

Contact élastoplastique : équations intégrales accélérées par une approche Fourier

L. Frérot¹, M. Bonnet², J.-F. Molinari¹,
G. Anciaux¹

¹ LSMS, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, {lucas.ferot,jean-francois.molinari,guillaume.anciaux}@epfl.ch

² POEMS (CNRS-INRIA-ENSTA), ENSTA, mbonnet@ensta.fr

Résumé — Une approche par équations intégrales volumiques du problème de contact élastoplastique périodique est présentée. Elle repose sur la formulation des fonctions de Green nécessaires au calcul des opérateurs intégraux directement dans l'espace de Fourier. cela permet d'utiliser l'algorithme de la transformée de Fourier rapide pour l'application des opérateurs intégraux, d'éviter le stockage coûteux des fonctions de Green qui peuvent être évaluées à la volée et d'optimiser l'application des opérateurs intégraux dans la direction non transformée via l'exploitation de la structure des fonctions de Green dans l'espace de Fourier. Ces avancées permettent une exploitation plus efficace des ressources de calcul et la simulation du contact élastoplastique de surfaces rugueuses, dont les caractéristiques influencent de nombreux phénomènes, tels que le frottement ou l'usure.

Mots clés — équations intégrales volumiques, méthode spectrale, contact, plasticité

1 Introduction

Les phénomènes tribologiques tels que le frottement ou l'usure ont un impact considérable sur le comportement des systèmes naturels et industriels, de l'échelle kilométrique pour les failles géologiques à l'échelle nanométrique pour les microscopes à force atomique, entre autres. En 1939, les travaux de Bowden et Tabor [1] ont montré que le frottement était intimement lié à la surface réelle de contact, et que celle-ci dépendait de la nature plastique des déformations des matériaux en contact. Plus tard, en 1953, Archard [2] fit des développements similaires et donna les mêmes conclusions concernant l'usure.

Bien que le problème de contact de surfaces rugueuses ait bénéficié ces quinze dernières années d'avancées dans les techniques de simulation, notamment grâce aux méthodes d'équations intégrales de frontière, très peu de ces techniques intègrent les aspects non-linéaires et irréversibles des déformations plastiques. Les travaux de Pei et al. [3] proposent une approche par éléments finis mais souffrent d'une faible discrétisation par rapport à la rugosité de la surface. Jacq et al. [4] proposent une approche par équations intégrales de volume, mais ces dernières sont *a priori* coûteuses à évaluer et requièrent un stockage des fonctions de Green. Cela rend la méthode difficilement applicable au contact de surfaces rugueuses, qui nécessitent une discrétisation fine.

Nous proposons ici une approche par équations intégrales volumiques dans un domaine tridimensionnel semi-infini en contact avec un solide rigide dont la rugosité de surface est périodique. Les fonctions de Green sont formulées directement dans l'espace de Fourier afin d'accélérer le calcul de la convolution horizontale et d'éviter le stockage des coefficients de la fonction de Green. De plus, les expressions analytiques des fonctions de Green permettent certaines optimisations qui réduisent le coût de calcul des opérateurs intégraux.

2 Méthodologie

La méthode présentée repose sur l'utilisation d'opérateurs intégraux, qui par construction réalisent une prise en compte exacte et automatique de l'équilibre, la compatibilité cinématique et la partie élastique linéaire du comportement. Soit un corps déformable semi-infini de configuration initiale $\mathcal{B} := \{\underline{y} \in \mathbb{R}^3 : \underline{y} \cdot \underline{e}_3 > 0\}$. Le champ de déplacement \underline{u} , le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ et le tenseur des

contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfont les équations de champ suivantes dans \mathcal{B} :

$$\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0, \quad \underline{\underline{\sigma}} = C : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p), \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla^{\operatorname{sym}} \underline{u},$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ sont les déformations plastiques et C est le tenseur d'élasticité satisfaisant les contraintes usuelles de symétrie et l'ellipticité. Pour des tractions \underline{t} données sur $\partial\mathcal{B}$, on peut écrire le champ de déplacement satisfaisant les équations précédentes (et la condition de traction prescrite) sous la forme :

$$\underline{u} = \mathcal{M}[\underline{t}] + \mathcal{N}[C : \underline{\underline{\varepsilon}}^p], \quad (1)$$

avec \mathcal{M} et \mathcal{N} des opérateurs intégraux linéaires que nous allons développer par la suite. Nous supposons que \mathcal{B} entre en contact avec un solide rigide dont la surface est décrite par le graphe d'une fonction h continue et périodique. Le contact se traduit par les conditions d'optimalité suivantes :

$$\begin{aligned} g[\underline{u}] &:= u_3|_{\partial\mathcal{B}} - h \geq 0, \\ p[\underline{u}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p] &:= \underline{T}[\underline{u}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p] \cdot \underline{e}_3 \leq 0, \\ g[\underline{u}] p[\underline{u}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p] &= 0, \end{aligned}$$

où $\underline{T}[\underline{u}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p]$ est le vecteur des tractions sur $\partial\mathcal{B}$, g et p sont respectivement l'interstice et la pression de contact. Enfin, le comportement du matériau constitutif de \mathcal{B} est supposé élastoplastique et décrit par un modèle de plasticité J_2 avec loi d'écoulement associée.

La méthode présentée ici est basée sur une exploitation de l'invariance par translation horizontale du problème, qui permet une formulation naturelle des opérateurs intégraux \mathcal{M} et \mathcal{N} dans l'espace de Fourier partiel associé aux directions d'invariance. Nous établissons l'expression analytique des noyaux de ces opérateurs directement dans cet espace de Fourier, ce qui présente les avantages suivants : (a) une économie de mémoire puisque les expressions des noyaux sont évaluées à la volée, (b) une réduction de l'erreur d'échantillonnage comparativement à des méthodes calculant la transformée discrète des noyaux dans l'espace physique [5], (c) une exploitation de la structure des formes analytiques pour réduire le coût de calcul. Nous commençons par présenter la formulation des opérateurs intégraux essentiels pour la méthode, puis la procédure menant à leur discrétisation et leur application à des champs périodiques. Enfin, nous posons la procédure de calcul pour le contact élastoplastique et montrons un cas de validation. Les applications de la méthode à des surfaces rugueuses peuvent être trouvées dans [6] et seront développées en détail pendant la présentation.

2.1 Solution fondamentale de Mindlin

Nous voulons à présent formuler les noyaux des opérateurs intégraux \mathcal{M} et \mathcal{N} . Étant donné que le problème est invariant par une translation parallèle à la surface $\partial\mathcal{B}$, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{N}[\underline{w}](\underline{x}) = \int_0^\infty \overbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{H}(\underline{y} - \underline{\tilde{x}}, x_3, y_3) : \underline{w}(\underline{y}) d\underline{y} \right)}^{(\mathbf{H} \star \underline{w})} dy_3, \quad (2)$$

avec $\underline{x} = \underline{\tilde{x}} + x_3 \underline{e}_3$ (idem pour \underline{y}) et où \mathbf{H} est un noyau à déterminer. La convolution horizontale $\mathbf{H} \star \underline{w}$ suggère l'utilisation de la transformée de Fourier horizontale :

$$\hat{f}(\underline{q}, y_3) = \mathcal{F}[f](\underline{q}, y_3) := \int_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2, y_3) e^{-i(q_1 y_1 + q_2 y_2)} dy_1 dy_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(\underline{y}, y_3) e^{-i\underline{q} \cdot \underline{y}} d\underline{y}.$$

Le système de coordonnées (\underline{q}, y_3) est nommé espace de Fourier partiel, et donne un cadre naturel à l'expression de la convolution $f \star g$:

$$\mathcal{F}[f \star g](\underline{q}) = f(-\underline{q})h(\underline{q}),$$

Le signe de \underline{q} dans l'argument de f est dû à la définition non-conventionnelle de la convolution à l'équation (2).

Pour des raisons évoquées dans [6], le cadre mathématique naturel pour l'application du produit de convolution, de la transformée de Fourier et des opérateurs différentiels associés est celui des distributions, qui coïncide également au cadre d'étude des solutions fondamentales qui sont utilisées pour définir les noyaux comme \mathbf{H} .

Afin d'éviter la résolution d'une équation intégrale implicite et ainsi conserver la nature explicite de l'équation (1) (cf. [7]), nous formulons les noyaux de \mathcal{M} et \mathcal{N} avec la solution fondamentale de Mindlin [8]. Le tenseur de Mindlin $\underline{\mathbf{G}} = \underline{e}_k \otimes \underline{\mathbf{G}}^k$ est exprimé grâce aux déplacements $\underline{\mathbf{G}}^k$ de \mathcal{B} , décroissants à l'infini, soumis en $\underline{x} \in \mathcal{B}$ à une force ponctuelle unitaire dans la direction \underline{e}_k et vérifiant une condition de surface libre sur $\partial\mathcal{B}$:

$$\mathbf{N}[\underline{\mathbf{G}}^k](\underline{x}, \bullet) := -\text{div}(C : \underline{\underline{\mathbf{G}}}[\underline{\mathbf{G}}^k(\underline{x}, \bullet)]) = \underline{e}_k \delta_{\underline{x}}, \quad (3)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}[\underline{\mathbf{G}}^k] = \underline{\mathbf{0}}, \quad (4)$$

où $\delta_{\underline{x}}$ est la distribution de Dirac supportée en \underline{x} et \mathbf{N} est l'opérateur aux dérivées partielles de Navier. L'expression de $\underline{\mathbf{G}}$ dans l'espace physique est bien connue. Nous résumons ci-après la procédure, décrite dans [6] et dont le code source est donné dans [9], permettant d'obtenir $\underline{\mathbf{G}}$ dans l'espace de Fourier partiel. Celle-ci consiste à résoudre dans l'espace de Fourier partiel l'équation (3) pour un solide élastique infini (s'étendant sur \mathbb{R}^3). Le déplacement obtenu est la solution fondamentale de Kelvin, dont le tenseur est noté $\underline{\mathbf{U}}_\infty = \underline{e}_k \otimes \underline{\mathbf{U}}_\infty^k$. Nous rajoutons ensuite un champ de déplacement satisfaisant la variante homogène de l'équation (3) destiné à annuler le champ des tractions à la surface et satisfaire ainsi la condition (4).

2.1.1 Solution fondamentale de Kelvin

Dans l'espace de Fourier partiel, l'opérateur de Navier s'exprime ainsi (pour un solide isotrope) :

$$\widehat{\mathbf{N}}[\widehat{\underline{\mathbf{u}}}] (\underline{q}, x_3) = \mu \left\{ \left(\frac{d^2}{dy_3^2} - q^2 \right) \underline{\underline{\mathbf{I}}} + c \underline{\underline{\mathbf{V}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{V}}} \right\} \cdot \widehat{\underline{\mathbf{u}}} (\underline{q}, x_3),$$

où $c := 1/(1 - 2\nu)$, $\underline{\underline{\mathbf{V}}} := (iq_1, iq_2, d/dy_3)$ et $q^2 := |q|^2$. Le noyau de $\widehat{\mathbf{N}}$ est donné comme la somme vectorielle des espaces images des applications linéaires $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^\pm, \underline{\underline{\mathbf{A}}}^- : \mathbb{C}^3 \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^3)$ définies comme suit [10] :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^\pm (\underline{q}, y_3) = e^{\mp q y_3} \left(\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \frac{c}{c+2} q y_3 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^\pm \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}}^\pm \right),$$

où $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^- := (iq_1/q, iq_2/q, 1)$ et $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^+ = \overline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}^-}$. Suivant la méthodologie de [11], nous construisons le tenseur de Kelvin par morceaux à l'aide de la fonction échelon de Heaviside H :

$$\widehat{\underline{\mathbf{U}}}_\infty^k (\underline{q}, x_3, y_3) = H(y_3 - x_3) \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_\infty^{k,+} (\underline{q}, x_3, y_3) + (1 - H(y_3 - x_3)) \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_\infty^{k,-} (\underline{q}, x_3, y_3) \quad (5)$$

où les fonctions $\widehat{\underline{\mathbf{U}}}_\infty^{k,\pm}$ sont dans le noyau de $\widehat{\mathbf{N}}$, c.-à-d. qu'elles satisfont la variante homogène de (3), et sont par conséquent exprimées sous la forme $\widehat{\underline{\mathbf{U}}}_\infty^{k,\pm} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^\pm \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{k,\pm}$ avec $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{k,\pm} \in \mathbb{C}^3$. En injectant (5) dans (3) transformée, on peut identifier les six coefficients libres [9] et ainsi exprimer la solution de Kelvin

$$\widehat{\underline{\mathbf{U}}}_\infty^\pm (\underline{q}, x_3, y_3) = \frac{1}{q} \left[\widehat{\underline{\mathbf{U}}}_{0,0}^\pm (\underline{q}) g_0^\pm (q(y_3 - x_3)) + \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_{1,0}^\pm (\underline{q}) g_1^\pm (q(y_3 - x_3)) \right],$$

dont les symboles sont définis dans la table 1.

2.1.2 Solution fondamentale de Mindlin

Nous utilisons ensuite comme intermédiaire le problème de Boussinesq-Cerruti, qui décrit un solide semi-infini \mathcal{B} soumis à une force ponctuelle à sa surface $\partial\mathcal{B}$. Dans l'espace de Fourier partiel, le tenseur de Boussinesq-Cerruti $\widehat{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{e}_k \otimes \widehat{\underline{\mathbf{B}}}^k$ est donné par les déplacements $\widehat{\underline{\mathbf{B}}}^k$ satisfaisant $\widehat{\mathbf{N}}[\widehat{\underline{\mathbf{B}}}^k] = \underline{\mathbf{0}}$ et $\widehat{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}[\widehat{\underline{\mathbf{B}}}^k] = \underline{e}_k$. Nous faisons usage de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^+$ pour exprimer $\widehat{\underline{\mathbf{B}}}^k$ et identifions les coefficients restants à l'aide de la condition limite pour trouver :

$$\widehat{\underline{\mathbf{B}}} (\underline{q}, y_3) = \frac{1}{q} \left[\widehat{\underline{\mathbf{B}}}_{0,0} (\underline{q}) g_0^+ (q y_3) + \widehat{\underline{\mathbf{B}}}_{1,0} (\underline{q}) g_1^+ (q y_3) \right],$$

où les symboles $\widehat{\underline{\mathbf{B}}}_{0,0}$ et $\widehat{\underline{\mathbf{B}}}_{1,0}$ sont définis dans la table 1.

Nous pouvons alors définir la solution fondamentale du problème de Mindlin par superposition linéaire des solutions des tenseurs de Kelvin et de Boussinesq-Cerruti :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^k (\underline{q}, x_3, y_3) = \widehat{\underline{\mathbf{U}}}_\infty^k (\underline{q}, x_3, y_3) - \widehat{\underline{\mathbf{B}}}^T (\underline{q}, x_3) \cdot \widehat{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}[\widehat{\underline{\mathbf{U}}}_\infty^k (\underline{q}, x_3, y_3)].$$

TABLE 1 – Symboles pour les solutions fondamentales de Kelvin et de Boussinesq-Cerruti dans l'espace de Fourier partiel.

Symbole	Expression
b	$4(1 - \nu)$
$\underline{\Delta}, \underline{\Delta}^\pm$	$(iq_1/q, iq_2/q, 0), \underline{e}_3 \mp \underline{\Delta}$
$\widehat{U}_{0,0}^\pm$	$\frac{1}{2\mu b} (b\underline{I} + \underline{\Delta} \otimes \underline{\Delta} - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$
$\widehat{U}_{1,0}^\pm$	$\mp \frac{1}{2\mu b} \underline{\Delta}^\pm \otimes \underline{\Delta}^\pm$
$\widehat{B}_{0,0}^\pm$	$\frac{1}{2\mu} (2\underline{I} + (1 - 2\nu)\underline{\Delta}^+ \otimes \underline{\Delta}^- + \underline{\Delta} \otimes \underline{\Delta} - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$
$\widehat{B}_{1,0}^\pm$	$\frac{1}{2\mu} \underline{\Delta}^+ \otimes \underline{\Delta}^+$
$g_0^\pm(z), g_1^\pm(z)$	$e^{\mp z}, ze^{\mp z}$

Les noyaux des opérateurs \mathcal{M} , \mathcal{N} , $\nabla\mathcal{N}$ et $\nabla\mathcal{M}$ s'expriment finalement, dans l'espace de Fourier partiel, à l'aide des distributions \widehat{G} , $\widehat{\nabla G}$ et $\widehat{\nabla^2 G}$.

2.2 Opérateurs intégraux discrets

La discrétisation des opérateurs \mathcal{M} et \mathcal{N} se fait de manière naturelle lorsque ceux-ci sont appliqués à des fonctions périodiques qui admettent une décomposition par série de Fourier. L'approche présentée ici est similaire aux méthodes d'homogénéisation qui utilisent aussi des opérateurs intégraux dans l'espace de Fourier appliquées à des fonctions périodiques [12, 13]. Soit \underline{w} une distribution de contraintes initiales dans \mathcal{B} et possédant une périodicité horizontale, de sorte qu'il suffit de la définir sur $\mathcal{B}_p =]0, L_1[\times]0, L_2[\times \mathbb{R}^+$. On a alors

$$\underline{w}(\underline{\tilde{x}}, x_3) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^2} \widehat{\underline{w}}(\underline{k}, x_3) \exp(2\pi i \underline{k} \cdot \underline{\tilde{x}}),$$

où $\widehat{\underline{w}}$ sont les coefficients de Fourier et $\underline{k} = (k_1/L_1, k_2/L_2)$. L'application de \mathcal{N} à \underline{w} donne alors le déplacement

$$\mathcal{N}[\underline{w}](\underline{\tilde{x}}, x_3) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^2} \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \widehat{\nabla G}(-2\pi \underline{k}, x_3, y_3) : \widehat{\underline{w}}(\underline{k}, y_3) dy_3 \right)}_{\widehat{\underline{u}}(\underline{k}, x_3)} \exp(2\pi i \underline{k} \cdot \underline{\tilde{x}}). \quad (6)$$

L'intégrale sur y_3 nécessaire au calcul de $\widehat{\underline{u}}$ peut être discrétisée en $N_3 - 1$ intervalles ; on suppose alors une approximation $\widehat{\underline{w}}_h(\underline{k}, x_3)$ interpolant $\widehat{\underline{w}}(\underline{k}, x_3)$ sur les bornes des intervalles choisis. Étant donné la décroissance exponentielle de \widehat{U}_∞ , et de ses dérivées, par rapport à y_3 , l'évaluation des intégrales essentielles au calcul de (6) peut être effectuée sur la base d'un critère de type $|x_3 - y_3| < d$ où d est une distance de seuil [6] au-delà de laquelle l'intervalle n'est pas considéré dans l'intégration, ce qui permet une réduction du nombre d'opérations nécessaires pour l'évaluation de $\widehat{\underline{u}}$. Cette réduction vient s'ajouter à celle apportée par l'emploi de la transformée de Fourier rapide pour évaluer la somme discrète dans (6).

Enfin, puisque l'application de l'algorithme de retour radial pour le calcul des déformations plastiques nécessite une représentation locale des contraintes et des déformations, il est naturel d'employer la transformée de Fourier discrète pour le calcul des coefficients de Fourier $\widehat{\underline{w}}_h$. La procédure de résolution du problème de plasticité consistera donc en des aller-retours entre l'espace physique et l'espace de Fourier partiel, dûs au caractère local des lois de comportement (dans l'espace physique) et des opérateurs intégraux (dans l'espace de Fourier).

3 Contact élastoplastique

L'approche choisie ici pour résoudre le problème de contact élastoplastique est développée dans [4] et procède par résolution alternée de deux sous-problèmes : (i) le problème de contact élastique où les déformations plastiques sont fixes, (ii) le problème de plasticité où les tractions à la surface sont fixes.

(i) Problème de contact. Le problème (i) est traité ici avec une approche par minimisation à l'aide d'un gradient conjugué [14, 6].

(ii) Problème de plasticité. Le problème de plasticité peut s'écrire sous la forme d'une équation implicite [15]. Les déformations totales sont exprimées en fonction des tractions à la surface \underline{t}^D et des déformations plastiques $\underline{\underline{\epsilon}}^P$:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \nabla^{\text{sym}} \mathcal{M}[\underline{t}^D] + \nabla^{\text{sym}} \mathcal{N}[\underline{\underline{\epsilon}}^P].$$

En prenant la différence entre deux pas de chargement n et $n + 1$, on obtient :

$$\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_n = \nabla^{\text{sym}} \mathcal{M}[\Delta \underline{t}_n^D] + \nabla^{\text{sym}} \mathcal{N}[\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_n^P(\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_n, S_n)], \quad (7)$$

où $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_n^P$ symbolise le retour radial, qui est fonction de l'état plastique S_n . La résolution de l'équation non-linéaire (7) pour $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_n$ donne l'incrément de déformations plastiques résiduelles qui est nécessaire pour mettre à jour le problème de contact élastique, selon l'algorithme de couplage développé dans [4] et explicité dans [6].

4 Validation

Nous validons l'approche de contact élastoplastique par comparaison avec une simulation de référence de contact avec un indenteur sphérique pour laquelle les déformations plastiques sont calculées à l'aide de la méthode des éléments finis. Ces dernières sont issues d'un modèle de plasticité à écoulement associé, la surface d'écoulement étant décrite par un critère de von Mises sans écrouissage. La contrainte d'écoulement en cisaillement est notée τ_y . La force appliquée W_y appliquée sur l'indenteur et le rayon de contact associé a_y , correspondant à l'apparition de déformations plastiques dans le matériau poinçonné

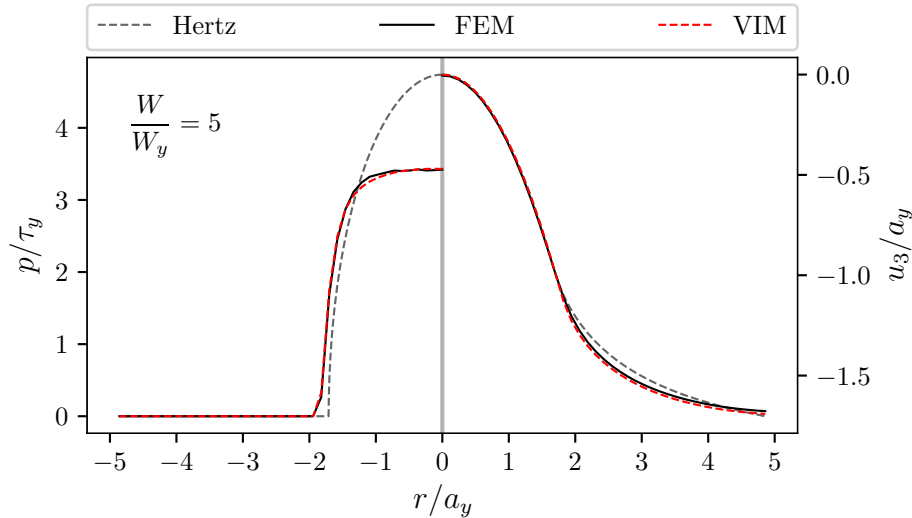


FIGURE 1 – Simulations élastoplastiques d'indentation sphérique. Nous validons la méthode proposée en effectuant deux simulations élastoplastiques : une où les déformations plastiques sont calculées à l'aide de la méthode des éléments finis et l'autre où elles sont résolues à partir de (7). L'accord entre les solutions est excellent, et le comportement correspond à celui observé par d'autres études [16, 4].

sont données par :

$$(a) W_y = \frac{\pi^3 R^2}{6E^*2} p_y^3, \quad (b) a_y = \sqrt{\frac{3W_y}{2\pi p_y}},$$

où R est le rayon de l'indenteur, $E^* := E/(1 - \nu^2)$ et $p_y = 2.77\tau_y$ [16]. La figure 1 montre une comparaison entre le profil des pressions dans les cas (a) Hertzien, (b) plastique avec $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}^p$ calculé par la méthode des éléments finis et (c) plastique avec $\Delta \underline{\underline{\epsilon}}^p$ issu de la résolution de (7), les opérateurs \mathcal{M} et \mathcal{N} étant calculés par notre approche. Nous observons un excellent accord entre les calculs par éléments finis et par équations intégrales.

5 Conclusion

Nous avons présenté une approche par équations intégrales du problème de contact élastoplastique périodique. La formulation dans l'espace de Fourier partiel des tenseurs de Green permet des gains substantiels en termes de mémoire et d'efficacité de calcul. Notre approche est validée sur un cas académique de contact. Des cas d'application aux surfaces rugueuses (voir [6]) seront par ailleurs présentés lors de la conférence.

Références

- [1] F. P. Bowden and D. Tabor. The Area of Contact between Stationary and between Moving Surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 169(938):391–413, 1939.
- [2] J. F. Archard. Contact and Rubbing of Flat Surfaces. *Journal of Applied Physics*, 24(8):981–988, August 1953.
- [3] L. Pei, S. Hyun, J.-F. Molinari, and Mark O. Robbins. Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(11):2385–2409, November 2005.
- [4] C. Jacq, D. Nélías, G. Lormand, and D. Girodin. Development of a Three-Dimensional Semi-Analytical Elastic-Plastic Contact Code. *Journal of Tribology*, 124(4):653, 2002.
- [5] P. Sainsot, C. Jacq, and D. Nélías. A Numerical Model for Elastoplastic Rough Contact. *CMES : Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 3(4):497–506, December 2002.
- [6] Lucas Frérot, Marc Bonnet, Jean-François Molinari, and Guillaume Anciaux. A Fourier-accelerated volume integral method for elastoplastic contact. *arXiv:1811.11558 [cond-mat, physics:physics]*, November 2018.
- [7] Marc Bonnet. *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. J. Wiley, Chichester ; New York, 1995. OCLC : ocm41368652.
- [8] Raymond D. Mindlin. Force at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid. *Journal of Applied Physics*, 7(5):195–202, May 1936.
- [9] Lucas Frérot. The Mindlin Fundamental Solution - A Fourier Approach. Zenodo, November 2018.
- [10] Chintakindi L. Amba-Rao. Fourier transform methods in elasticity problems and an application. *Journal of the Franklin Institute*, 287(3):241–249, March 1969.
- [11] Stéphanie Chaillat and Marc Bonnet. A new Fast Multipole formulation for the elastodynamic half-space Green's tensor. *Journal of Computational Physics*, 258(Supplement C):787–808, February 2014.
- [12] H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157(1):69–94, April 1998.
- [13] J. Zeman, T. W. J. de Geus, J. Vondřejc, R. H. J. Peerlings, and M. G. D. Geers. A finite element perspective on nonlinear FFT-based micromechanical simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 111(10):903–926, September 2017.
- [14] I. A. Polonsky and L. M. Keer. A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. *Wear*, 231(2):206–219, July 1999.
- [15] Marc Bonnet and Subrata Mukherjee. Implicit BEM formulations for usual and sensitivity problems in elasto-plasticity using the consistent tangent operator concept. *International Journal of Solids and Structures*, 33(30):4461–4480, December 1996.
- [16] C. Hardy, C. N. Baronet, and G. V. Tordion. The elasto-plastic indentation of a half-space by a rigid sphere. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3(4):451–462, October 1971.