

Mise en place d'une technique numérique pour l'estimation de vibrations non-linéaires auto-entretenues avec frottement

Application à la prédiction du crissement de frein automobile

E. Denimal^{1,2}, S. Nacivet², J-J. Sinou^{1,3}

¹ LTDS, UMR CNRS 5513, Ecole Centrale de Lyon, enora.denimal@doctorant.ec-lyon.fr, jean-jacques.sinou@ec-lyon.fr

² PSA Peugeot Citroën, Centre Technique de Poissy, samuel.nacivet@mpsa.com

³ Institut Universitaire de France, 75005 Paris, France

Résumé — Ce papier présente une approche non-linéaire permettant d'approximer le comportement vibratoire non-linéaire dans le cas où plusieurs instabilités sont impliquées dans la réponse du système. Cette méthode dénommée MASA (Modal Amplitude Stability Analysis) est complémentaire de l'analyse aux valeurs propres complexes. Dans un premier temps, les aspects théoriques de la méthode sont présentés. Puis, le modèle éléments finis du frein servant d'illustration est présenté. Enfin, la méthode non-linéaire est appliquée sur le modèle afin de prédire la réponse dynamique de celui-ci.

Mots clés — prédiction crissement, approche non-linéaire, modèle éléments finis.

1 Introduction

La prédiction du comportement dynamique des systèmes auto-entretenus est un sujet d'étude qui occupe chercheurs et industriels depuis plusieurs décennies [1,2]. La littérature recense de nombreuses méthodes qui permettent d'étudier les solutions dynamiques de tels systèmes qui sont souvent considérées périodique ou quasi-périodique. Parmi ces différentes méthodes, la méthode de l'analyse aux valeurs propres complexes (CEA) reste la méthode la plus utilisée au niveau industriel pour sa facilité de mise en œuvre et son coût numérique raisonnable. Elle consiste à étudier la stabilité de la position d'équilibre statique non-linéaire du système à partir des valeurs propres complexes du système. Cependant, cette méthode est souvent sur- ou sous-prédictive et ne permet pas de statuer sur les participations modales associées. L'obtention de la réponse dynamique et des niveaux vibratoires associés doit se faire avec d'autres approches qui viennent compléter la CEA. Deux grandes familles de méthodes existent à ce jour, à savoir les méthodes d'intégration temporelle et les méthodes de recherche du régime stationnaire. Les méthodes d'intégration temporelle ont l'avantage de pouvoir traiter tout type de problème et de ne faire aucune hypothèse sur la forme de la solution. Cependant, les coûts numériques associés à ce type de méthode restent considérables dans un contexte industriel [3,4]. Les méthodes de recherche des régimes stationnaires, telles que l'équilibrage harmonique sous contrainte [6] ou la méthode de tir [7], font des hypothèses fortes sur le type de solution et leur convergence reste difficile à maîtriser ce qui les rend elles aussi difficilement exploitables en contexte industriel. Les difficultés associées à ces deux familles de méthodes limitent leurs utilisations en contexte industriel et justifient l'utilisation de la CEA malgré ses limitations. Il apparaît alors primordial de développer de nouveaux outils, complémentaires de la CEA afin d'identifier les modes à l'origine du crissement. C'est l'objectif de la méthode MASA présentée dans [8] pour le cas d'un système soumis à un unique mode instable. L'étude présentée ici propose une extension de cette méthode au cas multi-instable. Cette dernière est appliquée sur un modèle éléments finis de frein automobile industriel.

2 Méthode MASA généralisée

On considère un système dynamique auto-entretenu dont l'équation dynamique peut s'écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_{ext} \quad (1)$$

où \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} sont respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur du système. \mathbf{X} représente les déplacements et le point la dérivée temporelle. \mathbf{F}_{nl} sont les efforts non-linéaires de contact et de frottement et \mathbf{F}_{ext} sont les efforts extérieurs.

2.1 Analyse de stabilité et introduction de la méthode MASA

La première étape de la méthode consiste à réaliser une analyse de stabilité sur le système afin d'identifier les modes potentiellement instables. Pour cela on calcule dans un premier temps la position d'équilibre statique du système \mathbf{U}_S en résolvant :

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_S + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}_S) = \mathbf{F}_{ext} \quad (2)$$

On considère ensuite une légère perturbation $\Delta\mathbf{U}$ autour de \mathbf{U}_S . Le développement de Taylor des efforts non-linéaires donne :

$$\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}_S + \Delta\mathbf{U}) = \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}_S) + \mathbf{J}_{nl}\Delta\mathbf{U} + O(\Delta\mathbf{U}^2) \quad (3)$$

L'équation dynamique du système devient alors :

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{J}_{nl})\Delta\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Et le problème aux valeurs propres associé est :

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + (\mathbf{K} + \mathbf{J}_{nl})) \Psi = \mathbf{0} \quad (5)$$

Le calcul des valeurs propres complexes λ_j et des modes propres Ψ_j associés permet de déterminer les modes propres du système autour de sa position d'équilibre. La méthode de la CEA statue alors sur la stabilité du système à partir du signe des parties réelles des valeurs propres, c'est-à-dire que si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative, alors le système est stable. Si au moins une valeur propre a une partie réelle positive alors le système est instable.

Cette étape initiale permet d'identifier N_i modes instables, c'est-à-dire N_i modes avec une valeur propre à partie réelle positive. Elle permet donc d'identifier N_i déformées Ψ_j de valeur propre $\lambda_j = a_j + i\omega_j$ avec ω_j la pulsation du mode j .

L'idée générale de la méthode MASA consiste à supposer que la réponse dynamique auto-entretenu du système est principalement pilotée par les N_i modes instables. La démarche consiste alors à étudier la montée en divergence ou atténuation de la réponse à partir d'un balayage des amplitudes des contributions des modes instables. Les paragraphes qui suivent détaillent les différentes étapes.

2.2 Nouvelle linéarisation du problème

A partir de l'équation 3, on pose Ω tel que :

$$\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}_S + \Delta\mathbf{U}) = \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{U}_S) + \mathbf{J}_{nl}\Delta\mathbf{U} + \Omega \quad (6)$$

Ω représente l'erreur commise sur le développement de Taylor à l'ordre 1. Ainsi, l'équation 4 peut se réécrire :

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{J}_{nl})\Delta\mathbf{U} + \Omega = \mathbf{0} \quad (7)$$

2.2.1 Solution multi-périodique

La solution au problème est multi-périodique, c'est-à-dire que $\Delta\mathbf{U}$ peut s'écrire sous la forme d'une série de Fourier généralisée :

$$\Delta\mathbf{U}(t) = \sum_{k_1=-N_h}^{N_h} \dots \sum_{k_{N_i}=-N_h}^{N_h} \left(\Delta\mathbf{U}_{k_1\dots k_{N_i}}^C \cos((k_1\omega_1 + \dots + k_{N_i}\omega_{N_i})t) + \Delta\mathbf{U}_{k_1\dots k_{N_i}}^S \sin((k_1\omega_1 + \dots + k_{N_i}\omega_{N_i})t) \right) \quad (8)$$

Où les $\Delta \mathbf{U}_{k_1 \dots k_{N_i}}^C$ et les $\Delta \mathbf{U}_{k_1 \dots k_{N_i}}^S$ correspondent aux coefficients de Fourier associés à toutes les combinaisons linéaires possibles des composantes fréquentielles $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N_i}$. N_h correspond au nombre d'harmoniques retenues.

De la même manière, le terme Ω est exprimé selon une série de Fourier généralisée :

$$\Omega(t) = \sum_{k_1=-N_h}^{N_h} \dots \sum_{k_{N_i}=-N_h}^{N_h} \left(\Omega_{k_1 \dots k_{N_i}}^C \cos((k_1 \omega_1 + \dots + k_{N_i} \omega_{N_i})t) + \Omega_{k_1 \dots k_{N_i}}^S \sin((k_1 \omega_1 + \dots + k_{N_i} \omega_{N_i})t) \right) \quad (9)$$

2.2.2 Troncature à la première harmonique et linéarisation

Comme proposé dans [8], seule la première harmonique de chaque pulsation est retenue. C'est-à-dire que :

$$\Delta \mathbf{U}_1 = \sum_{k=1}^{N_i} \Delta \mathbf{U}_k = \sum_{k=1}^{N_i} \Delta \mathbf{U}_k^C \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1}^{N_i} \Delta \mathbf{U}_k^S \sin(\omega_k t) \quad (10)$$

$$\Omega_1 = \sum_{k=1}^{N_i} \Omega_k = \sum_{k=1}^{N_i} \Omega_k^C \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1}^{N_i} \Omega_k^S \sin(\omega_k t) \quad (11)$$

L'équation dynamique du système 7 devient alors :

$$\mathbf{M} \sum_{k=1}^{N_i} \Delta \ddot{\mathbf{U}}_k + \mathbf{C} \sum_{k=1}^{N_i} \Delta \dot{\mathbf{U}}_k + (\mathbf{K} + \mathbf{J}_{nl}) \sum_{k=1}^{N_i} \Delta \mathbf{U}_k + \sum_{k=1}^{N_i} \Omega_k = \mathbf{0} \quad (12)$$

L'orthogonalité de la série de Fourier permet d'écrire les N_i équations suivantes :

$$\forall k \in [1, N_i], \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{U}}_k + \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{U}}_k + (\mathbf{K} + \mathbf{J}_{nl}) \Delta \mathbf{U}_k + \Omega_k = \mathbf{0} \quad (13)$$

Et sur chaque harmonique, Ω_k est linéarisé de la façon suivante :

$$\Omega_k = \mathbf{K}_k \Delta \mathbf{U}_k + \mathbf{C}_k \Delta \dot{\mathbf{U}}_k \quad (14)$$

Ainsi, on aboutit à N_i sous-systèmes de la forme :

$$\forall k \in [1, N_i], \dot{\mathbf{Y}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{Y}_k \quad (15)$$

où $\mathbf{Y}_k = (\Delta \mathbf{U}_k \ \Delta \dot{\mathbf{U}}_k)^T$ et les matrices dynamiques \mathbf{A}_k sont définies de la façon suivante :

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{J}_{nl} + \mathbf{K}_{v_k}) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C} + \mathbf{C}_{v_k}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Ainsi, à chaque instabilité est associé un sous-système dynamique sur lequel il est possible de réaliser une analyse de la divergence ou de l'atténuation de la solution dynamique linéarisée autour d'un point d'équilibre pour des déplacements donnés. Le calcul des déplacements est explicité par la suite. L'analyse de la divergence de chaque mode k se fait à partir de la partie réelle de la valeur propre du mode k dans le sous-système k , obtenue en calculant les valeurs propres de la matrice \mathbf{A}_k . En effet, chaque \mathbf{Y}_k est lié uniquement à ω_k et il n'y a pas de contribution modales des modes $j \neq k$ dans \mathbf{Y}_k . Dans le cas où un mode k ferait émerger une instabilité potentielle j (i.e. la partie réelle de la valeur propre du mode j dans le sous-système k est positive), alors il est nécessaire de se référer au sous-système associé au mode j pour statuer sur le caractère divergent ou non de celui-ci dans la solution globale.

2.3 Calcul des différents éléments

2.3.1 Calcul des matrices \mathbf{K}_k et \mathbf{C}_k

Les matrices \mathbf{K}_k et \mathbf{C}_k sont définies à partir de l'équation 14 et peuvent être calculées analytiquement. Pour chaque élément de contact n , la projection sur l'harmonique ω_k du déplacement relatif normal δ^n peut s'écrire :

$$\delta_k^n(t) = \delta_c^k \cos(\omega_k t) + \delta_s^k \sin(\omega_k t) \quad (17)$$

Par ailleurs, les efforts dans la direction d , qui peut être tangentielle ou normale, selon la pulsation ω_k entre deux nœuds en contact sont :

$$\Omega_k^{n,d} = \tau_c^k \cos(\omega_k t) + \tau_s^k \sin(\omega_k t) \quad (18)$$

et pour chaque direction d , ces efforts doivent vérifier :

$$\Omega_k^{n,d} = \mathbf{k}_k^{n,d} \delta_k^n(t) + \mathbf{c}_k^{n,d} \dot{\delta}_k^n(t) \quad (19)$$

La résolution donne :

$$\begin{cases} \mathbf{k}_k^{n,d} = \frac{\delta_c^k \tau_c^k + \delta_s^k \tau_s^k}{\delta_c^{k2} + \delta_s^{k2}} & \mathbf{c}_k^{n,d} = \frac{\delta_s^k \tau_c^k - \delta_c^k \tau_s^k}{\omega(\delta_c^{k2} + \delta_s^{k2})} & \text{si } \delta_c^k \neq 0 \text{ ou } \delta_s^k \neq 0 \\ \mathbf{k}_k^{n,d} = 0 & \mathbf{c}_k^{n,d} = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (20)$$

La détermination des termes τ_c^k et τ_s^k se fait en repartant de l'équation 6. L'utilisation d'un algorithme AFT [5,6] permet de les calculer à partir de l'expression de $\Delta \mathbf{U}(t)$, ils sont ensuite projetés sur chaque harmonique.

2.3.2 Calcul des déplacements et procédure générale

Comme proposé dans [8], on peut écrire les déplacements $\Delta \mathbf{U}_1$ sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}_1 = \sum_{k=1}^{N_i} (\mathbf{X}_k e^{\lambda_k t} + \overline{\mathbf{X}_k} e^{\overline{\lambda_k} t}) \\ \forall k \in [1, N_i], \Re(\lambda_k) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

avec $\mathbf{X}_k = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{U}_k^C - i \Delta \mathbf{U}_k^S)$.

La réponse quasi-périodique d'un tel système est pilotée principalement par les modes instables identifiés linéarisés autour de la position d'équilibre statique, c'est-à-dire que l'on peut approcher les déplacements par $\Delta \mathbf{U}(t) \approx \sum_{k=1}^{N_i} c_k (\Psi_k e^{i\omega_k t} + \overline{\Psi_k} e^{-i\omega_k t})$ où les c_k sont des coefficients réels.

Comme proposé dans [8], si N_i modes instables de modes propres $(\Psi_k^0)_{k \in [1, N_i]}$ sont identifiés lors de la CEA et de valeur propre $\lambda_k^0 = a_j^0 + i\omega_k^0$, alors on considère les différents vecteurs d'amplitude modale $\mathbf{p}^m = [p_1^m \dots p_k^m \dots p_{N_i}^m]$ où chaque p_k^m correspond à l'amplitude modale associée au mode k pour le pas de calcul numéro m . On suppose ici aussi que les niveaux d'amplitude restent suffisamment faibles afin que les déformées Ψ_k^0 et les pulsation ω_k^0 n'évoluent pas fortement avec \mathbf{p}^m . Ainsi, pour chaque mode on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_k^m \\ i\omega_k \mathbf{X}_k^m \end{pmatrix} = p_k^m \Psi_k^0 \quad (22)$$

Puis chaque λ_k est obtenu en déterminant les valeurs propres de la matrice \mathbf{A}_k .

Le balayage sur \mathbf{p} pourrait être réalisé en considérant une grille, cependant cette approche serait coûteuse numériquement. Pour cela, une approche plus restrictive mais plus "physique" est considérée et consiste à revenir dans le temporel afin d'établir un lien entre les différentes amplitudes modales. Ainsi, si chaque mode est caractérisé par une amplitude $p_k(t_m)$ en un instant t_m et une valeur propre λ_k^m , alors l'amplitude $p_k(t_{m+1})$ à l'instant $t_{m+1} = t_m + \delta t$ sera liée à $p_k(t_m)$ et à λ_k^m de la façon suivante :

$$p_k^{m+1} = p_k^m \exp(\Re(\lambda_k^m) \delta t) \quad (23)$$

Les différentes amplitudes modales sont alors reliées les unes aux autres. Le choix du pas de temps doit se faire de manière à ce que l'équation 23 soit valable, c'est-à-dire que considérer un accroissement constant, égal à $\Re(\lambda_k^m)$, soit une approximation valide. Il est à noter que chaque λ_k^m est déterminé à partir de la matrice \mathbf{A}_k^m associée au système du mode k à l'instant t_m .

2.4 Bilan de la démarche

En résumé, la démarche générale de la méthode dans le cas multi-fréquentiel peut être résumée de la façon suivante :

- Initialisation : on réalise une CEA classique sur le système initial. Les N_i modes instables sont identifiés ainsi que leur déformée $(\Psi_k^0)_{k \in [1, N_i]}$ et leur pulsation associée $(\omega_k^0)_{k \in [1, N_i]}$. Cette étape correspond à un facteur d'amplitude modale $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$. Une initialisation avec une perturbation $\Delta \mathbf{p}$ est considérée.
- Étape 1 : les amplitudes modales p_j^m sont déterminées à partir de l'équation 23 si $m > 1$, ou à partir de la perturbation $\Delta \mathbf{p}$ si $m = 1$.
- Étape 2 : à partir de chaque amplitude modale p_j^m , les \mathbf{X}_k^m sont déterminés à partir de l'équation 22.
- Étape 3 : les $\Delta \mathbf{U}_k^{C,m}$ et $\Delta \mathbf{U}_k^{S,m}$ sont calculés à partir des équations 22 et 21.
- Étape 4 : chaque $\Delta \mathbf{U}_k^m(t, \omega_k^0)$ est déterminé en appliquant la transformée de Fourier inverse.
- Étape 5 : les efforts non-linéaires $\Omega_1^m \left(\sum_{k=1}^{N_i} \Delta \mathbf{U}_k^m(t), \omega_k^0 \right)$ sont calculés à partir de l'équation 6 et exprimés dans l'espace de Fourier.
- Étape 6 : les matrices \mathbf{K}_k et \mathbf{C}_k sont déterminées à partir de l'équation 14.
- Étape 7 : les valeurs propres des différentes matrices \mathbf{A}_k^m sont déterminées.

Les étapes 1 à 7 sont répétées pour toutes les valeurs d'amplitude modale \mathbf{p}^m considérées où chaque \mathbf{p}^m est déterminé à partir de l'équation 23.

L'analyse de la divergence de chaque mode instable k se fait à partir de l'analyse de l'évolution de sa valeur propre λ_k dans le sous-système k en fonction de l'amplitude modale \mathbf{p} . Si une divergence du mode $j \neq k$ est observée dans le sous-système k , alors il faut se référer au sous-système j pour voir si cette divergence se traduit effectivement par une divergence dans l'équation du mouvement. Si le mode j était identifié comme stable initialement par la CEA, il est alors nécessaire d'ajouter ce mode à la base MASA afin de pouvoir statuer sur sa stabilité et de considérer $N_i + 1$ modes.

3 Modèle éléments finis étudié

Le système étudié est un modèle éléments finis (MEF) de frein automobile à étrier flottant représenté Figure 1. Le MEF est réalisé sur Abaqus et une loi de Coulomb à coefficient de frottement constant est utilisée pour modéliser les interfaces frottantes.

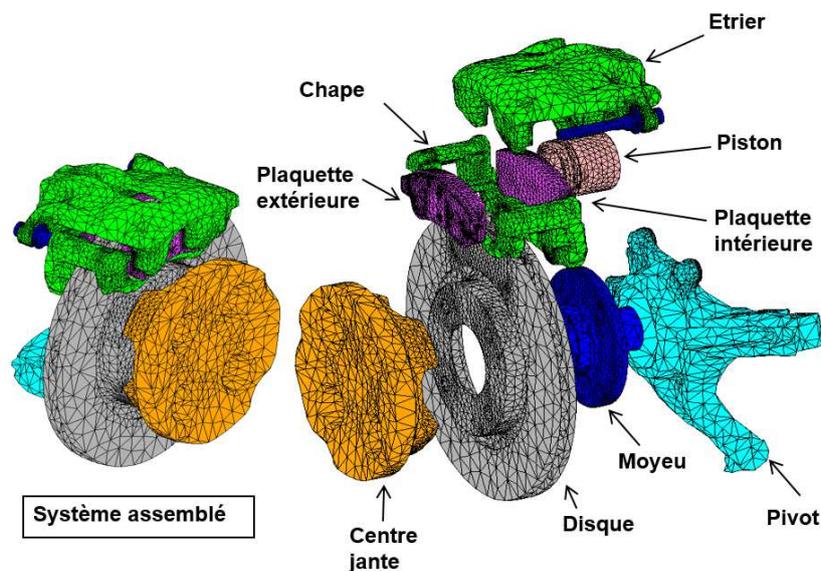


FIGURE 1 – Modèle éléments finis étudié - Vue assemblée (à gauche) et vue éclatée (à droite)

L'équation dynamique du système s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_{ext} \quad (24)$$

Afin de pouvoir appliquer la méthode MASA au MEF de frein, il est nécessaire de réduire la taille du problème. La méthode de réduction n'est pas l'objet de l'étude présentée ici et seul le principe général est rappelé. Elle est expliquée en détail dans [9]. L'idée principale consiste à réduire les surface de contact plaquette/disque en un nombre limité de nœuds. Ces nœuds sont utilisés par la suite en tant que nœud de condensation et en tant que nœud de définition pour des contacts node-to-node. Une fois la surface réduite générée pour l'interface plaquette/disque, une réduction de Craig et Bampton classique est réalisée pour générer un Super Élément (SE). Pour une description complète de la génération, de la définition et de l'assemblage du SE, le lecteur pourra se référer à [9]. De cette manière, les efforts non-linéaires de contact peuvent être pris en compte dans notre modèle. Des données expérimentales [5] permettent de montrer qu'il est possible d'approximer les non-linéarités à l'interface frottante entre le disque et les plaquette par un terme de raideur linéaire, un terme de raideur cubique et d'un possible perte de contact. Comme expliqué dans [8,9], un champ de vitesse correspondant à la rotation du disque est appliqué sur la surface de celui-ci. Ainsi, les efforts de frottement de l'interface plaquette/disque sont déduits des efforts de contact normaux en utilisant une loi de Coulomb classique avec un coefficient de frottement constant.

Cette méthode de réduction est utilisée afin de réduire la taille de notre modèle éléments finis. Elle a déjà été appliquée et validée sur ce modèle à plusieurs reprise dans [8,9]. La validation a été réalisée en deux étapes avec dans un premier temps la validation de la position d'équilibre statique et des contraintes par comparaison avec les résultats du modèle complet. Dans un second temps, les résultats de la prédiction de la stabilité, c'est-à-dire du calcul des valeurs propres, ont été validés par comparaison avec les résultats donnés par la CEA appliquée au modèle complet sans réduction. La description en détail de ces étapes de validation sont données dans [8,9].

4 Application de la méthode MASA pour la prédiction du crissement

Dans un premier temps, la méthode de la CEA est appliquée pour différentes valeurs du coefficient de frottement de l'interface plaquette/disque. Un premier mode instable émerge à 3878 Hz pour un coefficient de frottement égal à 0.15, une seconde émerge à 4728 Hz pour un coefficient de frottement de 0.25. La méthode MASA est alors appliquée sur le cas où le coefficient de frottement est égal à 0.22. L'utilisation de la CEA permet d'identifier un mode instable à 3870 Hz avec une partie réelle de 87. La méthode MASA est alors appliquée. Un seul mode étant présent, il est possible de réaliser directement un balayage en amplitude modale et un unique sous-système est défini. Les évolutions des parties réelles et des fréquences propres associées de la matrice du sous-système sont données en fonction de l'amplitude modale Figure 2. On remarque que le mode initialement instable voit sa partie réelle diminuer puis s'annuler lorsque ses amplitudes de vibration augmentent. Cependant, avant que ce mode ne se stabilise, un autre mode potentiellement instable émerge à 4750 Hz environ. Ainsi, lorsque $p = 80$, deux modes sont potentiellement instables et pour pouvoir statuer sur la contribution du mode à 4750 Hz sur la dynamique globale du système, il est nécessaire de l'ajouter à l'analyse MASA.

Une nouvelle analyse MASA est alors réalisée en considérant les deux modes : celui à 3870 Hz identifié par la CEA et celui à 4750 Hz que la MASA a mis en évidence précédemment. Une faible amplitude modale initiale est appliquée aux deux modes. Les évolutions des amplitudes modales, des parties réelles et des fréquences associées à chaque mode sont données Figure 3. Les évolutions des parties réelles de valeurs propres de chaque sous-système ne font pas apparaître de nouvelle instabilité potentielle, il n'est donc pas nécessaire d'appliquer la méthode MASA avec un plus grand nombre d'instabilité.

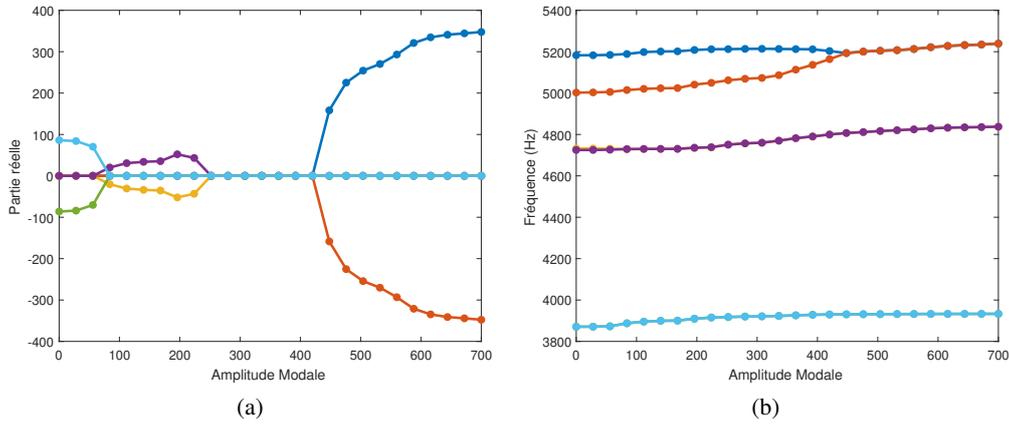


FIGURE 2 – Évolution des parties réelles des valeurs propres (a) et des fréquences (b) en fonction de l'amplitude modale pour $\mu = 0.22$

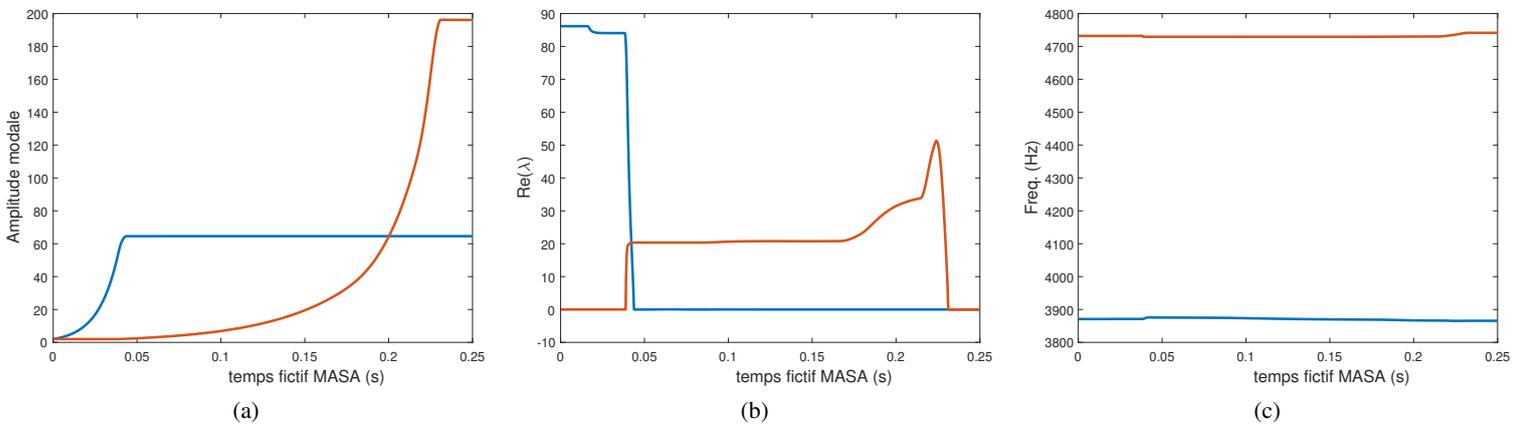


FIGURE 3 – Évolution des amplitudes modales (a), des parties réelles des valeurs propres (b) et des fréquences (c) pour le premier (bleu) et le second (orange) mode instable

D'après la Figure 3, la méthode MASA permet d'identifier les contributions suivantes :

- $t < 0.045$: un seul mode instable à une fréquence d'environ 3880 Hz qui amène une divergence d'amplitude de la réponse vibratoire,
- $0.045 < t < 0.05$: deux modes instables à des fréquences de 3880 Hz et 4730 Hz qui amènent une divergence en amplitude de la solution,
- $0.05 < t < 0.23$: un mode instable à 3880 Hz à partie réelle nulle et un second mode instable à 4730 Hz qui amène une divergence de la réponse vibratoire du système,
- $t > 0.23$: deux modes instables à 3880 Hz et 4730 Hz à parties réelles nulles qui caractérisent une solution stationnaire quasi-périodique approchée.

La MASA permet donc de statuer sur le comportement global dynamique du système. En effet, la méthode identifie une réponse dynamique pilotée par deux modes instables, à 3880 Hz et à 4750 Hz, avec des amplitudes modales respectives de 65 et 195. Ce résultat illustre l'importance de la méthode MASA en complément d'un calcul CEA. En effet, seule une instabilité était détectée avec le calcul CEA alors que deux sont présentes dans la réponse dynamique du système. Dans ce cas précis, la méthode permet de palier l'aspect sous-prédictif de la méthode CEA.

De plus la réponse dynamique stationnaire approchée du système quasi-périodique du système peut être approchée par :

$$\Delta \mathbf{U}_1(t) = \mathbf{U}_S + p_1 \Psi_1^0 e^{i\omega_1^0 t} + p_1 \overline{\Psi_1^0} e^{-i\omega_1^0 t} + p_2 \Psi_2^0 e^{i\omega_2^0 t} + p_2 \overline{\Psi_2^0} e^{-i\omega_2^0 t} \quad (25)$$

avec $p_1 = 65$ et $p_2 = 195$, $\omega_1^0 = 2.44 \cdot 10^4$ rad/s et $\omega_2^0 = 2.97 \cdot 10^4$ rad/s et Ψ_1^0 et Ψ_2^0 les déformées modales

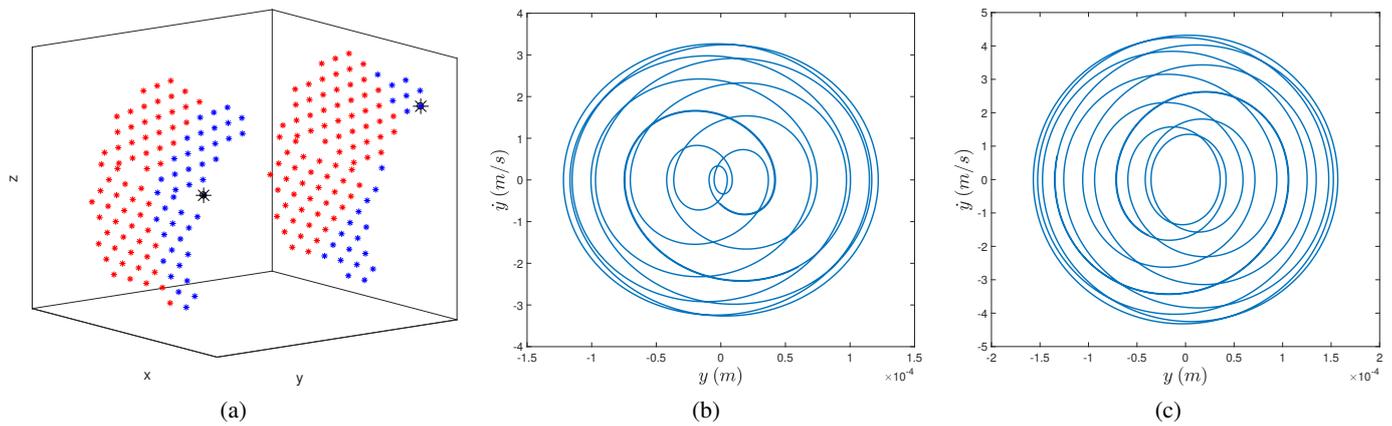


FIGURE 4 – Points de contact aux interfaces plaquette/disque et leurs états (rouge = ouvert/impact, bleu = fermé) (a) et cycles limites des deux nœuds en noir (a,b)

des deux modes obtenues au calcul CEA. Les Figures 4(b,c) illustrent les cycles limites obtenus pour deux points de l'interface plaquette disque représentée Figure 4(a).

5 Conclusion

Une approche non-linéaire a été proposée dans ce papier. Elle est complémentaire de la CEA et adaptée au traitement des cas où plusieurs instabilités peuvent être présentes dans le système. Cette approche non-linéaire se base sur le suivi de la stabilité d'une solution vibratoire approchée et permet d'identifier les modes instables présents dans la réponse dynamique du système ainsi que leur niveau de participation. Elle a été appliquée sur un modèle éléments finis de frein automobile pour la prédiction du crissement de frein et a permis de palier l'aspect sous-prédictif de la méthode CEA.

Références

- [1] H. Ouyang, W. Nack, Y. Yuan, F. Chen, *Numerical analysis of automotive disc brake squeal : a review*, International Journal of Vehicle Noise and Vibration, Vol. 1(3-4), p. 207-231, 2005.
- [2] N. M. Kinkaid, O.M. O'Reilly, P. Papadopoulos *Automotive disc brake squeal*, Journal of sound and vibration, Vol. 267(1), p. 105-166, 2003.
- [3] G. Vermot des Roches *Frequency and time simulation of squeal instabilities. Application to the design of industrial automotive brakes*, Doctoral dissertation, Ecole Centrale Paris, 2011.
- [4] J-J. Sinou, A. Loyer, O. Chiello, G. Mogenier, X. Lorang, F. Cocheteux, S. Bellaj *A global strategy based on experiments and simulations for squeal prediction on industrial railway brake*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 332(20), p. 5068-5085, 2013
- [5] N. Coudeyras, J-J. Sinou, S. Nacivet *A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The constrained harmonic balance method, with application to disc brake squeal*, Journal of sound and vibration, Vol. 319(3-5), p. 1175-1199, 2009.
- [6] N. Coudeyras, J-J. Sinou, S. Nacivet *Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal*, Journal of sound and vibration, Vol. 328(4-5), p. 520-540, 2009.
- [7] L. Charroyer, O. Chiello, J-J. Sinou *Self-excited vibrations of a non-smooth contact dynamical system with planar friction based on the shooting method*, International Journal of Mechanical Sciences, 2018.
- [8] S. Nacivet, J-J. Sinou *Modal Amplitude Stability Analysis and its application to brake squeal*, Applied Acoustics, Vol. 116, p. 127-138, 2015.
- [9] O. Fazio, J-J. Sinou, S. Nacivet *Reduction strategy for a brake system with local frictional nonlinearities–Application for the prediction of unstable vibration modes*, Applied Acoustics, Vol. 91, p. 12-24, 2015.