

# Une formulation monolithique d'interaction fluide-structure pour la co-simulation appliquée au piston 1D

M. Gibert<sup>1,3</sup>, A. Bel-Brunon<sup>1</sup>, M. Brun<sup>2</sup>, A. Gravouil<sup>1</sup>, M. Rochette<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université de Lyon, INSA-Lyon, LaMCoS, CNRS UMR 5259, F-69621, France, {marie.gibert, aline-bel-brunon, anthony.gravouil}@insa-lyon.fr

<sup>2</sup> Université de Lyon, INSA-Lyon, GEOMAS, F-69621, France, michael.brun@insa-lyon.fr

<sup>3</sup> ANSYS Research & Development, France, marie.gibert,michel.rochette@ansys.com

**Résumé** — Ce résumé étendu a pour but de présenter une méthode de couplage pour les problèmes d'interaction fluide-structure, dont le but est d'être conservatif et d'utiliser des méthodes de calcul usuelles pour chaque sous-domaine fluide et structure. Ainsi le couplage est basé sur une formulation monolithique de la conservation de l'énergie et est résolu par un algorithme de co-simulation. Le but final est de coupler deux codes commerciaux existants. La méthode proposée est validée sur le cas test du piston 1D, en mono et multi-échelle en temps.

**Mots clés** — Interaction Fluide-Structure, Éléments finis, Volumes finis.

## 1 Introduction

Le couplage d'interactions fluide-structure de par ses nombreux domaines d'application (aérospatial, biomédical, génie civil, etc...) a connu de nombreux développements ces trente dernières années. De ce fait, de nombreuses méthodes de couplage existent ainsi que plusieurs classifications et définitions. Nous faisons le choix d'utiliser ici une classification basée sur la formulation.

Ainsi, en terme de formulation, les problèmes de couplage peuvent être sous-divisés en deux grandes catégories ; les couplages partitionnés traitent le problème d'une manière découplée tandis que dans les couplages monolithiques, le sous-domaine fluide, le sous-domaine structure et l'interface sont pensés ensemble, voir Fig.1. Les méthodes partitionnées présentent l'avantage d'être faciles à implémenter mais sont sujettes à un manque de précision dû au décalage temporel induit par la méthode. Les méthodes monolithiques sont quant à elles, meilleures en terme de précision et de stabilité mais sont plus difficiles à implémenter et difficilement généralisables.



FIGURE 1 – Formulation partitionnée versus Formulation monolithique

Afin de garantir la conservation de l'énergie la méthode choisie ici est donc basée sur une formulation monolithique. Cependant pour pallier les difficultés d'implémentation et de généralisation nous nous basons sur la méthode de couplage GC [4], initialement construite pour les couplages de sous-domaines structure-structure. Cette méthode permet de construire un algorithme de type prédicateur/correcteur sans décalage en temps entre les deux sous-domaines en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode de couplage a été étendue au problème d'interaction fluide-structure, et a montré des résultats prometteurs. Par exemple, Casadei [3] a proposé une méthode explicite de couplage d'élément finis et de volumes finis vertex centrés. Li a construit une méthode de couplage pour éléments finis et particules SPH [7]. Enfin, plus récemment Meduri a proposé un couplage entièrement Lagrangien d'élément finis fluides et solides [8].

Le but ici est d'étendre cette méthode de couplage à des méthodes de discrétisation spatio-temporelle plus classiques pour chacune des deux physiques afin de pouvoir effectuer des couplages de codes com-

merciaux. Ainsi, le sous-domaine structure utilise une formulation lagrangienne et est discrétisé spatialement par la méthode des éléments finis et temporellement par un schéma de Newmark implicite. Le fluide est lui écrit selon une formulation Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE), discrétisé par la méthode des volumes finis (cellule-centré et vertex-centré) et un schéma de Runge Kutta d'ordre deux explicite. Enfin, chaque sous domaine utilise un pas de temps qui lui est propre.

La méthode d'intégration du problème global est donc hétérogène et asynchrone.

Dans une première partie les méthodes de discrétisation de chaque sous-domaine sont brièvement rappelées. Dans une seconde partie, la méthode de couplage est présentée. Enfin celle-ci est validée par le cas test du piston 1D.

## 2 Équations constitutives

On considère le domaine  $\Omega \times [0, T]$  fermé, partitionné spatialement, sans recouvrement, en un sous-domaine fluide  $\Omega_f$  et structure  $\Omega_s$ , tel que  $\Omega_f \cap \Omega_s = \emptyset$ . On appelle  $\Gamma_f$  la frontière extérieure du sous-domaine fluide, respectivement  $\Gamma_s$  pour le sous-domaine structure. Enfin on dénomme  $\Gamma_{FSI}$  la frontière entre les deux sous-domaines, voir Fig. (2).

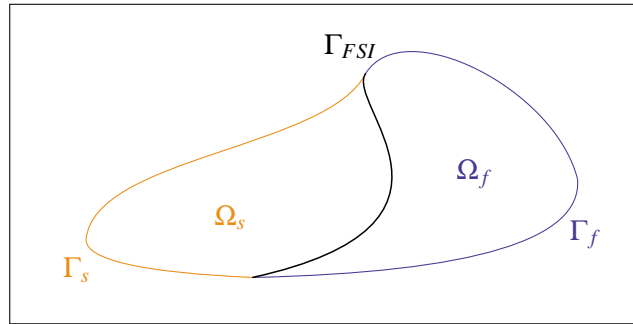


FIGURE 2 – Géométrie du problème d'interaction fluide-structure

Le fluide considéré est compressible, non visqueux et soumis à la lois des gaz parfaits. Le sous-domaine structure est considéré homogène, continu et isotrope, de densité  $\rho_s$ . Nous modélisons un matériau linéaire élastique en petites déformations sous l'hypothèse des petites perturbations.

### 2.1 Structure

La discrétisation spatiale du sous-domaine  $\Omega_s$  utilise la méthode des éléments finis. Celle-ci utilise une formulation Lagrangienne et la formulation faible de l'équation du mouvement. Ainsi, sous nos hypothèses et les conditions aux limites on cherche le vecteur d'état structure discrétisé admissible  $\mathbf{U}_s(t) = [\mathbf{d}_s, \mathbf{v}_s, \mathbf{a}_s]^T(t)$ , avec  $\mathbf{d}_s, \mathbf{v}_s, \mathbf{a}_s$  les champs discrétisés des déplacements, vitesses et accélérations respectivement, tels que :

$$\mathbf{M}_s \mathbf{a}_s(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{d}_s(t) = \mathbf{F}_s(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (1)$$

Où dans l'équation semi-discrétisée (1)  $\mathbf{M}_s$  est la matrice de masse,  $\mathbf{K}_s$  est la matrice de rigidité et  $\mathbf{F}_s$  est le vecteur des forces extérieures.

Finalement on utilise le schéma de Newmark implicite comme discrétisation temporelle. Celui-ci est d'ordre deux et inconditionnellement stable. Ainsi le vecteur d'état structure discrétisé à l'instant  $t^{(n+1)}$

tel que :

$$\mathbf{a}_s^{(n+1)} = \tilde{\mathbf{M}}_s^{-1} (\mathbf{F}^{(n+1)} - \mathbf{K}_s \mathbf{d}_{pred}^{(n+1)}) \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_s^{(n+1)} = \underbrace{\mathbf{v}_s^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}_s^{(n)}}_{\mathbf{v}_{pred}^{(n+1)}} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}_s^{(n+1)} \quad (3)$$

$$\mathbf{d}_s^{(n+1)} = \underbrace{\mathbf{d}_s^{(n)} + \Delta t \mathbf{v}_s^{(n)}}_{\mathbf{d}_{pred}^{(n+1)}} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{a}_s^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{a}_s^{(n+1)} \quad (4)$$

Où l'on pose  $\tilde{\mathbf{M}}_s = (\mathbf{M}_s + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K}_s)$ .

## 2.2 Fluide

Au vu des hypothèses considérées, nous utilisons les équations d'Euler (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie) pour modéliser le sous-domaine fluide. Ainsi on cherche le vecteur des quantités conservatives  $\mathbf{U}_f = [\rho_f, \rho_f \mathbf{v}_f, E_f]^T$  admissibles sur  $\Omega_f \times [0, T]$ .

Les équations d'Euler sont classiquement écrites pour les problèmes fluides dans leur forme Eulerienne, c'est-à-dire dans le référentiel laboratoire, fixes. Cependant, résolvant ici un problème d'interaction fluide-structure sans recouvrement, nous devons utiliser un référentiel dynamique, afin que celui-ci "colle" à chaque instant à la frontière  $\Gamma_{FSI}$ . La formulation Lagrangienne, référentiel matériel, étant peu adaptée aux problèmes fluides en dynamique rapide, nous utilisons une formulation ALE. La grille ALE est définie par sa vitesse  $\underline{w}$ . Celle-ci est Lagrangienne aux frontières du domaine défini par les conditions aux limites sur  $\Gamma_f$  et par la condition de continuité des vitesse sur  $\Gamma_{FSI}$ . Sur  $\Omega_f$ , l'intérieur du domaine fluide,  $w$  est défini arbitrairement par une loi quelconque sous contrainte de la conditions CFL. Ainsi les équations d'Euler continues, en formulation ALE s'écrivent :

$$\frac{\partial J \mathbf{U}_f}{\partial t} + J \nabla \cdot (\mathbf{F}_f - \underline{w} \mathbf{U}_f) = \mathbf{0} \quad (5)$$

Où  $J$  est la jacobienne de transformation entre l'espace Eulerien et ALE et  $\mathbf{F}_f$  le vecteur flux défini comme  $\mathbf{F}_f = [\rho \underline{v}, \rho \underline{v} \otimes \underline{v} + p \underline{I}, (E + p) \underline{v}]^T$ . On introduit la notation  $\tilde{\mathbf{F}}_f = \mathbf{F}_f - \underline{w} \mathbf{U}_f$ . En utilisant la formulation intégrale de l'équation (5) et la méthode des volumes finis cellule-centrés, on écrit les équations d'Euler semi-discrétisées sur un volume fini  $V_i$  de frontière  $\Gamma_{V_i}$  comme :

$$\frac{\partial \Delta V_{f_i}(t) \mathbf{U}_{f_i}(t)}{\partial t} = - \sum_{\forall \Gamma_{ih} \in \Gamma_{V_{f_i}}} s_{f_{ih}}(t) \tilde{\mathbf{F}}_{f_{ih}}(t) \quad \forall i \in [1, \dots, n_{cell}], \quad \forall t \in [0, T] \quad (6)$$

Où  $n_{cell}$  est le nombre de cellules du sous-domaine  $\Omega_f$ .  $\Delta V_i$  est le volume de la  $i^{ème}$  cellule et  $s_{ih}$  l'aire de la frontière entre la  $i^{ème}$  cellule et sa  $h^{ème}$  cellule voisine, ces deux grandeurs étant variables en conséquence de l'utilisation de la formulation ALE. Enfin  $\tilde{\mathbf{F}}_{f_{ih}}$  est le flux numérique entre la cellule courante  $i$  est la cellule adjacente  $h$ , défini ici par la méthode Flux Difference splitting de Roe [12].

Enfin c'est le schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre deux qui est utilisé pour la discrétisation temporelle de l'équation (6).

$$\Delta V_{f_i}^{(n+\frac{1}{2})} \mathbf{U}_{f_i}^{(n+\frac{1}{2})} = \Delta V_{f_i}^{(n)} \mathbf{U}_{f_i}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} \sum_{\forall \Gamma_{ih} \in \Gamma_{V_{f_i}}} s_{f_{ih}}^{(n+\frac{1}{2})} \tilde{\mathbf{F}}_{f_{ih}}^{(n)} \quad (7)$$

$$\Delta V_{f_i}^{(n+1)} \mathbf{U}_{f_i}^{(n+1)} = \Delta V_{f_i}^{(n)} \mathbf{U}_{f_i}^{(n)} - \Delta t \sum_{\forall \Gamma_{ih} \in \Gamma_{V_{f_i}}} s_{f_{ih}}^{(n+1)} \tilde{\mathbf{F}}_{f_{ih}}^{(n+\frac{1}{2})} \quad (8)$$

Dans la méthode des volumes finis cellule-centrés, le vecteur des variables conservatives est défini aux centres des cellules, ainsi pour connaître le flux numérique sur la frontière du domaine il est nécessaire d'utiliser des cellules fantômes, définies par extrapolation. Les variables à l'interface  $\Gamma_{FSI}$  ne sont

donc pas connues de manière exacte, ce qui entraîne une approximation dans l'expression de la continuité des vitesses fluide et structure.

Pour pallier ce problème, nous définissons également les équations fluides avec la méthode des volumes finis vertex-centrés, avec les mêmes méthodes de discrétisation temporelle. Ainsi la vitesse sera calculée et non plus extrapolée aux frontières. L'écriture des équations est similaire aux équations (7) et (8) à ceci près qu'elles sont valables pour tout  $i \in [1, \dots, n_{vertex}]$  avec  $n_{vertex}$  le nombre de vertex.

### 3 Méthode de couplage

#### 3.1 Formulation monolithique multi pas de temps

La méthode de couplage GC est basée sur une formulation duale du complément de Schur, qui consiste à imposer la continuité des vitesses au travers de l'interface  $\Gamma_{FSI}$ . Pour ce faire, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est utilisée. Ainsi on peut écrire la condition cinématique suivante :

$$\mathbf{L}_s \mathbf{v}_s(t) + \mathbf{I}_f \mathbf{v}_{f_{vertex}}(t) = \mathbf{0} \quad (9)$$

Où  $\mathbf{L}_s$  est le vecteur ligne de sélection des noeuds éléments finis appartenant à l'interface, sa taille est égale au nombre de noeuds. De la même manière, l'opérateur  $\mathbf{I}_f$ , est le vecteur ligne de sélection des vertex des volumes finis appartenant à l'interface  $\Gamma_{FSI}$ . Lorsque les grilles de discrétisation fluide et structure sont compatibles à l'interface, les opérateurs  $\mathbf{L}$  sont booléens.

Enfin, on peut écrire les équations d'équilibre semi-discrétisées des sous-domaines fluide et solide, en utilisant les multiplicateurs de Lagrange, ainsi la condition de continuité des vitesse est respectée :

$$\mathbf{M}_s \mathbf{a}_s(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{d}_s(t) = \mathbf{F}_s(t) - \mathbf{L}_s^T \Lambda(t) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Delta V_{f_i}(t) \mathbf{U}_{f_i}(t)}{\partial t} = - \sum_{\forall \Gamma_{ih} \in \Gamma_{V_{f_i}}} (s_{f_{ih}}(t) \tilde{\mathbf{F}}_{f_{ih}}(t) + \mathbf{L}_{f_{ih}}^T \Lambda_{ih}(t)) \quad (11)$$

Les multiplicateurs de Lagrange représentent la force d'interaction entre les deux sous-domaines.  $\mathbf{L}_f$ , est une matrice de taille  $(n_{vertex} \times 3)$ , où la première et la dernière colonnes sont des vecteurs nul de taille  $(n_{vertex})$  et la colonne du milieu est le vecteur de sélection des vertex transposé  $\mathbf{I}_f^T$ . Ainsi  $\mathbf{L}_f = [\mathbf{0}, \mathbf{I}_f^T, \mathbf{0}]$ , permet de prendre en compte les force d'interaction à l'interface  $\Gamma_{FSI}$ , pour les cellules dont un ou plusieurs vertex appartiennent à l'interface dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Ainsi les équations (9), (10) et (11) forment le système monolithique semi-discrétisé.

En ce qui concerne la discrétisation temporelle, nous faisons le choix d'utiliser une échelle temporelle propre à chaque sous-domaine. Au vu des hypothèses et des choix de discrétisation temporelle, le sous-domaine fluide est discrétisé sur une échelle micro-temps tandis que le sous-domaine structure est discrétisé sur une échelle macro-temps. On définit  $\Delta t$  le micro pas de temps entre les instants  $t^{(j-1)}$  et  $t^{(j)}$  et  $\Delta T$  le macro pas de temps entre les instant  $t^{(0)}$  et  $t^{(m)}$  tel que  $\Delta T = m\Delta t$ . Enfin en appliquant ces échelles de temps aux méthodes de discrétisation décrites dans la section précédente (équations (2), (3), (4), (7) et (8)) pour les équations (10) et (11) et en choisissant un collage en vitesse au micro pas de temps pour l'équation (9), on obtient le système discrétisé suivant :

$$\begin{cases} (\mathbf{M}_s + \frac{\Delta T^2}{4} \mathbf{K}_s) \mathbf{a}_s^{(m)} = -\mathbf{K}_s \mathbf{d}_{pred}^{(m)} - \mathbf{L}_s^T \Lambda^{(m)} \\ \Delta V_{f_i}^{(j-\frac{1}{2})} \mathbf{U}_{f_i}^{(j-\frac{1}{2})} = \Delta V_{f_i}^{(j-1)} \mathbf{U}_{f_i}^{(j-1)} - \frac{\Delta t}{2} \sum (s_{f_{ih}}^{(j-\frac{1}{2})} \tilde{\mathbf{F}}_{f_{ih}}^{(j-1)} + \mathbf{L}_{f_{ih}}^T \Lambda_{ih}^{(j-\frac{1}{2})}) \\ \Delta V_{f_i}^{(j)} \mathbf{U}_{f_i}^{(j)} = \Delta V_{f_i}^{(j-1)} \mathbf{U}_{f_i}^{(j-1)} - \Delta t \sum (s_{f_{ih}}^{(j)} \tilde{\mathbf{F}}_{f_{ih}}^{(j-\frac{1}{2})} + \mathbf{L}_{f_{ih}}^T \Lambda_{ih}^{(j)}) \quad j = 1, \dots, m \\ \mathbf{L}_s \mathbf{v}_s^{(j)} + \mathbf{I}_f \mathbf{v}_{f_{vertex}}^{(j)} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (12)$$

#### 3.2 Algorithme de co-simulation

Pour résoudre le système (12), plusieurs astuces sont utilisées. Premièrement il est nécessaire de définir les vitesses de la structure à l'interface au demi-micro pas de temps et au micro pas de temps. On utilise une simple interpolation linéaire telle que :

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_s \mathbf{v}_s^{(j-\frac{1}{2})} &= (1 - \frac{j-\frac{1}{2}}{m}) \mathbf{L}_s \mathbf{v}_s^{(0)} + \frac{j-\frac{1}{2}}{m} \mathbf{L}_s \mathbf{v}_s^{(m)} \\ \mathbf{L}_s \mathbf{v}_s^{(j)} &= (1 - \frac{j}{m}) \mathbf{L}_s \mathbf{v}_s^{(0)} + \frac{j}{m} \mathbf{L}_s \mathbf{v}_s^{(m)}\end{aligned}$$

Le même type d'interpolation est utilisé pour définir les multiplicateurs de Lagrange.

La deuxième astuce consiste à diviser les variables fluides et solides en une partie appelée "*free*" qui correspond à un état prédictif, sans interaction à l'interface, et en une partie "*link*" correspondant à la correction de l'état par la prise en compte des forces d'interaction. Ainsi on écrit pour la partie structure :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{s_{free}}^{(m)} &= \tilde{\mathbf{M}}_s^{-1} (\mathbf{F}^{(m)} - \mathbf{K}_s \mathbf{d}_{pred}^{(m)}) & \mathbf{a}_{s_{link}}^{(m)} &= -\tilde{\mathbf{M}}_s^{-1} \mathbf{L}_s \Lambda^{(m)} \\ \mathbf{v}_{s_{free}}^{(m)} &= \mathbf{v}_{pred}^{(m)} + \frac{\Delta T}{2} \mathbf{a}_{s_{free}}^{(m)} & \mathbf{v}_{s_{link}}^{(m)} &= \frac{\Delta T}{2} \mathbf{a}_{s_{link}}^{(m)} \\ \mathbf{d}_{s_{free}}^{(m)} &= \mathbf{d}_{pred}^{(m)} + \frac{\Delta T^2}{4} \mathbf{a}_{s_{free}}^{(m)} & \mathbf{d}_{s_{link}}^{(m)} &= \frac{\Delta T^2}{4} \mathbf{a}_{s_{link}}^{(m)}\end{aligned}$$

De la même manière sur  $\Omega_f$  :

$$\begin{aligned}(\Delta V \mathbf{U})_{f_{free_i}}^{(j-\frac{1}{2})} &= \Delta V_{f_i}^{(j-1)} \mathbf{U}_{f_i}^{(j-1)} - \frac{\Delta t}{2} \sum s_{f_{ih}}^{(j-\frac{1}{2})} \tilde{\mathbf{F}}_{f_{ih}}^{(j-1)} & (\Delta V \mathbf{U})_{f_{link_i}}^{(j-\frac{1}{2})} &= -\frac{\Delta t}{2} \sum \mathbf{L}_{f_{ih}}^T \Lambda_{ih}^{(j-\frac{1}{2})} \\ (\Delta V \mathbf{U})_{f_{free_i}}^{(j)} &= \Delta V_{f_i}^{(j-1)} \mathbf{U}_{f_i}^{(j-1)} - \Delta t \sum s_{f_{ih}}^{(j)} \tilde{\mathbf{F}}_{f_{ih}}^{(j-\frac{1}{2})} & (\Delta V \mathbf{U})_{f_{link_i}}^{(j)} &= -\Delta t \sum \mathbf{L}_{f_{ih}}^T \Lambda_{ih}^{(j)}\end{aligned}$$

On rappelle que la première et la dernière colonnes de l'opérateur de sélection des vertex sont des vecteurs nuls. Ainsi  $(\Delta V \rho)_{f_{link}} = \mathbf{0}$  et  $(\Delta V E)_{f_{link}} = \mathbf{0}$ .

En utilisant la relation  $\mathbf{U}_s = \mathbf{U}_{s_{free}} + \mathbf{U}_{s_{link}}$  respectivement  $\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_{f_{free}} + \mathbf{U}_{f_{link}}$  on peut définir  $\Lambda$  tel que :

$$(\mathbf{H}_s + \mathbf{H}_f) \Lambda^{(j)} = \mathbf{L}_s \mathbf{v}_{s_{free}}^{(j)} + \mathbf{l}_f \mathbf{v}_{vertex_{f_{free}}}^{(j)} \quad (13)$$

L'équation (13) s'écrit de la même manière au demi micro pas de temps  $t^{(j-\frac{1}{2})}$ .

On pose alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_s &= \frac{1}{2} \Delta T \mathbf{L}_s \tilde{\mathbf{M}}_s^{-1} \mathbf{L}_s^T \\ \mathbf{H}_f^{(j-\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{l}_f \mathbf{M}_f^{(j-\frac{1}{2})-1} \mathbf{l}_f^T \\ \mathbf{H}_f^{(j)} &= \Delta t \mathbf{l}_f \mathbf{M}_f^{(j)-1} \mathbf{l}_f^T\end{aligned}$$

On définit la matrice de masse fluide  $\mathbf{M}_f$  comme la matrice diagonale de taille  $(n_{vertex} \times n_{vertex})$  telle que  $\mathbf{M}_{f_{ii}} = (\Delta V \rho)_i$ .

Enfin, la dernière astuce consiste à conserver les variables conservatives fluides groupées avec le volume des cellules. Après avoir calculé les variables conservatives fluides groupées  $(\Delta V \mathbf{U})_f$ , on peut accéder à la vitesse dans le fluide prenant en compte l'interaction avec la structure par la relation suivante :

$$\mathbf{v}_{f_{vertex}} = \frac{(\Delta V \rho \mathbf{v})_{f_{vertex}}}{(\Delta V \rho)_{f_{vertex}}}$$

L'algorithme de couplage monolithique éléments finis / volumes finis vertex centrés apparaît alors. Pour la méthode de couplage utilisant les volume finis cellule-centrés, il est nécessaire d'ajouter la définition de la vitesse à la frontière  $\Gamma_{FSI}$ . Nous utilisons simplement une extrapolation des cellules intérieures d'ordre 1.

L'algorithme est détaillé sur la fig. (12), l'idée générale est la suivante : on calcule les variables *free* de la structure au macro pas de temps et fluide au demi-micro pas de temps, on utilise les vitesses *free* (obtenues par interpolation pour la structure) pour calculer le multiplicateur de Lagrange au demi-micro pas de temps. En utilisant ce dernier on peut connaître l'état *link* puis total du fluide. On répète l'opération au micro pas de temps, puis jusqu'à ce que  $j = m$ . On calcule alors au macro pas de temps, en plus de l'état fluide, l'état *link* puis total de la structure.

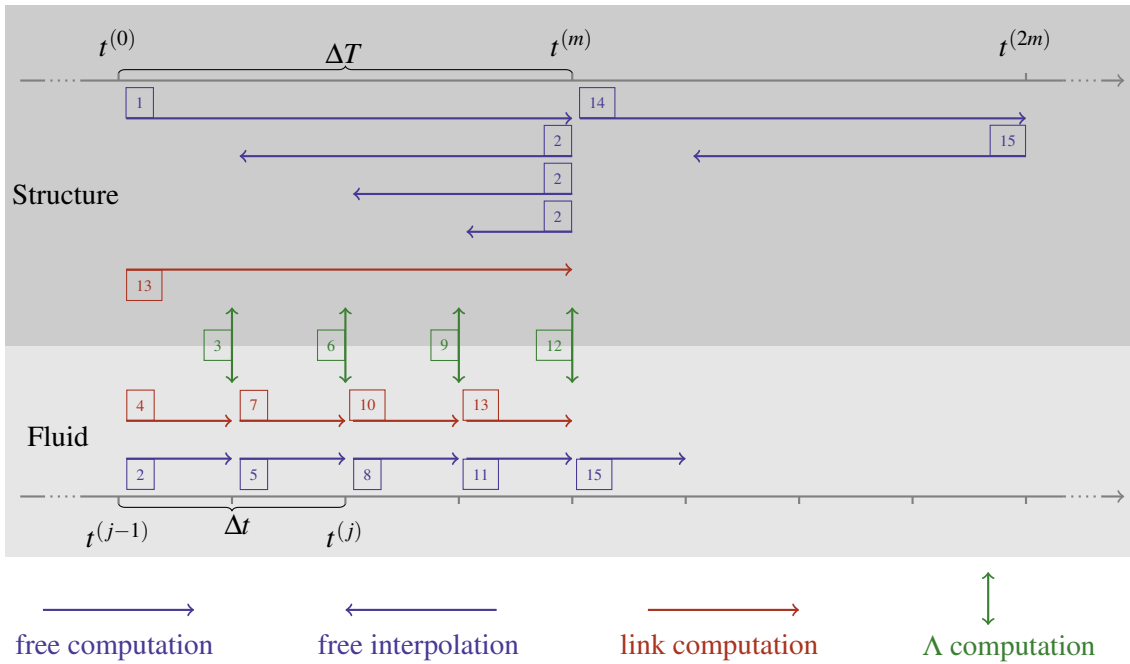


FIGURE 3 – Algorithme multi-pas de temps

## 4 Cas test numérique

Pour valider la méthode présentée dans la section précédente, on choisit d'utiliser le cas test du piston. Ce cas test a été introduit en 1995 par Piperno [11]. Il a été par la suite utilisé à de nombreuses reprises pour valider de nouvelles méthodes FSI. Il présente l'avantage d'être extrêmement simple, un problème aéro-élastique en une dimension. Nous choisissons d'utiliser ici le set de paramètres matériau et géométrique proposé par Michler [9].

### 4.1 Présentation

Un gaz est enfermé dans une cavité mesurant  $1m$  de long à l'état d'équilibre. L'extrémité gauche de celle-ci est fermée par un mur fixe, tandis que son extrémité droite est fermée par un système masse-ressort, voir Fig. (4)

Le domaine fluide  $\Omega_f$  est composé d'air, d'indice adiabatique  $\gamma_f = 1.4$ . On considère ce fluide comme un gaz parfait, compressible et non visqueux. De plus les échanges sont adiabatiques. Le domaine structure est un système masse-ressort linéaire élastique sans amortissement de masse,  $m_s = 0.8Kg$  et de rigidité  $k_s = 7911N.m^{-1}$ .

A l'instant initial le piston est à l'équilibre, la pression dans le tube est de  $p_f^{(0)} = 1e5Pa$  et la masse volumique de l'air est  $\rho_f^{(0)} = 1.3Kg.m^{-3}$ . Finalement on impose un déplacement initial de la structure de  $d_s^{(0)} = 1cm$ .

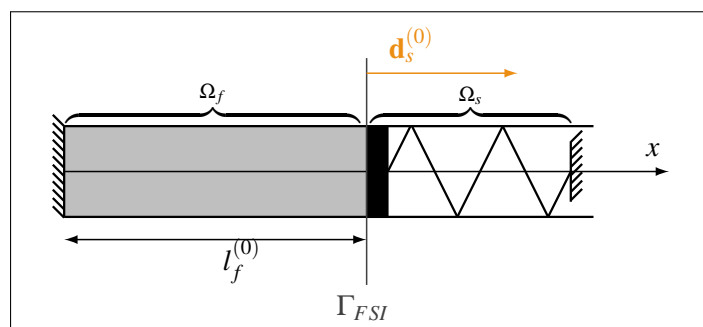


FIGURE 4 – Piston au pas de temps initial

## 4.2 Résultats

Dans un premier temps nous présentons les résultats obtenus par la méthode de couplage monolithique décrite précédemment, appliquée au couplage éléments finis / volumes finis vertex-centrés mono pas de temps.

La Fig. (4.2) montre la position de l'interface  $\Gamma_{FSI}$  au cours du temps. On constate que l'amplitude reste globalement constante, on peut donc conclure qu'il n'y a ni perte ni gain d'énergie. Un très léger gain d'amplitude, de l'ordre 0,01% après 20 cycles est toutefois constaté. Cependant, cette erreur peut être corrélée avec celle commise par la simulation du même domaine fluide, seul, fermé par un mur mobile, dont le mouvement serait régi par un système masse-ressort, identique à celui présenté précédemment. On peut donc conclure, qu'elle est engendrée par la méthode de calcul fluide et non par la méthode de couplage.

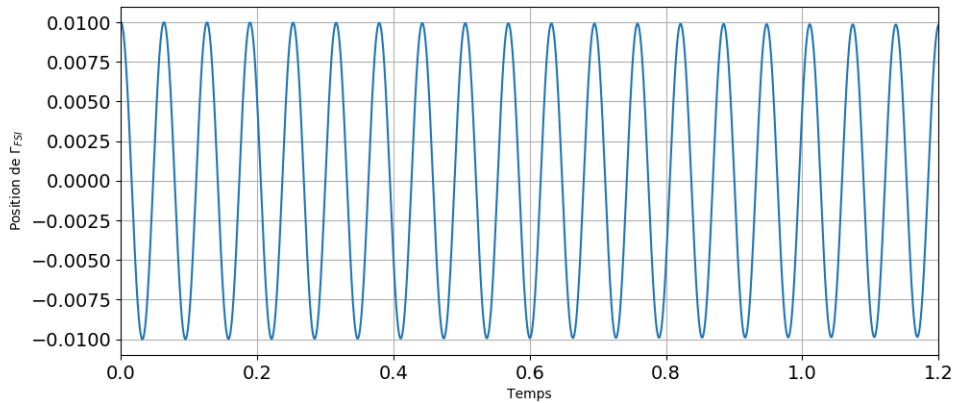


FIGURE 5 – Position de l'interface fluide-structure au cours du temps

Enfin, nous étudions également l'erreur relative du collage en vitesse à l'interface, définie comme  $err = \frac{|\mathbf{L}_s \mathbf{v}_s^{(n)} - \mathbf{L}_f \mathbf{v}_{fvertex}^{(n)}|}{\max(\mathbf{v}_{FSI})}$ . Cette erreur est de l'ordre de  $10^{-16}$  ce qui est tout à fait satisfaisant Fig.(6).

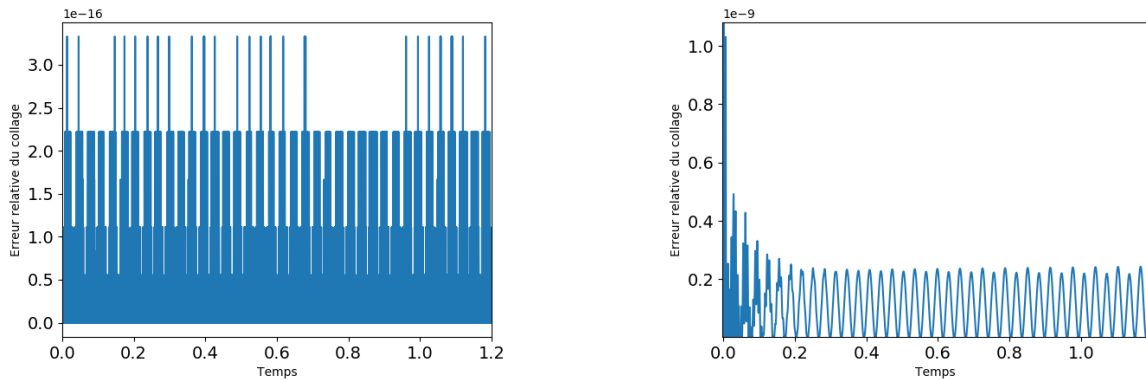


FIGURE 6 – Erreur relative du collage des vitesses à l'interface à gauche pour le couplage avec les volumes finis vertex-centrés, et à droite avec les volumes finis cellule-centrés

En ce qui concerne, le couplage éléments finis / volumes finis cellule-centrés, la position de l'interface est globalement identique. Cependant on constate cette fois-ci un léger gain d'amplitude de 0,03% après 20 cycles. De plus cette erreur ne peut pas être corrélée avec le modèle du fluide seul. En ce qui concerne l'erreur sur le collage des vitesses, elle est cette fois-ci plus significative, de l'ordre de  $10^{-9}$ . On rappelle que pour cette méthode de couplage, une approximation a été introduite, en effet les vitesses *free* du fluide ont été extrapolées à l'interface. On peut donc faire l'hypothèse, que les erreurs constatées sont induites par cette extrapolation et pourront donc être réduites en améliorant cette dernière.

Finalement, nous avons également étudié la méthode de couplage multi pas de temps éléments finis

/ volumes finis vertex-centrés. Celle-ci montre des résultats très prometteurs car la qualité des résultats est peut dégradée malgré l'augmentation du ratio entre le macro et le micro pas de temps. Entre autre, nous avons vu précédemment que pour  $m = 1$  (cas mono pas de temps) l'erreur relative du collage des vitesses à l'interface était de  $10^{-16}$ . Pour  $m = 1000$ , celle-ci reste dans le même ordre de grandeur.

## 5 Conclusion

Pour conclure, la méthode présentée permet un couplage de type co-simulation tout en garantissant la conservation de l'énergie et le collage des vitesses à l'interface, pour un couplage mono pas de temps éléments finis / volume finis vertex centrés. Une légère dégradation des résultats est constatée, pour le couplage éléments finis / volumes finis cellule-centré. Celle-ci est induite par l'introduction de l'extrapolation des vitesses fluides à l'interface, indispensable pour la condition de couplage. Néanmoins, cette erreur reste très limitée. Enfin, le modèle multi-pas de temps éléments finis / volumes finis vertex-centrés a été étudié. Ce dernier a montré de très bons résultats, la dégradation induite par l'augmentation de ratio entre les deux pas de temps restant faible même pour un très grand ratio.

Par la suite, la méthode de couplage éléments finis / volumes finis sera étendue en 2D et en multi-pas de temps. Nous retenons la méthode volumes finis cellule-centrés plutôt que vertex-centrés malgré les moins bons résultat obtenus sur le cas test, le but étant d'utiliser le logiciel commercial Fluent pour les calculs du sous-domaine fluide, utilisant cette méthode. L'extrapolation des vitesses à l'interface pourra être complexifiée afin d'améliorer les résultats.

## Références

- [1] Beckert, Wendland. *Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions*, Aerospace Science and Technology, 5(2), 125–134, 2001.
- [2] Blom. *A monolithic fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 167(3), 369–391, 1998.
- [3] Casadei, Leconte. *Coupling finite elements and finite volumes by Lagrange multipliers for explicit dynamic fluid–structure interaction*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 86(1), 1–17, 2011
- [4] Gravouil, Combescure. *Multi-time-step explicit–implicit method for non-linear structural dynamics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50(1), 199–225, 2001.
- [5] Gravouil, Combescure, Brun. *Heterogeneous asynchronous time integrators for computational structural dynamics*, Int. J. Numer. Meth. Engng, 102(3), 2015.
- [6] Ischinger, Anthonissen, Koren. *A monolithic fluid-structure interaction method, application to a piston problem*, ECCOMAS congress, 2016.
- [7] Li, Leduc, Nunez-Ramirez, Combescure, Marongiu. *A non-intrusive partitioned approach to couple smoothed particle hydrodynamics and finite element methods for transient fluid-structure interaction problems with large interface motion*, Computational Mechanics, 55(4), 697–718, 2015.
- [8] Meduri, Cremonesi, Perego, Bettinotti, Kurkchubasche, Oancea. *Partitioned fully explicit Lagrangian Finite Element Method for highly nonlinear Fluid-Structure-Interaction problems*, Numerical Methods in Engineering, 113(1), 43–64, 2017.
- [9] Michler, Hulshoff, van Brummelen, De Borst. *monolithic approach to fluid–structure interaction*, Computers Fluids, 33(5), 839–848, 2004
- [10] Nobile. *Coupling strategies for the numerical simulation of blood flow in deformable arteries by 3D and 1D models*, Mathematical and Computer Modelling, 49(11), 2152–2160, 2009.
- [11] Piperno, Farhat, Larroutourou. *Partitioned procedures for the transient solution of coupled aroelastic problems Part I : Model problem, theory and two-dimensional application*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 124(1), 79–112, 1995.
- [12] Roe, *Characteristic-based schemes for the Euler equations. Annual review of fluid mechanics*, 18(1), 337–365, 1996.
- [13] Ross, Sprague, Felippa, Park. *Treatment of acoustic fluid–structure interaction by localized Lagrange multipliers and comparison to alternative interface-coupling methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198(9), 968–1005, 2009.