

# Une méthodologie couplant XFEM et CZM pour la simulation de la propagation 3D de fissures dans des métaux ductiles

K. Nikolakopoulos<sup>1,2</sup>, J.P. Crété<sup>2</sup>, P. Longère<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université de Toulouse, ISAE-SUPAERO, ICA CNRS 5312, Toulouse, France, {patrice.longere, konstantinos.nikolakopoulos}@isae-supaero.fr

<sup>2</sup> ISAE-SUPMECA, Laboratoire Quartz EA 7393, Saint-Ouen, France, jean-philippe.crete@supmeca.fr

**Résumé** — On présente ici une méthodologie numérique tridimensionnelle décrivant les différentes étapes menant à la rupture des structures ductiles, à savoir l'endommagement par croissance de micro-cavités, la localisation de la déformation/endommagement dans une bande étroite et la propagation de la fissure. La phase intermédiaire de localisation est modélisée en couplant la méthode des éléments finis étendus XFEM et un modèle de zone cohésive (CZM). Une UEL est développée dans ABAQUS et une application est faite en traction.

**Mots clés** — Endommagement, Rupture ductile, Méthodes numériques, XFEM, Modèle de zone cohésive.

## 1 Introduction

L'objectif de cette étude est le développement d'une méthodologie numérique tri-dimensionnelle pour la détermination de la résistance résiduelle des structures aéronautiques ou navales lorsqu'elles sont soumises à des surcharges accidentelles (explosions, collisions, etc.). La rupture des matériaux structuraux ductiles se déroule généralement en trois étapes : endommagement sous forme de nucléation et de croissance de micro-cavités, localisation de la déformation dans une bande étroite et fissuration. Une méthodologie numérique pour le traitement de ce phénomène doit pouvoir décrire avec succès toutes les étapes et les conditions qui mènent de l'une à l'autre. Le développement d'une telle méthodologie est le but de la présente étude. Les matériaux à l'étude sont des métaux et alliages d'ingénierie constitutifs des structures navales et aéronautiques, à savoir les aciers ainsi que les alliages d'aluminium et de titane.

La première étape est l'endommagement diffus régi par le modèle de GTN [8] et la dernière étape, qui est l'ouverture de la fissure, est décrite cinématiquement par la méthode des éléments finis étendus appliquée par Crété et al. [4] pour les métaux ductiles. La deuxième étape, la plus complexe physiquement et numériquement, est la localisation de la déformation dans une bande étroite. Cette phase de localisation est décrite ici via l'association d'un segment cohésif et d'une discontinuité forte dans le cadre de la formulation XFEM, comme proposé par Wolf et al. [9]. La méthodologie tridimensionnelle est implémentée en tant que routine utilisateur (UEL) dans le code commercial par éléments finis ABAQUS.

## 2 Endommagement diffus et fissuration

Les approches utilisées pour décrire d'une part la réponse de la structure en présence de plasticité et d'endommagement plus ou moins diffus et d'autre part la propagation ultime de la fissure sont présentées dans ce chapitre.

### 2.1 Endommagement diffus GTN

Dans la première étape de la procédure, le couplage entre plasticité et endommagement ductile est décrit en utilisant le modèle de Gurson [6] tel que modifié par Tveergard et Needleman [8], dans le cadre de la méthode des éléments finis standard (FEM). Le potentiel d'écoulement plastique est écrit comme suit :

$$\Phi = \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right)^2 + 2q_1 f \cosh \left( -\frac{3}{2} q_2 \frac{p_m}{\sigma_y} \right) - (q_3 f)^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

avec  $\sigma_{eq}$  la contrainte équivalente,  $p_m$  la pression,  $\sigma_y$  la contrainte d'écoulement,  $f$  la fraction volumique des vides et  $q_1, q_2, q_3$  des constantes.

## 2.2 Fissuration XFEM

La méthode choisie dans cette étude pour décrire les conséquences cinématiques de la présence d'une fissure dans le maillage est la méthode des éléments finis étendus (XFEM) [1]. Les nœuds de chaque élément contenant la fissure sont ainsi enrichis de degrés de liberté supplémentaires et le champ de déplacement s'écrit comme suit :

$$u(x) = \sum_{i \in I} N_i \alpha_i + \sum_{j \in J} N_j \beta_j H(x) + \sum_{k \in K} N_k \left( \sum_{l=1}^n c_k^l F_l(r, \theta) \right) \quad (2)$$

où  $I$  sont les nœuds de la structure,  $J$  les nœuds d'enrichissement des éléments coupés par la fissure et  $K$  les nœuds de l'élément contenant la pointe de la fissure. Les vecteurs  $\alpha_i, \beta_j$  et  $c_k$  contiennent respectivement les degrés de chacun des cas ci-dessus et enfin  $N_i, N_j$  et  $N_k$  sont des fonctions de interpolation classiques. La fonction Heaviside est notée avec la lettre  $H$ , prenant des valeurs de  $-0.5$  à  $0.5$  ( $-0.5$  si en dessous de la fissure et  $+0.5$  sinon),  $F_l$  désigne les fonctions asymptotiques utilisées pour décrire le champ de déplacement des éléments contenant le fond de fissure, formulées à l'aide des coordonnées polaires  $r$  (distance du fond de fissure) et  $\theta$  (angle polaire).

Dans les travaux de Crété et al. [4], il a été montré que, dans le cas d'un matériau ductile élasto-plastique fortement non linéaire, comme les matériaux considérés ici, la partie asymptotique peut être omise avec une perte de précision négligeable. Ce choix permet de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté du problème. De plus, en utilisant la variante de la base décalée [10], qui empêche l'enrichissement de propager aux éléments non coupés voisins, le champ de déplacement s'exprime sous la forme :

$$u(x) = \sum_{i \in I} N_i \alpha_i + \sum_{j \in J} (H(x) - H_j) N_j \beta_j \quad (3)$$

## 3 Phase intermédiaire de localisation

Pour la description de la phase intermédiaire de localisation dans une bande étroite, la méthode utilisée est une combinaison de la méthode des éléments finis étendus XFEM brièvement rappelée plus haut et de la modélisation des zones cohésives CZM.

### 3.1 Couplage XFEM-CZM

Le couplage entre XFEM et CZM consiste à insérer un segment cohésif dans la discontinuité forte, pour former une 'discontinuité forte cohésive'. La formulation XFEM est adoptée et le système à résoudre se réduit à la forme linéaire suivante :

$$K \begin{Bmatrix} da \\ db \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^{*T} \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_D} \mathbf{N}^T \mathbf{T}_{loc} d\Gamma \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$K = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}' \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}' \mathbf{B}^* d\Omega \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D}' \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D}' \mathbf{B}^* d\Omega + 4 \int_{\Gamma_D} \mathbf{N}^T \mathbf{C}_{loc} \mathbf{N} d\Gamma \end{bmatrix} \quad (5)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  le vecteur contenant les contraintes,  $\mathbf{T}_{loc}$  le vecteur des efforts cohésifs,  $\Gamma_D$  la bande de discontinuité,  $\mathbf{B}$  la matrice des dérivées spatiales des fonctions d'interpolation,  $\mathbf{B}^*$  la matrice des dérivées spatiales des fonctions  $(H(x) - H_j) N_j$ . L'indice loc fait référence au repère local de la bande de localisation.

Le schéma d'intégration choisi provisoirement dans cette étude a été proposé par Belytschko dans [2]. Contrairement à d'autres méthodes proposées qui utilisent un grand nombre de points d'intégration, comme la méthode à 64 points dans [5], cette méthode est simple et plus légère, même si elle peut potentiellement conduire à des erreurs numériques. Les points d'intégration de l'élément (au nombre de 8 dans le cas de cette étude) sont utilisés deux fois pour l'intégration des parties supérieure et inférieure

de l'élément coupé. Eq. (6) et (7) présentent la règle de quadrature de Gauss classique et le schéma d'intégration utilisé. Le procédé comprend une moyenne des volumes relatifs de chaque sous-élément créé sur le volume de l'élément :

$$I = \sum_{i=1}^{nint} F(H_i, \xi_i, \dots) w_i J(\xi_i) \quad (6)$$

$$I = \frac{V^-}{V^e} \sum_{i=1}^{nint} F(-1, \xi_i, \dots) w_i J(\xi_i) + \frac{V^+}{V^e} \sum_{i=1}^{nint} F(+1, \xi_i, \dots) w_i J(\xi_i) \quad (7)$$

Le principe de base de cette méthode d'intégration est montrée dans la représentation visuelle d'un élément coupé et des 8 points d'intégration (marques rouges x) sur Fig. 1.

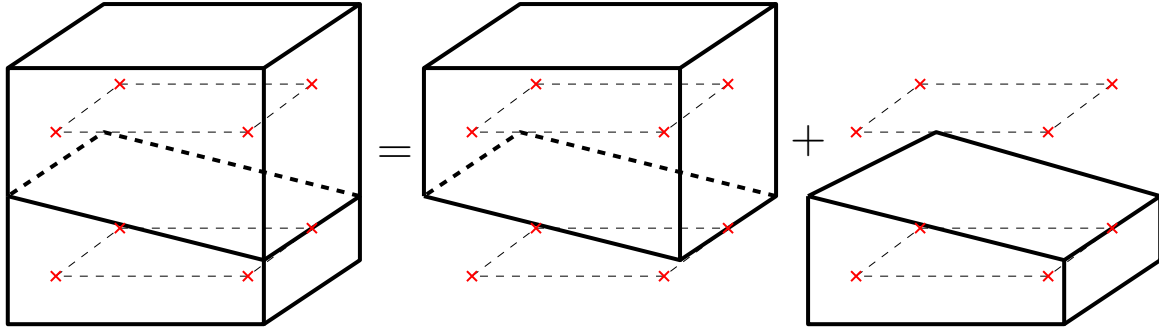


FIGURE 1 – Représentation visuelle de la méthode d'intégration adoptée

### 3.2 Modèle de CZM adopté

Pour cette étude, une loi de cohésion linéaire/plateau a été provisoirement adoptée, inspirée de l'approche de Camanho [3]. Elle est activée lorsque le critère de transition de l'endommagement diffus vers localisation est satisfait. L'adoucissement de la loi de cohésion est régie par l'évolution d'une variable d'endommagement,  $D \in [0, 1]$ , où 0 désigne un élément sain et 1 un élément fissuré.

$\Delta$  est un déplacement équivalent qui prend en compte la composante normale  $\delta_1$  et les composantes de cisaillement  $\delta_{2,3}$  du saut de déplacement, exprimées dans le repère local de la bande de localisation.

$$\Delta = \sqrt{\langle\langle \delta_1 \rangle\rangle^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}, \quad \text{où} \quad \langle\langle \delta_1 \rangle\rangle = \max(0, \delta_1) \quad (8)$$

La traction initiale au moment de la localisation de l'élément est calculée via l'utilisation d'un tenseur de contrainte moyenné  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  sur tous les points Gauss :

$$\underline{T}_0 = \langle\langle \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \underline{n} \rangle\rangle_{loc} \quad (9)$$

Le vecteur des efforts cohésifs s'écrit alors :

$$\underline{T}_{loc} = (1 - D) * \underline{T}_0, \quad \text{où} \quad D = \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta \leq \kappa_0 \\ \frac{\Delta - \kappa_0}{\kappa_c} & \text{si } \kappa_0 < \Delta < \kappa_0 + \kappa_c \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$

avec  $\kappa_0$  le seuil de déplacement équivalent, à partir duquel l'adoucissement commence et  $\kappa_c$  la valeur critique au-delà de laquelle l'élément est considéré comme rompu.

En dérivant, on obtient alors la matrice tangente de la loi cohésive :

$$C_{loc}(i, j) = \frac{\partial T_{loc}(i)}{\partial \delta_j} = -\frac{\partial D}{\partial \delta_j} * T_0(i) = -\frac{1}{\kappa_c} \frac{\delta_j}{\Delta} * T_0(i), \quad C_{loc}(i, 1) = 0 \quad \text{si } \delta_1 < 0 \quad (11)$$

Sur la Fig. 2, nous pouvons voir l'impact de la valeur  $\kappa_c$  sur l'adoucissement dans le cas de la traction d'un élément fini unique. Cette méthode conduit à une loi cohésive qui nécessite de fixer une seule constante, à savoir  $\kappa_c$ , car  $T_0$  est déterminée automatiquement par le critère de transition endommagement diffus-localisation, voir chapitre suivant.

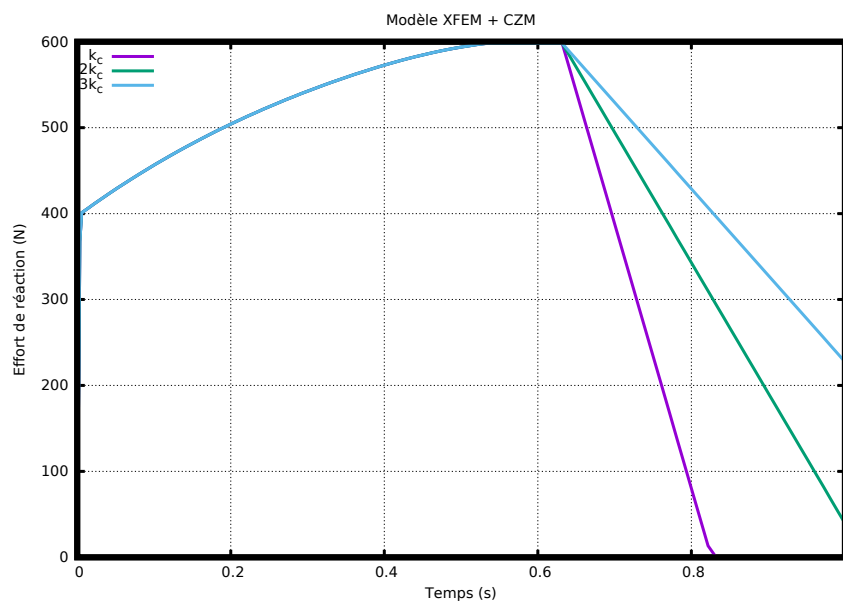


FIGURE 2 – Impact de  $\kappa_c$  sur l'adoucissement. Traction d'un élément fini unique.

## 4 Transitions

Deux critères de transition sont nécessaires : endommagement diffus vers localisation et localisation vers fissuration.

### 4.1 Endommagement diffus vers localisation

Afin de détecter le plan de localisation dans le matériau, on réalise une analyse de bifurcation [7]. Avec l'utilisation de l'opérateur tangent élastoplastique  $\underline{\underline{D}}^t$  et l'hypothèse des petites déformations, le critère consiste en la recherche du plan  $\underline{n}$  pour lequel :

$$\det(\underline{\underline{n}}^T \underline{\underline{D}}^t \underline{\underline{n}}) = 0 \quad (12)$$

On utilise une condition de porosité critique pour l'activation de la bande cohésive dans l'élément. Celle-ci n'est insérée que lorsque la porosité moyenne de tous les points de Gauss de l'élément dépasse une valeur critique  $f_c$ . De cette façon, la fissure ne se propage pas dans un élément qui n'est pas suffisamment endommagé.

### 4.2 Localisation vers fissuration

Le critère pour la transition de la localisation à la fissuration de l'élément est atteinte lorsque la variable d'endommagement  $D$  dans (10) atteint la valeur 1.

## 5 Application

La méthodologie numérique présentée a été implantée en tant que routine utilisateur (UEL) dans le code de calcul commercial par éléments finis ABAQUS. Afin de vérifier sa capacité à décrire correctement les différentes étapes de la rupture ductile, deux simulations ont été réalisées en utilisant une éprouvette

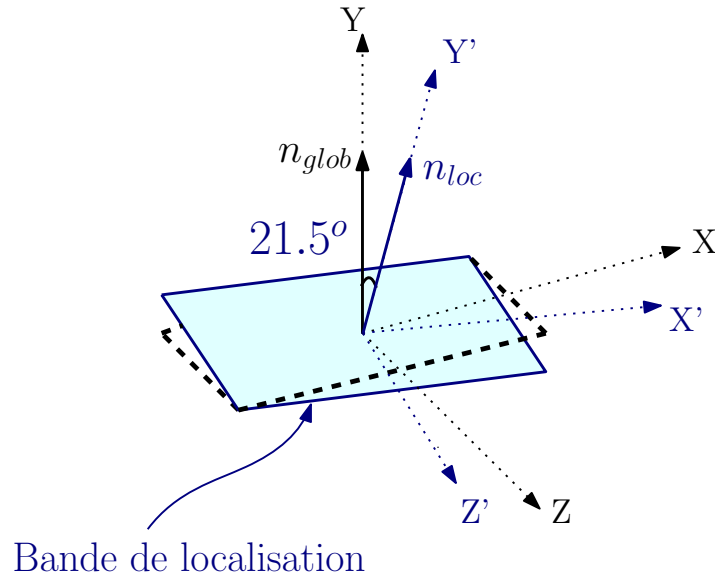


FIGURE 3 – Plan de la bande de localisation

en traction composée d'éléments hexaédriques à intégration complète (C3D8) dans le cadre des petites déformations, comme illustré à la Fig. 4. Un maillage fin et un maillage grossier ont été utilisés. L'éprouvette de traction a été choisie en raison de sa géométrie car son centre plus étroit conduit à l'apparition de la bande de localisation en son milieu. Les données spécifiques concernant les deux simulations sont indiquées dans Table 1.

TABLE 1 – Données des deux calculs

$\kappa_0$	$\kappa_c$	$f_c$	Maillage 1 (Fin)	Maillage 2 (Grossier)
3	4	0.03	11704 éléments (4 dans l'épaisseur)	1336 éléments (2 dans l'épaisseur)

La raison derrière le choix d'une valeur élevée de  $\kappa_0$ , est qu'un plateau plus important semble être avantageux pour la convergence de la simulation. Il a été noté que la propagation de la bande de localisation dans les deux maillages se fait en deux incréments différents. Bien que cela indique la capacité de la méthodologie à capturer les fissures qui se sont propagées dans la structure en plusieurs incréments, cela entraîne des difficultés de convergence, car tous les éléments localisés n'entrent pas simultanément dans les phases de plateau et d'adoucissement. Un grand plateau permet à plus d'éléments d'entrer ensemble dans la phase d'adoucissement. Le critère de bifurcation donne dans les deux cas le même plan pour la bande de localisation, comme illustré sur la Fig. 3.

Sur la Fig. 4, on peut voir les courbes d'effort de réaction des deux maillages. On peut noter qu'une légère dépendance au maillage est constatée. Le taux de croissance de porosité du maillage fin est légèrement plus élevé que celui du maillage grossier, ce qui est visible à partir de la courbe de force de réaction du maillage 1 légèrement plus basse que celle du maillage 2 et par le fait qu'il atteint plus tôt la porosité critique. Ceci conduit finalement à une différence dans l'instant où les bandes de localisation des deux maillages entrent dans la phase d'adoucissement.

Sur la Fig. 5, on peut voir quatre états différents de l'éprouvette pendant la traction (avec une visualisation de la distribution de la porosité). De gauche à droite, le premier état (I) correspond au moment où l'éprouvette atteint la frontière du domaine d'élasticité, le deuxième (II) au moment où la bande de localisation a traversé toute la largeur de l'éprouvette, le troisième (III) au moment où l'éprouvette entre en phase d'adoucissement et le quatrième (IV) lorsque l'analyse est terminée.

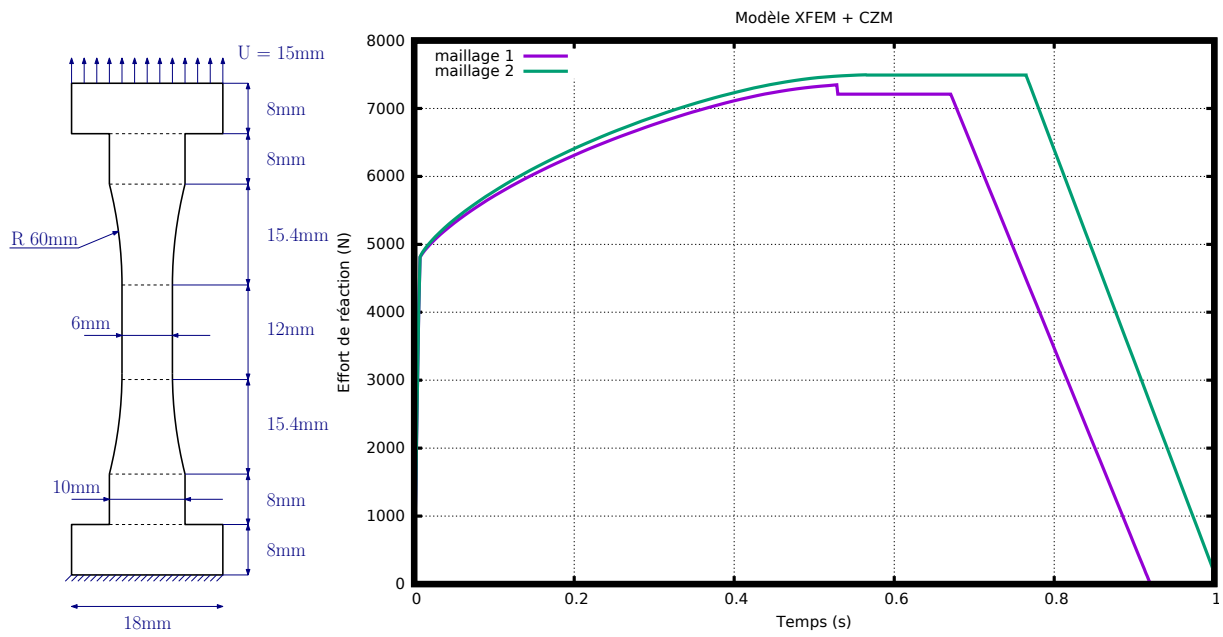


FIGURE 4 – (à gauche) Eprouvette, (à droite) affichage de l'effort de réaction pour les maillages 1 et 2

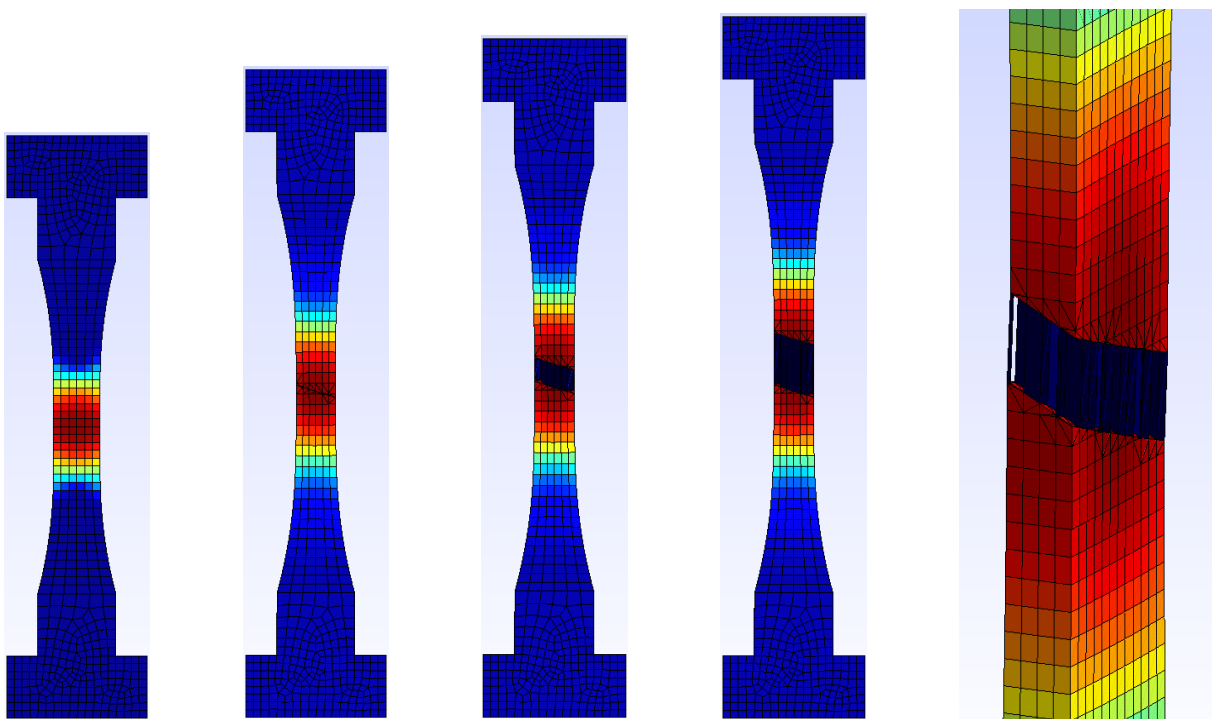


FIGURE 5 – États I à IV (de gauche à droite) et vue de côté de l'éprouvette fissuré (à droite)

## 6 Conclusions

Une méthodologie unifiée décrivant efficacement les trois étapes de la rupture ductile en 3D a été développée. Les hypothèses concernant la formulation XFEM et le schéma d'intégration ont conduit à une méthodologie simple et plus légère du point de vue calcul, malgré le fait qu'une légère dépendance au maillage a été constatée. De plus, même si pour le maillage grossier, la transition entre la phase d'endommagement diffus et la phase de localisation a été très régulière, dans le cas de maillage fin, un saut de force de réaction est évident, probablement à cause d'un calcul insuffisamment précis du vecteur des forces internes au début de la phase de localisation. Les deux faiblesses sont en cours d'amélioration. Enfin, notre objectif à court terme est le passage de l'hypothèse des petites déformations à la prise en considération des grandes déformations. L'utilisation d'une loi cohésive plus réaliste est également à l'étude.

Ce travail a été cofinancé par la Direction Générale de l'Armement (DGA).

## Références

- [1] T. Belytschko, T. Black. *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing.*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, 601-620, 1999.
- [2] T. Belytschko, J. Fish, B. E. Engelmann. *A finite element with embedded localization zones*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 59-89, 1988.
- [3] P. P. Camanho, C. G. Davila. *Mixed-Mode Decohesion Finite Elements for the Simulation of Delamination in Composite Materials.*, NASA/TM-2002-211737, 1-37, 2002.
- [4] J. P. Crété, P. Longère, J. M. Cadou. *Numerical modelling of crack propagation in ductile materials combining the GTN model and X-FEM.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 204-233, 2014.
- [5] T. Elguedj, A. Gravouil, A. Combescure. *Appropriate extended functions for x-fem simulation of plastic fracture mechanics.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 501-515, 2006.
- [6] A. L. Gurson, *Continuum theory of ductile rupture by nucleation and growth : Part i - yield criteria and flow rules for porous ductile media.*, Journal of Engineering Materials and Technology., ASME, 2-15, 1977.
- [7] J. R. Rice. *The localization of plastic deformation.*, Theoretical and Applied Mechanics, North-Holland Publishing Company , 207-220, (1976).
- [8] V. Tvergaard, A. Needleman. *Analysis of cup-cone fracture in a round tensile bar.*, Acta metallurgica, Elsevier, 157-169, (1984).
- [9] J. Wolf, P. Longère, J. M. Cadou, J. P. Crété. *Numerical modeling of strain localization in engineering ductile materials combining cohesive models and X-FEM.*, International Journal of Mechanics and Materials in Design, Springer, 177-193, 2017.
- [10] G. Zi and T. Belytschko. *New crack-tip elements for xfem and applications to cohesive cracks.*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, 2221-2240, 2003.