

Optimisation topologique des liaisons dans les systèmes mécaniques

L. Rakotondrainibe^{1,2},
G. Allaire², P. Orval¹

¹ Groupe RENAULT, {lalaina.rakotondrainibe,patrick.orval}@renault.com

² CMAP, Ecole Polytechnique, allaire@map.polytechnique.fr

Résumé —

Aujourd'hui, il n'existe pas encore de code de calculs qui puisse optimiser conjointement la structure d'une pièce et ses liaisons à un assemblage mécanique. Des études itératives ont toutefois montré l'intérêt d'un tel couplage. On présente ici une approche qui permet d'optimiser simultanément la structure d'une pièce d'une part et la position et le nombre de ses liaisons d'autre part. La structure et ses liaisons sont respectivement représentées par des fonctions level-set. La gestion du nombre de liaisons est réalisée à l'aide d'un calcul de gradient topologique.

Mots clés — Optimisation topologique, liaisons mécaniques, level-set, gradient topologique.

1 Introduction

Les travaux présentés ci-dessous sont réalisés dans le cadre d'une thèse CIFRE entre le Groupe RENAULT et le Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique (CMAP).

Les constructeurs automobiles doivent constamment respecter des normes sécuritaires et des mesures environnementales strictes, des exigences en termes de confort, etc... tout en proposant des véhicules de plus en plus performants. Une importante préoccupation au sein de RENAULT concerne l'allègement des véhicules. En effet, la diminution de la masse des véhicules permet une réduction de la consommation de carburant *ie.* une diminution des émissions de CO₂. Par ailleurs, l'allègement des structures permet des économies de matières premières. Pour ce faire, on a par exemple recours à l'optimisation topologique afin de minimiser la masse d'une pièce tout en conservant ses performances mécaniques pour répondre au cahier des charges. Traditionnellement, cette optimisation est réalisée sans faire varier la position et le nombre des liaisons de la pièce. Quoiqu'il en soit, des approches par essais successifs d'optimisation des liaisons ont révélé des gains supplémentaires substantiels en terme d'allègement de pièces massives. Cependant, ces études nécessitent plusieurs résolutions et sont fortement orientées par des propositions d'experts.

On se propose ici d'établir une méthode permettant d'obtenir la forme optimale d'une pièce ainsi que les positions optimales et le nombre adéquat de ses liaisons de manière continue. Plus précisément, le résultat est obtenu à l'aide d'une seule boucle d'optimisation sans s'appuyer sur une forte expertise. Pour ce faire, nous utilisons la méthode level-set pour représenter respectivement la structure de la pièce et ses liaisons. Cette approche permet l'optimisation couplée entre la structure et la position de ses liaisons. En ce qui concerne la gestion du nombre de liaisons, nous avons recours à un calcul de gradient topologique pour générer une ou plusieurs liaisons. Nous illustrerons ces axes de recherches avec des problèmes de minimisation de volume avec une contrainte sur la compliance qui mesure la rigidité de la pièce ou des problèmes de minimisation de compliance.

2 Méthodologie

2.1 Prise en compte de la structure et de ses liaisons par la méthode level-set

La méthode level-set [2] présente une souplesse et une grande efficacité numérique. Considérons un domaine de travail $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) qui contient toutes les formes admissibles Ω . La méthode level-set consiste à paramétrer la frontière de la forme Ω par une fonction φ définie sur \mathcal{D} par

$$\begin{cases} \varphi(x) < 0 \text{ dans } \Omega \\ \varphi(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \mathcal{D} \\ \varphi(x) > 0 \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\Omega} \end{cases} . \quad (1)$$

Cette méthode permet donc de capturer une forme donnée sur un maillage fixe et ne nécessite pas de remaillage lorsque celle-ci évolue.

On doit faire une distinction importante entre les liaisons et la structure qui sont toutes deux repérées par des fonctions level-set. L'approche originale de ces travaux consiste à représenter les liaisons par des formes simples telles que des disques en 2D et des sphères en 3D tandis que la structure, elle, a une forme beaucoup plus réaliste, donc plus complexe. L'interaction entre le domaine des formes admissibles de la structure et le domaine des positions admissibles des liaisons est également gérée à l'aide de la méthode level-set. Concernant la méthode d'optimisation, il y a également une distinction à faire. Le transport de la frontière de la structure s'effectue en résolvant l'équation d'Hamilton - Jacobi

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) + V(t, x) |\nabla \varphi(t, x)| = 0 \\ \varphi(0, x) = \varphi_0(x) \end{cases} . \quad (2)$$

Les liaisons sont représentées par des modèles à paramètres concentrés comme cela sera illustré pour le cas d'une vis dans la section 4. Ces paramètres sont modifiés avec une méthode de descente de gradient

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n J'(X_n), \quad (3)$$

où X_n est le paramètre en question (par exemple la position), δ_n est le pas et $J'(X_n)$ est la direction de descente qui se trouve également être la dérivée de la fonction objectif par rapport au paramètre qu'on désire optimiser.

Ces distinctions permettent le changement de forme de la structure tout en conservant la forme de la liaison. Le fait de représenter les liaisons par des fonctions level-set permet d'éviter un maillage exact de celles-ci et donc un remaillage de ces dernières lorsque leur position varie. On obtient ainsi une représentation fonctionnelle et peu coûteuse des liaisons.

2.2 Gestion du nombre de liaisons par gradient topologique

Supposons que le nombre initial de liaisons est insuffisant ou que l'orientation de la nouvelle structure rende ce nombre insuffisant pour atteindre un extrema du critère ou pour respecter les contraintes. Il faudra donc générer une ou plusieurs nouvelles liaisons pour poursuivre sainement le processus d'optimisation. Nous utilisons le gradient topologique [3, 7, 8] pour identifier où il est le plus favorable d'introduire un petit trou ou une petite inclusion dans un domaine donné pour diminuer l'objectif.

On se donne une forme de référence ω qui restera fixe. Dans notre cas, on préférera plutôt les formes sphériques. A partir de cette référence, on peut définir un trou ou une inclusion ω_ρ centré au point x_0 et dont la taille est définie par le facteur ρ qui doit être petit par rapport à la taille caractéristique de la structure. Cette méthode consiste à faire un développement asymptotique de J évaluée sur le domaine perturbé, *ie.* dans le domaine avec le trou ou l'inclusion.

$$J(\Omega_\rho) = J(\Omega) + s(\rho) D_T J(x_0) + o(s(\rho)) \quad (4)$$

La fonction s est positive. La quantité $D_T J$ est le gradient topologique calculé sur tout le domaine. Si celle-ci s'avère négative en certains points, on choisit x_0 comme étant la position où le gradient topologique est minimal et négatif. On peut alors nucléer un petit trou ou une petite inclusion centrée en x_0 avec des conditions aux limites adéquates pour décroître la fonction objectif. Une fois la nouvelle liaison de petite taille générée, on fait varier son diamètre afin d'obtenir une dimension normalisée tout en vérifiant que le critère diminue.

3 Optimisation couplée : structure et position des liaisons

Dans un premier temps, les liaisons sont représentées par des encastremets. Leur nombre est fixé. On illustre le couplage de l'optimisation de structure et de position des liaisons avec un modèle simplifié d'une face accessoires. Il s'agit d'un organe qui fait partie du groupe moto propulseur. Dans notre cas, il se compose d'un alternateur, d'un galet tendeur et d'un compresseur. Ces accessoires sont positionnés par l'intermédiaire d'un support accessoires.

On minimise le volume du support accessoires sous un cas de charge statique. La face accessoires est soumise à des sollicitations statiques correspondant à la tension de pose de la courroie après réglage du galet tendeur. On ajoute une contrainte de compliance qui est prise en compte avec une méthode de Lagrangien augmenté. La figure 1 confronte les résultats obtenus pour l'optimisation de la structure du support à encastremets fixés et l'optimisation couplée de la structure et de la position des liaisons.

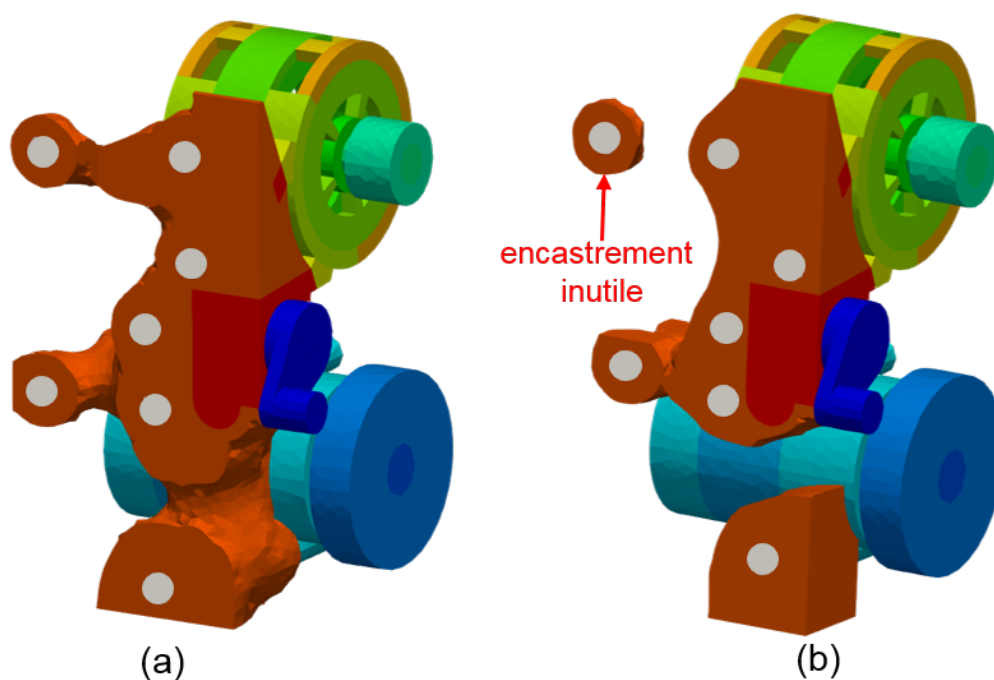


FIGURE 1 – (a) Optimisation de la structure à encastremets fixés, (b) Optimisation couplée structure et position des encastremets

Comparée à l'optimisation topologique classique de la structure uniquement, le couplage offre un allégement supplémentaire de l'ordre de 1 kg. On passe ainsi de 3,980 kg à 2,835 kg. On remarque un changement de topologie puisque la structure s'est divisée en deux blocs, tous deux reliés aux accessoires. De plus, le couplage structure et position des liaisons permet d'ores et déjà de jouer sur le nombre des liaisons. En effet, les encastremets sont positionnés de manière plus efficace. Dans ce cas de charge et avec la contrainte qu'on a imposé, on identifie un encastrement inutile qui s'est détaché de la structure. En revanche, cet encastrement est bel et bien nécessaire pour le respect de la contrainte dans le cas d'une optimisation de structure seule. Notons toutefois que la démarche qui vient d'être présentée ne permet pas de rajouter des liaisons. Pour cela, nous aurons recours au gradient topologique.

4 Vis longues normalisées

4.1 Modélisation idéalisée

Cette section présente un modèle de liaison plus fonctionnel que l'encastrement utilisé dans le cas de la face accessoires. Partant de la vis normalisée issue des techniques de l'ingénieur [4, 5], on propose une modélisation idéalisée de la vis normalisée longue (cf. figure 2). Le modèle proposé doit par conséquent respecter la condition d'éclatement d'Euler-Bernoulli.

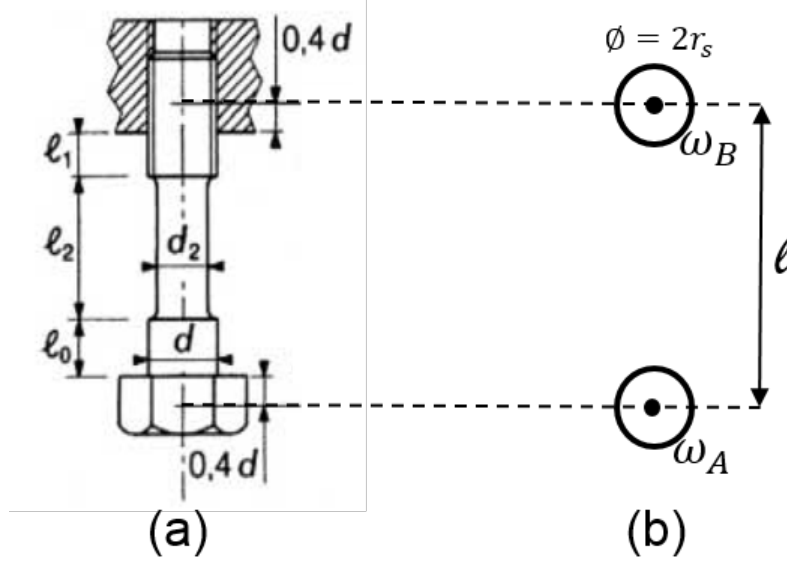


FIGURE 2 – (a) Vis issue des techniques de l'ingénieur [4, 5], (b) Modèle de vis idéalisée

Une vis étant un élément rigide, elle est idéalisée par deux boules rigides qui représentent les deux extrémités de la vis. Elles sont espacées de ℓ la longueur d'implantation de la vis et leur rayon r_s correspond au rayon équivalent de la partie filetée. Le comportement de la vis est modélisé par un ressort. De ce fait, elle répond à la loi

$$F = Ku_L, \quad (5)$$

où K est la matrice de rigidité de la vis. Cette matrice est déterminée à l'aide de considérations mécaniques [6]. Les degrés de liberté de la vis sont représentés par le vecteur u_L qui contient les translations et les rotations de la vis.

$$u_L = \begin{pmatrix} u_r^B - u_r^A \\ u_r^B - u_r^A \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Comme les deux boules sont des corps rigides, leur translation et leur rotation s'expriment aisément. Ainsi, la translation d'une boule rigide correspond à la moyenne de déplacement dans la boule

$$u_r^A = \frac{1}{|\omega_A|} \int_{\omega_A} u dV. \quad (7)$$

La rotation d'une boule rigide est égale à la moyenne d'un demi du rotationnel du déplacement dans la boule

$$u_r^A = \frac{1}{|\omega_A|} \int_{\omega_A} \frac{1}{2} \text{rot}(u) dV. \quad (8)$$

Notons $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$ le tenseur des déformations. La loi de Hooke est donnée par

$$Ae(u) = 2\mu e(u) + \lambda \text{tr}(e(u))I \quad (9)$$

avec μ et λ les coefficients de Lamé du matériau qui occupe le domaine Ω . L'énergie du système avec une vis est de la forme

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A^* e(u) : e(u) dV - \int_{\Omega} f \cdot u dV - \int_{\Gamma_N} g \cdot u dS + \frac{1}{2} (u_L - u_{pre})^T K (u_L - u_{pre}). \quad (10)$$

Les forces de volume et les forces surfaciques s'appliquant sur le système sont respectivement f et g . Le tenseur d'élasticité est modifié de sorte à prendre en compte la rigidité des deux boules. On a alors

$$A^* = \begin{cases} A & \text{dans } \Omega \setminus (\omega_A \cup \omega_B) \\ \alpha A & \text{dans } \omega_A \cup \omega_B \end{cases} \quad (11)$$

où α est un coefficient suffisamment grand. On prend par exemple $\alpha = 100$. L'énergie de la vis est modélisée par $\frac{1}{2} (u_L - u_{pre})^T K (u_L - u_{pre})$. Le terme u_{pre} est un déplacement imposé qui a pour conséquence une précontrainte dans la vis.

4.2 Génération d'une ou plusieurs vis

Pour générer une nouvelle vis selon le modèle présentée dans la section précédente, il faut nucléer deux boules rigides reliées par un ressort à l'aide d'un calcul de gradient topologique. Pour ce faire, on suit la méthodologie proposée dans [1]. Partons d'un domaine sain dans lequel on veut nucléer une vis de petite taille. Son énergie s'exprime par

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A e(u) : e(u) dV - \int_{\Omega} f \cdot u dV - \int_{\Gamma_N} g \cdot u dS. \quad (12)$$

Le domaine perturbé désigne le domaine sain dans lequel on a généré une vis à un endroit donné. Son énergie est donnée par (10) évaluée en un déplacement perturbé u_p . On détermine ensuite le gradient topologique d'une fonction objectif standard de la forme

$$J(\Omega) = \int_{\Omega_0} F(u) dV + \int_{\Gamma_N} G(u) dS, \quad (13)$$

où Ω_0 est un sous domaine de Ω dans lequel on ne veut pas générer une vis.

On établit alors une stratégie permettant d'obtenir l'optimisation de la structure, de la position et du nombre de vis dans une seule boucle d'optimisation. On peut par exemple faire deux itérations d'advection de la structure suivies d'une itération d'optimisation de la position des vis. Toutes les dix itérations, on réalise un test de gradient topologique pour voir s'il est favorable d'ajouter une nouvelle vis.

5 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une approche qui se base sur la méthode level-set et le gradient topologique pour optimiser conjointement la structure d'une pièce ainsi que la position et le nombre de ses liaisons. Nous avons par la même occasion posé une modélisation idéalisée et fonctionnelle de la vis longue normalisée.

La méthodologie proposée ici sera reprise pour d'autres objectifs et d'autres contraintes. En premier lieu, il est naturel de traiter la tenue de la liaison dans le cadre cette thèse. Pour le cas de la vis, on peut par exemple prendre en compte la tension maximale dans la vis. Il est également intéressant de considérer le déplacement qui est un critère d'optimisation plus prisé industriellement que la compliance. D'autres critères tels que les contraintes de Von Mises, les pressions de contact ainsi que les contraintes NVH pourront également être regardés.

Références

- [1] G. Allaire, F. Jouve, N. Van Goethem, *Damage evolution in brittle materials by shape and topological sensitivity analysis*, J. Comput. Phys. 203, 5010-5044, 2011.
- [2] G. Allaire, F. Jouve, A-M. Toader, *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, J. Comput. Phys. 194, 1, 363-393, 2004.
- [3] J. Céa, S. Garreau, P. Guillaume, M. Masmoudi, *The shape and topological optimizations connection*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 188, 713-726, 2000.
- [4] J. Guillot, *Assemblages par éléments filetés*, Techniques de l'Ingénieur, B 5 560.
- [5] J. Guillot, *Modélisation et calcul des assemblages vissés. Généralités*, Techniques de l'Ingénieur, BM 5 560.
- [6] M. Kerguignas, G. Caignaert, *Résistance des matériaux*, DUNOD Université 4ème éd., 1977.
- [7] A. Novotny, J. Sokołowski, *Topological derivatives in shape optimization*, Interaction of mechanics and mathematics, Springer, Heidelberg, 2013.
- [8] J. Sokołowski, A. Żochowski, *On the topological derivative in shape optimization*, SIAM, J. Control Optim. 37, 1251-1272, 1999.