.3.1 Relations cinématiques dans les zones coque

Comme on le sait, le champ de déplacement classique de la théorie des coques avec cisaillement transversal [11-13] peut être exprimé par :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) = v(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Les tests réalisés montrent que les champs de déplacement des théories classiques de coque ne conviennent pas à notre approche en raison de l'effet du coefficient de Poisson. Selon la théorie classique de coque, les composantes u et v du déplacement sont linéaires dans l'épaisseur et w est constant dans l'épaisseur. L'analyse des résultats d'un calcul volumique montre que l'hypothèse de linéarité concernant u et v est acceptable, en revanche w n'est pas constant dans l'épaisseur. Une distribution quadratique de w dans l'épaisseur est plus adaptée. Le champ de déplacement corrigé a donc la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = a_1(x, y)z + b_1(x, y) \\ v(x, y, z) = a_2(x, y)z + b_2(x, y) \\ w(x, y, z) = a_3(x, y)z^2 + b_3(x, y)z + c(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

Dans ces équations, a_i, b_i, c ($i = 1, 2$) sont des constantes à identifier pour chaque segment considéré. Comme le montre la Figure 2, nous distinguons sur un segment les nœuds maîtres et les nœuds esclaves.

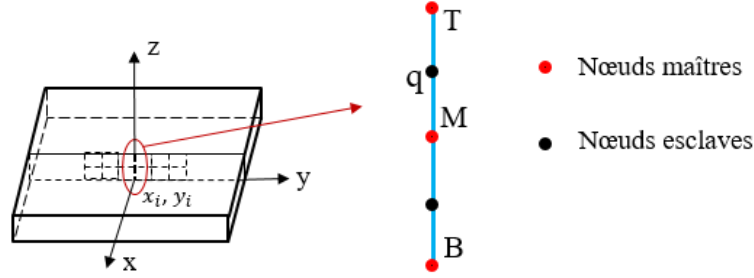


Figure 2 – Nœuds maîtres et nœuds esclaves dans l'épaisseur de la coque

L'équation (2) est appliquée aux nœuds esclaves. Pour u et v , nous utilisons les nœuds T et B comme nœuds maîtres ; pour w , nous utilisons les nœuds T, B et M comme nœuds maîtres. Le nouveau champ de déplacement pour un segment donné de la coque est le suivant :

$$\begin{cases} u_q(x_i, y_i, z) = f_1(z)u_T + f_2(z)u_B \\ v_q(x_i, y_i, z) = f_3(z)v_T + f_4(z)v_B \\ w_q(x_i, y_i, z) = f_5(z)w_T + f_6(z)w_B + f_7(z)w_M \end{cases} \quad (3)$$

Dans ces équations, $f_{1-4}(z)$ sont des fonctions linéaires en z ; $f_{5-7}(z)$ sont des fonctions quadratiques en z .

3.3.2 Relations cinématiques dans les zones poutre

Le champ de déplacement classique de la théorie de poutre 2D [14,15] avec cisaillement transversal peut être exprimé par :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u(x) + z\theta_y(x) \\ v(x, y, z) = 0 \\ w(x, y, z) = w(x) \end{cases} \quad (4)$$

Selon la théorie de poutre 2D de Timoshenko, la composante u du déplacement est linéaire dans l'épaisseur, v est nulle et w est constant dans l'épaisseur. La Figure 3 montre la déformée globale d'une poutre cantilever obtenue par calcul avec des éléments volumiques, ainsi que la déformation de cinq sections le long de cette poutre. L'analyse des résultats montre que l'hypothèse de linéarité concernant u est acceptable, mais d'une part v n'est pas nulle, d'autre part w n'est pas constant dans l'épaisseur. Une distribution bilinéaire de v dans la section et une distribution quadratique de w sont bien adaptées.

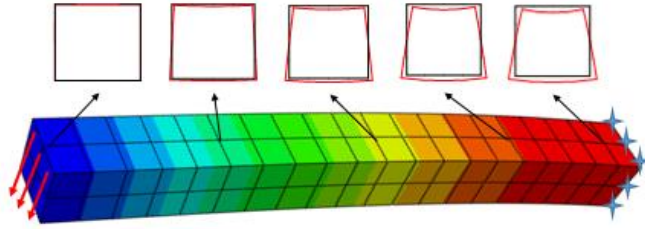


Figure 3 – Déformation des sections d'une poutre cantilever

Le champ de déplacement corrigé a donc la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = a_1(x)z + b_1(x) \\ v(x, y, z) = a_2(x)yz + b_2(x)y \\ w(x, y, z) = a_3(x)z^2 + b_3(x)z + c(x)y^2 + d(x) \end{cases} \quad (5)$$

Dans ces équations, a_i, b_i, c ($i = 1,2$) sont des constantes à identifier. Comme le montre la Figure 4, nous distinguons dans une section les nœuds maîtres et les nœuds esclaves.

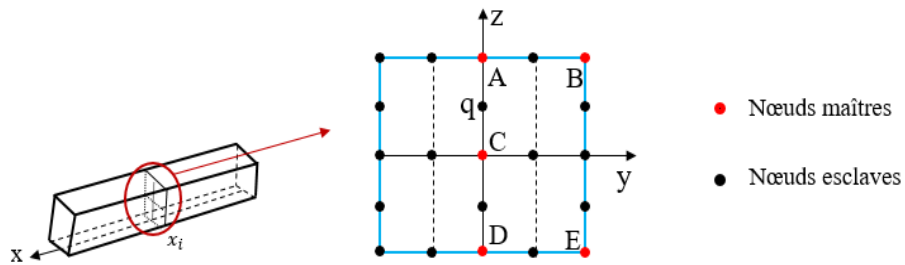


Figure 4 – Nœuds maîtres et nœuds esclaves dans une section de poutre

L'équation (5) est appliquée aux nœuds esclaves. Pour u , nous utilisons les nœuds A et D comme nœuds maîtres ; pour v , nous utilisons B et E comme nœuds maîtres ; pour w , nous utilisons les nœuds A, B, C et D comme nœuds maîtres. Le nouveau champ de déplacement, pour une section donnée de la poutre, est le suivant :

$$\begin{cases} u_q(x_i, y, z) = f_1(z)u_A + f_2(z)u_D \\ v_q(x_i, y, z) = f_3(y, z)v_B + f_4(y, z)v_E \\ w_q(x_i, y, z) = f_5(y, z)w_A + f_6(y, z)w_B + f_7(y, z)w_C + f_8(y, z)w_D \end{cases} \quad (6)$$

Dans ces équations, $f_{1-2}(z)$ sont des fonctions linéaires en z ; $f_{3-4}(y, z)$ sont des fonctions bilinéaires en y et z ; $f_{5-8}(y, z)$ sont des fonctions quadratiques en y et z .

4. Exemple

4.1 Description de l'exemple traité

La Figure 5 présente un exemple académique comportant trois cas permettant d'évaluer l'efficacité de notre méthodologie. Les trois structures sont encastées à une extrémité et soumises à une force répartie à l'autre extrémité. Le matériau est homogène et isotrope. Le premier cas est la poutre cantilever classique, avec une section carrée : $b / h = 1$. Le deuxième cas est obtenu en augmentant la largeur de la structure: $b / h = 3$. Dans le troisième cas, la largeur est égale à la longueur, menant à une plaque carrée modérément épaisse.

Le logiciel Abaqus est utilisé. Afin d'éviter les phénomènes de verrouillage dû au cisaillement transversal, l'élément volumique à 20 nœuds C3D20 est choisi. En effet, cet élément présente de bonnes performances, même pour des structures minces en flexion.

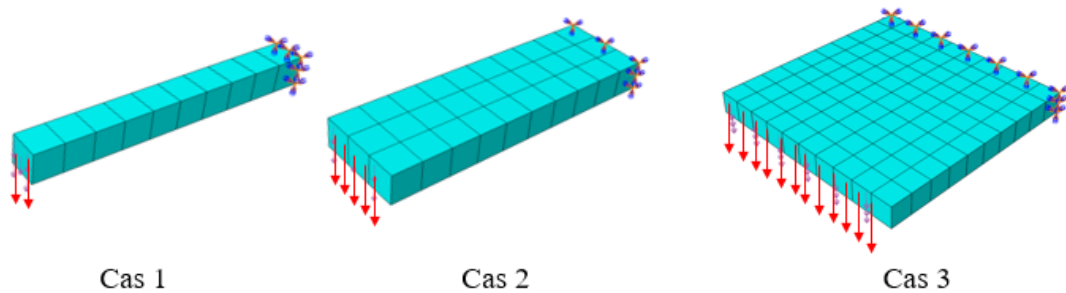


Figure 5 – Exemple académique avec trois variantes géométriques

4.2 Critère de choix de théorie

Nous commençons l'analyse par éléments finis avec un maillage volumique grossier. Pour chaque élément le critère de choix est calculé et une théorie appropriée est proposée. La Figure 6 montre, pour le cas 2, l'évolution du choix de théorie au cours des itérations. Entre deux itérations, le maillage est raffiné. Pour cet exemple, la convergence des déplacements et des contraintes est obtenue après trois itérations. Les couleurs bleue, verte et rouge correspondent respectivement aux zones poutre, coque et volumiques.

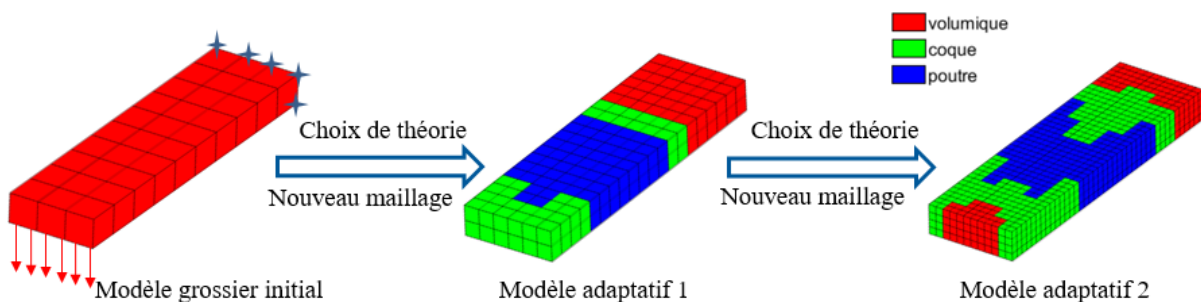


Figure 6 – Évolution du choix de théorie au cours des itérations

La même approche a mené à des choix de théorie pour les cas 1 et 2. La Figure 7 montre la comparaison des choix de théorie pour les trois cas, quand le processus a convergé. Pour le cas 1 (section carrée), les résultats montrent que la théorie des poutres est recommandée, sauf à proximité des conditions aux limites et des zones de chargement, où la théorie volumique et la théorie de coque sont respectivement requises. Dans le cas 2 avec une géométrie intermédiaire, les zones coque et volumique sont plus étendues, mais la théorie des poutres peut encore être appliquée sur une partie de la structure. Pour le cas 3, la théorie de coque est choisie sur la majeure partie de la structure, avec des zones volumiques localisées près des conditions aux limites et des zones de chargement. Ces résultats sont cohérents avec les connaissances classiques sur le domaine de validation de ces théories. En particulier, les effets locaux justifient une théorie plus riche pour les trois cas considérés.

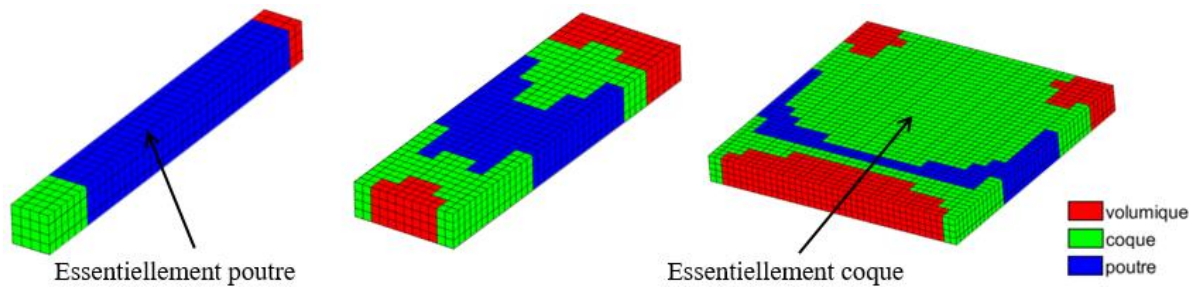


Figure 7 – Choix de théorie pour les trois cas géométriques

4.3 Évaluation de la méthode adaptative

La Figure 8 montre, pour le cas 2, les champs de déplacement et de contraintes de von Mises, obtenus avec le modèle volumique et le modèle adaptatif. Ces résultats sont similaires, ce qui montre que l'approche adaptative fonctionne de façon satisfaisante. Le tableau 1 montre les erreurs sur le déplacement maximal et la contrainte de von Mises près de l'encastrement. Les erreurs, qui ne dépassent pas 0.3%, sont très faibles.

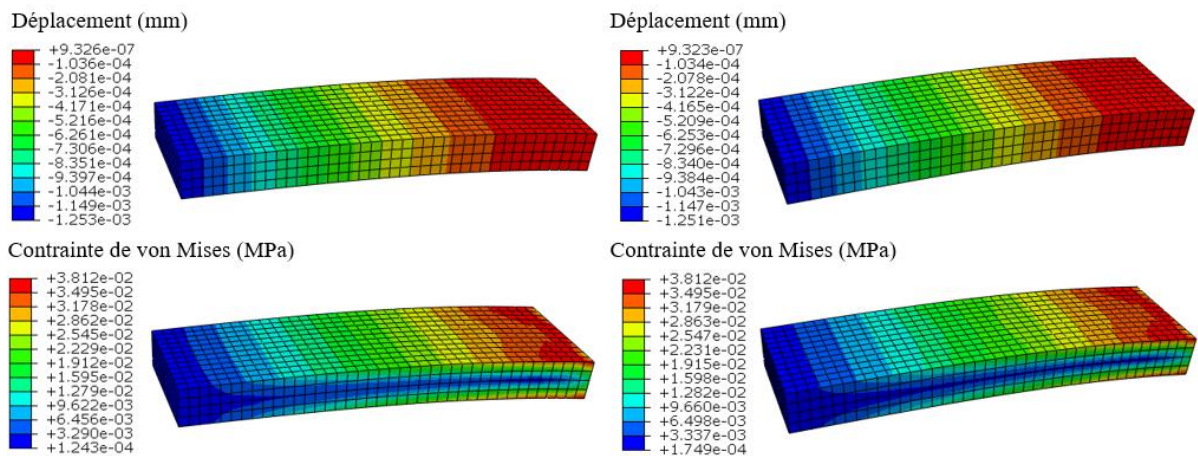


Figure 8 – Champ de déplacement et de contraintes de von Mises pour le cas 2

Tableau 1 – Erreurs sur le déplacement maximal et la contrainte de von Mises près de l'encastrement

Cas	Déplacement maximal (mm)			Contrainte de von Mises (MPa)		
	modèle volumique	modèle adaptatif	erreur (%)	modèle volumique	modèle adaptatif	erreur (%)
1	3.809×10^{-3}	3.801×10^{-3}	0.2	1.177×10^{-1}	1.175×10^{-1}	0.2
2	1.253×10^{-3}	1.251×10^{-3}	0.2	3.812×10^{-2}	3.812×10^{-2}	0.0
3	3.651×10^{-4}	3.640×10^{-4}	0.3	1.170×10^{-2}	1.167×10^{-2}	0.3

4.4 Réduction de la taille du modèle

Le Tableau 2 donne le gain dû à la réduction du modèle, grâce aux équations appliquées qui permettent d'éliminer des degrés de liberté. Ce gain, défini comme le rapport entre le nombre d'opération élémentaire requis par le modèle volumique de référence et le modèle adaptatif, est compris entre 8 et 63. Ces résultats montrent que la méthodologie adaptative permet de réduire considérablement la taille du modèle et entraîne donc une réduction des coûts de calcul.

Tableau 2 – Gain en nombre d'opération élémentaire avec la méthode adaptative

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
Gain	63	8	10

5. Conclusion

Une nouvelle méthodologie adaptative permettant d'identifier, dans le contexte de l'analyse linéaire statique, des modèles éléments finis optimum du point de vue du choix de théorie, a été présentée. Pour une structure donnée, le modèle adaptatif est constitué de différentes zones, chacune étant associée à la théorie appropriée : poutre, coque, volumique. Les bons résultats obtenus sur un exemple académique montrent que notre méthode de modélisation adaptative est prometteuse. L'approche proposée permet d'obtenir des choix de théorie cohérents pour les trois cas considérés. Le modèle adaptatif, utilisant un mélange de théories de poutre, de coque et volumique donne des résultats similaires par rapport à un modèle volumique de référence.

Remerciements

Ce travail est financé par le China Scholarship Council (CSC). Le soutien financier est grandement apprécié.

Références

- [1] F. Kpeky, F. Abed-Meraim. New linear and quadratic prismatic piezoelectric solid-shell finite elements, *Applied Mathematics and Computation*, 319: 355-368, 2018.
- [2] F. Abed-Meraim, A. Combescure. SHB8PS—a new adaptive, assumed-strain continuum mechanics shell element for impact analysis, *Computers & Structures*, 80(9-10): 791-803, 2002.
- [3] R. Hauptmann, K. Schweizerhof. A systematic development of 'solid-shell' element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42: 49-69, 1998.
- [4] H. Naceur, S. Shiri, D. Coutellier, J.L. Batoz. On the modeling and design of composite multilayered structures using solid-shell finite element model, *Finite Elements in Analysis and Design*, 70: 1-14, 2013.
- [5] J. Frischkorn, S. Reese. A solid-beam finite element and non-linear constitutive modelling, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 265: 195-212, 2013.
- [6] J. Frischkorn, S. Reese. Solid-beam finite element analysis of Nitinol stents, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 291: 42-63, 2015.
- [7] P. Lardeur, R. Scigliano, M. Scionti. Verification and validation for the vibration study of automotive structures modelled by finite elements, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 48(1):59-72, 2013.
- [8] R. Scigliano, M. Scionti, P. Lardeur. Verification, validation and variability for the vibration study of a car windscreen modeled by finite elements, *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(1): 17-29, 2011.
- [9] P. J. Roache. *Verification and validation in computational science and engineering*, Hermosa, 1998.
- [10] Z. L. Wang, J. C. M. Teo, C. K. Chui, S. H. Ong, C. H. Yan, S. C. Wang, H. K. Wong, S. H. Teoh. Computational biomechanical modelling of the lumbar spine using marching-cubes surface smoothed finite element voxel meshing, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 80(1): 25-35, 2005.
- [11] P. Coorevits, E. Bellenger. Alternative mesh optimality criteria for h-adaptive finite element method, *Finite Elements in Analysis and Design*, 40(9-10): 1195-1215, 2004.
- [12] J. N. Reddy. *Theory and analysis of elastic plates and shells*, CRC press, 2006.
- [13] H. T. Thai, T. P. Vo, T. K. Nguyen, S. E. Kim. A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates, *Composite Structures*, 177: 196-219, 2017.
- [14] J. L. Batoz, G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*, volumes 2 et 3, Hermes, 1990.
- [15] M. Hamdaoui, F. Druésne, E. M. Daya. Variability analysis of frequency dependent visco-elastic three-layered beams, *Composite Structures*, 131: 238-247, 2015.