

## Optimisation de structures composites orthotropes au moyen des *lamination parameters*.

C. Julien<sup>1</sup>, H. Perron<sup>1</sup>, F.X. Irisarri<sup>1</sup>

<sup>1</sup>DMAS, ONERA, Université Paris Saclay, F-92322 Chatillon - France, {cedric.julien, francois-xavier.irisarri}@onera.fr

**Résumé** — Dans ce travail, on traite de l'optimisation structurale de composites stratifiés à l'aide de la représentation des *lamination parameters*. Pour un stratifié orthotrope, dans un repère considéré comme fixe, cette représentation permet de réduire le nombre de variables de l'optimisation à quatre, et cela quel que soit le nombre de couches, ce qui simplifie grandement le problème. En revanche, dans un problème d'optimisation où l'orientation locale du matériau est susceptible de changer, il faut alors également prendre en compte cette orientation comme variable de l'optimisation, ce qui n'est jamais fait dans la littérature. Cet article propose donc une méthodologie pour réaliser ces optimisations, et exhibe les difficultés qui apparaissent alors.

**Mots clefs** — Optimisation structurale, Composite stratifié, *Lamination parameters*.

### 1. Contexte et objectifs

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'optimisation structurale de structures composites. Ce domaine est particulièrement actif depuis plusieurs années en raison des nombreuses applications industrielles qu'il trouve, car l'utilisation de matériaux composites en remplacement de structures métalliques permet d'alléger considérablement les pièces et de réaliser des gains technico-économiques majeurs. Par ailleurs, certaines applications telles que l'*aeroelastic tailoring* exploitent l'anisotropie des composites pour obtenir des comportements locaux spécifiques.

La particularité de l'optimisation de composites stratifiés est de prendre en compte la nature, l'épaisseur et les orientations des couches comme variables de l'optimisation, mais également d'introduire des contraintes telles que la tenue à la rupture, ou des contraintes liées au procédé de fabrication, qui sont difficiles à formuler dans un problème d'optimisation. Ce problème fait donc l'objet d'une vaste littérature qui dégage deux approches principales [3] : i) l'utilisation de métaheuristiques (notamment des algorithmes évolutionnaires) appelées directement sur les variables discrètes et qui obtiennent un optimum global après de nombreuses évaluations ; ii) les méthodes à base de gradient, qui visent un optimum local en un nombre réduit d'itérations, mais qui nécessitent de formuler une version continument dérivable du problème d'optimisation.

Pour cette deuxième classe de méthodes, la reformulation du problème sous une forme continue et dérivable s'appuie généralement sur une paramétrisation continue des tenseurs de rigidité en membrane et en flexion du stratifié (notés respectivement **A** et **D**). Là encore, plusieurs schémas de paramétrisation existent, notamment la représentation polaire [4] qui décompose les tenseurs de rigidité en un ensemble d'invariants par changement de repère, et les *lamination parameters*, que nous utiliserons dans ce travail, qui sont décrits dans la section 2. Le point commun à ces deux représentations est la possibilité de reformuler le problème d'optimisation au moyen d'un jeu de variables continues et bornées, dont le nombre est connu *a priori*, et de séparer l'influence de la nature du pli de base, de l'épaisseur du matériau, et de la séquence d'empilement en tant que telle.

Pour des raisons mécaniques (suppression de certains couplages indésirables) ou pour simplifier la résolution du problème, la grande majorité des travaux d'optimisation composite font l'hypothèse d'un matériau orthotrope, à la fois en membrane et en flexion. Cette propriété s'obtient directement en

annulant certaines des variables de l'optimisation (cf. section 2). Dans ce cas, le matériau possède une direction privilégiée dans laquelle sa rigidité est maximale, et l'orientation locale du matériau est définie par les axes de symétrie – ou axes d'orthotropie – du matériau. Dans des problèmes d'optimisation structurale, et en particulier pour des applications *d'aeroelastic tailoring*, cette orientation locale devient une variable d'intérêt du problème d'optimisation. Dans ce travail, on visera donc à définir et mettre en œuvre une méthodologie pour adapter les stratégies usuelles d'optimisation composite au cas des composites orthotropes, de sorte à obtenir l'orientation locale optimale du matériau en fonction des champs d'efforts présents dans la pièce.

## 2. Les lamination parameters

### 2.1 Définition

Les *lamination parameters*, introduits par Miki [5], s'obtiennent à partir d'une stratification donnée en termes d'épaisseur et d'orientation des fibres. Ces termes représentent une quantité intermédiaire entre la stratification et les tenseurs de loi de comportement des plaques fines (issus de la CLT, pour Classical Laminate Theory). Pour chacun de ces tenseurs (membrane, flexion, et couplage entre membrane et flexion), les *lamination parameters* sont au nombre de quatre.

On note  $V_i^A$  (respectivement  $V_i^B, V_i^D$ ), pour  $i = 1, \dots, 4$ , les paramètres de membrane (respectivement de couplage et de flexion). Dans la suite de cet article, nous nous intéresserons uniquement aux stratifiés découplés, tels que  $V_i^B = 0$ . Dans la plupart des applications, ce couplage est en effet jugé indésirable. Cette propriété peut s'obtenir simplement en utilisant des stratifiés symétriques par rapport à leur plan moyen, même si il existe également un grand nombre de séquences d'empilement découplées bien que non symétriques.

A partir des orientations  $\theta$  des couches du stratifié, on définit les *lamination parameters* de membrane et de flexion comme suit :

$$\begin{aligned} (V_1^A, V_2^A, V_3^A, V_4^A) &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\cos 2\theta(z), \sin 2\theta(z), \cos 4\theta(z), \sin 4\theta(z)) dz \\ (V_1^D, V_2^D, V_3^D, V_4^D) &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 (\cos 2\theta(z), \sin 2\theta(z), \cos 4\theta(z), \sin 4\theta(z)) dz \end{aligned}$$

On note que par construction, ces paramètres sont continus et bornés entre -1 et 1. A partir de ces paramètres, on peut écrire directement les matrices de rigidité de membrane et de flexion  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{D}$  en fonction des *lamination parameters* :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= h(\Gamma_0 + \Gamma_1 V_1^A + \Gamma_2 V_2^A + \Gamma_3 V_3^A + \Gamma_4 V_4^A) \\ \mathbf{D} &= \frac{h^3}{12} (\Gamma_0 + \Gamma_1 V_1^D + \Gamma_2 V_2^D + \Gamma_3 V_3^D + \Gamma_4 V_4^D) \end{aligned}$$

Où :

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} U_1 & U_4 & 0 \\ U_4 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & U_5 \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} U_2 & 0 & 0 \\ 0 & -U_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & U_2/2 \\ 0 & 0 & U_2/2 \\ U_2/2 & U_2/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} U_3 & -U_3 & 0 \\ -U_3 & U_3 & 0 \\ 0 & 0 & -U_3 \end{bmatrix}, \Gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & U_3 \\ 0 & 0 & -U_3 \\ U_3 & -U_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Et les paramètres  $U_i$  sont les paramètres de Tsai et Pagano, définis à partir des composantes de rigidité  $Q_{ij}$  de la couche élémentaire comme suit :

$$\begin{aligned} U_1 &= (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})/8 \\ U_2 &= (Q_{11} - Q_{22})/2 \\ U_3 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})/8 \\ U_4 &= (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})/8 \\ U_5 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})/8 \end{aligned}$$

## 2.2 Application à l'optimisation de structures

Comme mentionné en section 1, on dispose ainsi d'un jeu de variables dont le nombre est identique quelle que soit la séquence d'empilement considérée, et qui sont continus, ouvrant ainsi la possibilité d'utiliser des méthodes à base de gradient, plus efficaces pour un grand nombre de variables d'optimisation.

Par ailleurs, l'orthotropie du matériau, que ce soit en membrane et en flexion, s'obtient naturellement en imposant :

$$V_2 = V_4 = 0 \quad (1).$$

Il convient de noter cependant que cette condition est une condition suffisante pour l'orthotropie de membrane mais pas nécessaire. En effet, puisque les *lamination parameters* sont écrits à partir d'une séquence d'empilement, ils sont intrinsèquement liés au repère dans lequel sont définies les orientations des plis. La condition (1) ne permet donc d'obtenir que des empilements orthotropes, *dont l'orientation locale du matériau est alignée avec ce repère global*. En revanche, tout matériau qui serait intrinsèquement orthotrope, mais orienté par rapport au repère global, présentera, avec la représentation ci-dessus, une anisotropie apparente, et donc des paramètres  $V_2$  et  $V_4$  non nuls.

Tout l'enjeu de ce travail est donc de proposer une méthodologie qui intègre directement l'orientation du matériau dans le problème d'optimisation, afin de décrire correctement l'ensemble des matériaux orthotropes, et non uniquement les matériaux orientés dans le repère global.

## 2.3 Ensemble de définition des *lamination parameters* et contraintes de compatibilité

L'une des principales difficultés liées à l'utilisation des *lamination parameters* consiste en la description de leur espace admissible. En effet, les paramètres de stratification sont dépendants entre eux car calculés à partir de la même séquence. Ainsi si, par définition, chaque paramètre pris indépendamment est borné entre -1 et 1, l'espace admissible pour l'ensemble des paramètres n'est pas un hypercube et la description exacte de sa frontière reste à ce jour incomplète (voir par exemple [1] et [6]).

Le problème est encore accentué par la nécessité de décrire cette frontière par un jeu de relations, nommées équations de compatibilité, qui soit facilement implémentable dans une solution commerciale d'optimisation, telle que la SOL 200 Nastran par exemple. En l'absence de ces relations, la compatibilité entre les *lamination parameters* n'est pas assurée, ce qui peut conduire à des matrices de rigidité non définies positives, et à l'arrêt du processus d'optimisation.

Ce point ne constitue pas le cœur du travail présenté ici et ne sera donc pas détaillé ici plus avant, malgré son importance. Notons néanmoins que dans le cadre de ce travail, l'enveloppe faisable des paramètres est approchée par une surface de réponse qui se formalise par un polynôme d'ordre 4. Comparée à certaines approches de la littérature, cette approximation est moins précise, mais son implémentation dans un code de calcul est très simple, et sa précision est jugée suffisante pour les applications traitées dans cet article.

### 3. Application de la méthodologie à une structure composite complexe

#### 3.1 Description du cas d'application

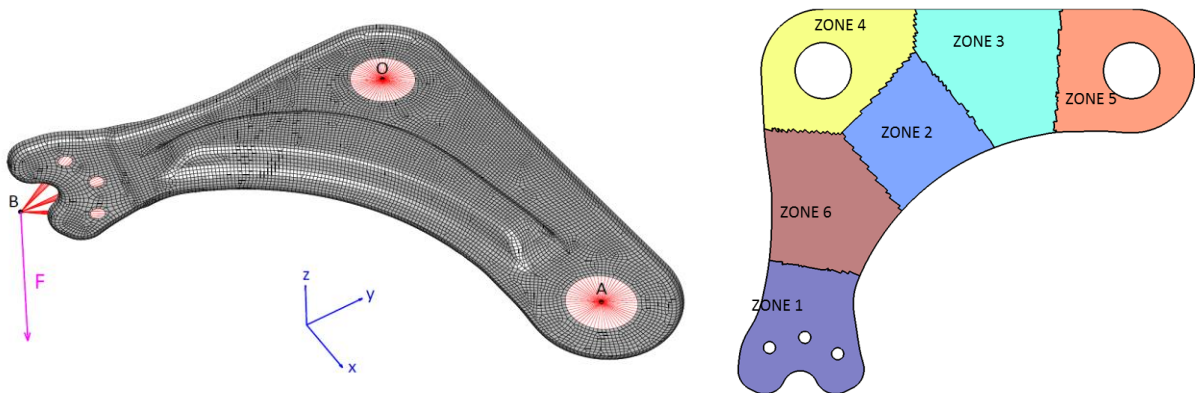


Figure 1 : Description du cas d'application : triangle de suspension composite

Le cas d'application choisi pour mettre en place la méthodologie est celui d'un triangle de suspension composite, issu d'une collaboration antérieure entre l'Onera et le CETIM Nantes [2]. La pièce décrite sur la Figure 1, est encastrée aux points O et A, et subit un effort ponctuel dans le plan x—y, appliqué au point B.

L'objectif est d'appliquer le principe d'une *variable stiffness optimization*, c'est-à-dire de chercher une structure dont la rigidité locale s'adapte au mieux aux champs d'effort appliqués. Dans ce but, la structure, discrétisée en 18768 éléments coques, est subdivisée de manière arbitraire en six zones de surfaces équivalentes, afin d'éviter de donner une pondération trop importante à une partie de la pièce par rapport aux autres au cours de l'optimisation.

La modélisation et les optimisations sont effectuées à l'aide du solveur EF Optistruct. La solution de référence est une solution dite « black metal », correspondant à un séquence quasi-isotrope à 8 plis :  $[0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ]_8$ .

#### 3.2 Formulation du problème d'optimisation

Dans ce travail, l'objectif de l'optimisation est la minimisation de la masse du triangle. La contrainte mécanique est celle d'un déplacement maximal autorisé : une fois la pièce soumise à l'effort F donné, le déplacement total du point B ne doit en effet pas dépasser une valeur limite issue du cahier des charges.

Dans chacune des zones définies sur la Figure 1, on définit un jeu de variables d'optimisation distinct. Comme rappelé en section 2, on fait l'hypothèse d'un matériau localement orthotrope, dans son repère

d'orthotropie orienté de l'angle  $\alpha$  par rapport au repère global de la structure. Dans ce repère uniquement, les propriétés de membrane (respectivement flexion), sont définies par les deux paramètres  $V_1^A$  et  $V_3^A$  (respectivement  $V_1^D$  et  $V_3^D$ ). Cependant, ce jeu de variables  $V_i$  ne peut servir directement à paramétrer les matrices **A** et **D** des éléments coques de la structure qui sont, eux, orientés par le repère global de la structure. Il faut en effet auparavant réaliser le changement de repère du repère d'orthotropie de chaque zone vers le repère global.

Compte-tenu de l'expression trigonométrique des *lamination parameters*, ce changement de repère s'effectue simplement au moyen de la relation (2), qui s'applique indifféremment à la membrane ou à la flexion. On obtient alors les quatre paramètres qui permettent d'évaluer la rigidité locale du matériau dans la zone considérée.

$$\alpha V^A = \begin{Bmatrix} \alpha V_1^A \\ \alpha V_2^A \\ \alpha V_3^A \\ \alpha V_4^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^A & -V_2^A & 0 & 0 \\ V_2^A & V_1^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3^A & -V_4^A \\ 0 & 0 & V_4^A & V_3^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \\ \cos(4\alpha) \\ \sin(4\alpha) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Finalement, dans chaque zone de la structure, les variables de l'optimisation sont :

- l'épaisseur totale du matériau,
- les deux paramètres en membrane  $V_1^A$  et  $V_3^A$ ,
- les deux paramètres en flexion  $V_1^D$  et  $V_3^D$ ,
- l'orientation locale du matériau  $\alpha$ .

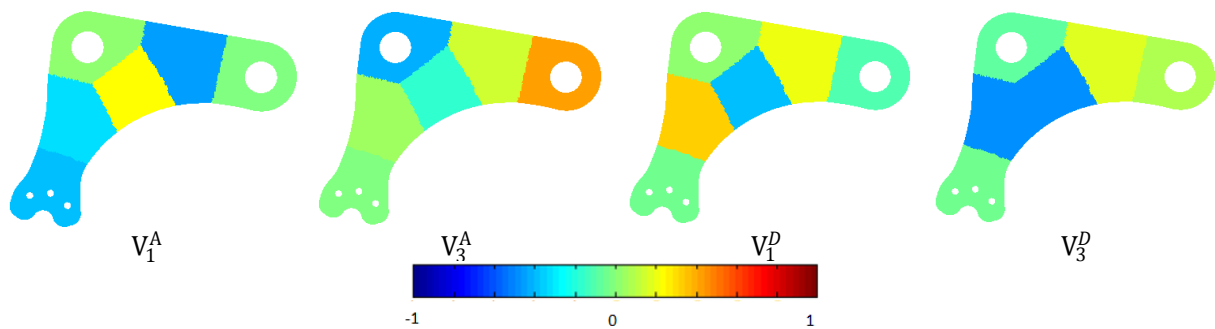
### 3.3 Premiers résultats

La Figure 2 montre les résultats obtenus après résolution de ce problème d'optimisation.

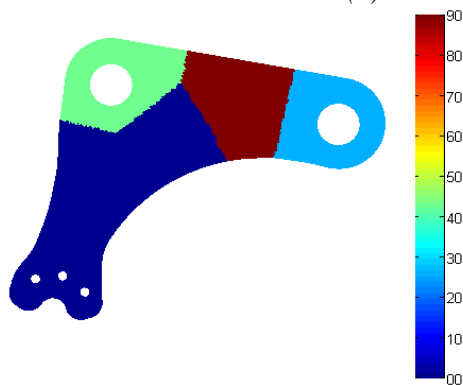
Par rapport à la solution de référence, le gain de masse est de l'ordre de 44%, ce qui montre que le concept de « variable stiffness » est critique et permet effectivement d'améliorer notablement les performances par rapport à une solution homogène. Ainsi, la zone 2, qui subit les efforts les plus importants pour ce cas de charge, est renforcée par une épaisseur qui augmente significativement. Par ailleurs, la variable d'orientation locale du matériau semble correctement exploitée.

Du point de vue des propriétés de rigidité locales, la Figure 2.a montre les distributions des *laminations parameters* dans la pièce, exprimés dans leur repère local. Pour avoir un aperçu plus représentatif de la rigidité locale du matériau, on trace sur la Figure 3 les formes d'anisotropie du matériau de chaque zone. On observe alors que la paramétrisation présentée ici souffre d'un défaut lié à la séparation entre l'orientation du repère d'une part, et les propriétés de rigidité d'autre part.

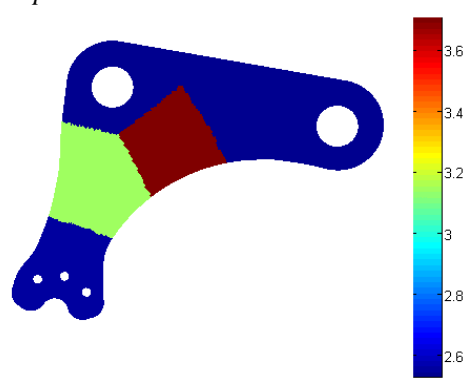
En effet, les zones 1 et 6, par exemple, apparaissent sur la Figure 2 comme étant orientées à  $0^\circ$ , c'est-à-dire dans la direction x du repère global. Or, la Figure 3 montre que la direction de plus grande rigidité (représentée par la flèche rouge) du matériau dans ces zones est à l'inverse alignée sur la direction y du repère global. Cela s'explique par le fait que l'orientation  $\alpha$ , telle qu'elle est introduite ici, donne la direction d'un des deux axes du repère d'orthotropie, mais ne donne aucune information sur la forme d'anisotropie elle-même, qui est intégralement paramétrée par le jeu des *lamination parameters*. La conséquence est l'absence d'univocité entre un jeu de variables d'optimisation donné et une forme d'anisotropie équivalente. Ce point constitue un écueil qui sera levé dans la suite de ces travaux.



(a) Valeurs des *lamination parameters*



(a) Orientation du stratifié en  $^{\circ}$



(b) Epaisseur du stratifié en mm

Figure 2 : Résultats de l'optimisation sur le triangle de suspension avec prise en compte de l'orientation matériau

Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4	Zone 5	Zone 6

Figure 3 : Formes d'anisotropie optimales dans le triangle de suspension composite

#### 4. Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous décrivons une nouvelle paramétrisation d'un problème d'optimisation de structures composites orthotropes. L'idée principale consiste à prendre en considération l'orientation locale du matériau directement comme variable d'optimisation, afin d'élargir la recherche de solutions et de ne pas se contenter des stratifiés orthotropes et alignés avec le repère global.

Cependant, l'utilisation des *lamination parameters* met en évidence la distinction entre l'orientation du repère local et la direction de plus grande rigidité, qui est la quantité la plus pertinente pour une optimisation en *variable stiffness*. De plus, l'absence d'univocité entre un jeu de variables

d'optimisation et une forme d'anisotropie pose un problème au niveau de l'interprétation des solutions.

Pour pallier ces problèmes, ce travail sera repris en utilisant la représentation polaire, plutôt que les *lamination parameters*, pour paramétrer la rigidité du stratifié. En effet, cette représentation se base précisément sur des grandeurs invariantes par changement de repère, ce qui devrait permettre de s'affranchir des difficultés rencontrées. En revanche, l'introduction du formalisme polaire, basé sur une décomposition complexe des tenseurs de rigidité, dans les solveurs commerciaux type Optistruct, n'est pas triviale et devra faire l'objet d'un soin particulier.

## Références

- [1] M.W. Bloomfield, C.G. Diaconu, P.M. Weaver. On feasible regions of lamination parameters for lay-up optimization of laminated composites, Proceedings of the Royal society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 465-2104 (2009), pp 1123-1143.
- [2] A. Exertier, C. Fagiano. Thermoplastic composite wishbone : the future of automotive composites, JEC Magazine n°82 (2013).
- [3] H. Ghiasi *et al.* Optimum Stacking Sequence Design of composite Materials Part II : Variable Stiffness Design, Composite Structures (2010), doi:10.1016/j.compstruct.2010.06.001.
- [4] A. Jibawy, C. Julien, B. Desmorat, A. Vincenti, F. Lene. Hierarchical structural optimization of laminated plates using polar representation, International Journal of Solids and Structures 48 (2011), pp 2576-2584, Elsevier.
- [5] M. Miki. A graphical method for designing fibrous laminated composites with required in-plane stiffness, Japan Society for composite Materials, Transactions, Vol. 9 (1983), pp 51-55.
- [6] S. Setoodeh, M.M. Abdalla, Z. Gurdal. Approximate feasible regions for lamination parameters, 11<sup>th</sup> AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization conference, Portsmouth, 2006.