

Analyse dynamique du désaccordage involontaire et intentionnel des roues aubagées en présence de non-linéarités géométriques

A. Picou^{1,2}, E. Capiez-Lernout¹, C. Soize¹, M. Mbaye²

¹ Université Paris-Est Marne-la-Vallée, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Echelle, MSME UMR 8208 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 02, France {anthony.picou, evangeline.capiez-lernout, christian.soize}@u-pem.fr

² Safran Tech, Modelling & Simulation, Rue des Jeunes Bois, Châteaufort, 78114, France, moustapha.mbaye@safrangroup.fr

Résumé — Dans cette recherche, nous présentons une méthodologie pour l'analyse dynamique des effets non linéaires géométriques [1, 2] pour une structure de roue aubagée, constituée d'aubes désaccordées involontairement et intentionnellement. Le désaccordage intentionnel est mis en place de manière déterministe en considérant plusieurs types d'aubes de propriétés matérielles différentes. Les incertitudes liées au désaccordage involontaire sont par ailleurs implémentées via une approche probabiliste non-paramétrique [3]. La méthodologie est appliquée à une structure industrielle de roue aubagée afin de déterminer les répartitions des aubes permettant d'atténuer les effets d'amplification liés au désaccordage involontaire.

Mots clés — Désaccordage involontaire, quantification des incertitudes, non-linéarités géométriques.

1 Introduction

Dans le domaine de la dynamique linéaire des roues aubagées, le désaccordage involontaire, induit par les tolérances de fabrication, d'usinage et des variations des propriétés matérielles d'une aube à l'autre a pour conséquence d'amplifier les niveaux de réponse forcée sur un faible nombre d'aubes [4, 5]. Une possible stratégie pour maîtriser ces niveaux d'amplification [6, 7] consiste à désaccorder intentionnellement la roue aubagée. On introduit alors la notion de motif, à partir duquel différents types de secteurs générateurs sont assemblés. Dans le cas présent, ces recherches tiennent compte des effets engendrés par les non-linéarités géométriques, qui ne peuvent plus être négligés. Ces non-linéarités géométriques sont dues à l'utilisation de structures plus flexibles et plus légères, conduisant à des niveaux élevés de déplacements et de déformations. Le présent papier est dédié à l'analyse numérique non linéaire d'une roue aubagée désaccordée involontairement et intentionnellement en présence de non-linéarités géométriques. Une telle analyse nécessite cependant le développement d'une stratégie adaptée compatible avec l'utilisation de modèles numériques de grande dimension. La première section résume la méthodologie permettant la construction d'un modèle stochastique pour une roue aubagée en rotation désaccordée intentionnellement et involontairement. Dans un second temps, une application numérique sur un modèle représentatif d'une structure industrielle de roue aubagée est effectuée.

2 Méthodologie

Cette section est consacrée au développement d'une méthodologie adaptée à l'analyse numérique non linéaire d'une structure tournante de roue aubagée désaccordée intentionnellement et involontairement. Dans le contexte du désaccordage intentionnel, la structure de roue aubagée est caractérisée de manière déterministe par un motif définissant la répartition spatiale de secteurs différents dont on maîtrise la géométrie et les propriétés du matériau. Le désaccordage involontaire est pris en compte au moyen de l'approche probabiliste non-paramétrique des incertitudes. Par ailleurs, il est supposé que les chargements extérieurs sont d'une intensité suffisante pour engendrer des effets non linéaires géométriques liés aux grands déplacements et déformations.

2.1 Modèle élément fini d'une roue aubagée désaccordée intentionnellement

La modèle numérique de la roue aubagée désaccordée intentionnellement est construit en utilisant la méthode des éléments finis. On dispose d'un certain nombre de modèles éléments finis de secteurs différents dont les maillages sont compatibles à l'interface de chaque secteur. Le modèle numérique de la roue aubagée désaccordée intentionnellement est construit en assemblant les différents types de secteurs entre eux selon un motif donné. La roue aubagée tourne à une vitesse constante Ω autour de son axe de rotation. Soit n le nombre de degrés de liberté de la structure complète. Dans le repère tournant lié à chaque secteur, l'équation de la réponse forcée décrivant le comportement dynamique non linéaire de la roue aubagée désaccordée intentionnellement est définie dans le domaine temporel par

$$[M]\ddot{\mathbf{u}} + ([D] + [C_g(\Omega)])\dot{\mathbf{u}} + ([K_e] + [K_c(\Omega)] + [K_g(\Omega)])\mathbf{u} + \mathbf{F}^{\text{NL}}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}, \quad (1)$$

avec \mathbf{u} et \mathbf{F} les vecteur des déplacements inconnus et des forces extérieures à valeurs dans \mathbb{R}^n . Dans l'équation (1), le vecteurs $\mathbf{F}^{\text{NL}}(\mathbf{u})$ définit les efforts internes liés aux effets non linéaires géométriques et les matrices $(n \times n)$ symétriques définies positives $[M]$, $[D]$, et $[K_e]$ représentent les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité élastique. Les matrices $[C_g(\Omega)]$, $[K_c(\Omega)]$ et $[K_g(\Omega)]$ sont liées aux effets de rotation et sont les matrices de couplage gyroscopique antisymétrique, de rigidité centrifuge symétrique définie négative et de rigidité géométrique symétrique définie positive. Il est à noter que la matrice de rigidité géométrique $[K_g(\Omega)]$ est construite au préalable au moyen d'un calcul statique linéaire avec un chargement centrifuge. De plus, la matrice $([K_e] + [K_c(\Omega)] + [K_g(\Omega)])$ est symétrique définie positive car il n'y a pas de divergence statique.

2.2 Construction du modèle réduit non linéaire de la roue aubagée désaccordée intentionnellement

On propose de construire une base de projection adaptée à la problématique du désaccordage intentionnel. Compte-tenu du termes de couplage gyroscopique de la structure, la résolution du problème aux valeurs propres généralisé associé à l'équation (1) conduirait à une base de projection complexe. Afin de pallier cette difficulté, la base de projection est construite en deux étapes. Dans un premier temps, le problème aux valeurs propres généralisé conservatif est résolu sans tenir compte du couplage gyroscopique.

$$\left([K^e] + [K^c(\Omega)] + [K^g(\Omega)] \right) \varphi_\alpha = \lambda_\alpha [M] \varphi_\alpha, \quad (2)$$

où $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, $\alpha = \{1, \dots, m\}$, sont les modes propres associés aux m premières valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$. On définit la matrice modale $[\Phi^m]$ de dimension $(n \times m)$ la matrice dont les colonnes sont constituées de ces modes propres. Cette première base de projection est ensuite utilisée pour construire un premier modèle réduit non linéaire incluant les effets gyroscopiques à partir de l'Eq. (1). Le problème de réponse forcée non linéaire est résolu dans le sous-espace et la solution non linéaire est caractérisée par le vecteur $\mathbf{q}_0(t)$ à valeurs dans \mathbb{R}^m . On construit ensuite une nouvelle base de projection à partir de la solution non linéaire $\mathbf{q}_0(t)$ en utilisant la méthode POD, qui nécessite de calculer les vecteurs propres associés à la matrice de corrélation de la solution non linéaire. Ce calcul s'effectue numériquement en utilisant la décomposition en valeurs singulières de la matrice $[C]$ définie par :

$$[C]_{ij} = q_{0i}(t_j) \sqrt{\Delta t}. \quad (3)$$

Les vecteurs singuliers associés aux N plus grandes valeurs singulières sont stockés dans la matrice $[\mathcal{W}^{(m,N)}]$ réelle de dimension $(m \times N)$. La base de projection permettant de construire le modèle réduit non linéaire associé à l'Eq. (1), est représentée par la matrice réelle $[\Psi]$ de dimensions $(n \times N)$ telle que,

$$\mathbf{u}(t) = [\Psi] \mathbf{q}(t) \quad \text{avec} \quad [\Psi] = [\Phi^m] [\mathcal{W}^{(m,N)}], \quad (4)$$

où $\mathbf{q}(t)$ est le vecteur des coordonnées généralisées à valeurs dans \mathbb{R}^N , solution de l'équation réduite de la dynamique non linéaire

$$[\mathcal{M}]\ddot{\mathbf{q}}(t) + ([\mathcal{D}] + [\mathcal{C}(\Omega)])\dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathcal{K}(\Omega)]\mathbf{q}(t) + \mathcal{F}^{\text{NL}}(\mathbf{q}(t)) = \mathcal{F}(t), \quad (5)$$

Dans l'Eq. (5), le vecteur des efforts internes généralisés non linéaire s'écrit

$$\mathcal{F}_i^{NL}(\mathbf{q}) = \mathcal{K}_{ijk}^{(2)} q_j q_k + \mathcal{K}_{ijkl}^{(3)} q_j q_k q_\ell \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}_{ijk}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\mathcal{K}}_{ijk}^{(2)} + \widehat{\mathcal{K}}_{jki}^{(2)} + \widehat{\mathcal{K}}_{kij}^{(2)} \right) \quad (6)$$

où les termes de rigidité quadratique et cubique $\widehat{\mathcal{K}}_{ijk}^{(2)}$ et $\mathcal{K}_{ijkl}^{(3)}$ sont explicitement construits numériquement par la méthode des éléments finis [2].

2.3 Construction du modèle réduit stochastique pour modéliser le désaccordage involontaire

Le modèle numérique stochastique non linéaire correspond à une modélisation probabiliste du désaccordage involontaire appliquée à la roue aubagée désaccordée intentionnellement. L'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes introduite dans [8, 3] est appliquée dans le contexte des non-linéarités géométriques [9], en incluant une stratégie pour réduire la taille du germe aléatoire [1]. Une telle stratégie implique une matrice positive $[\mathcal{K}^{NL}]$ d'ordre $P = N(N + 1)$ contenant les contributions des matrices de rigidité élastique, quadratique et cubique issues du modèle réduit. La matrice aléatoire correspondante $[\mathcal{K}^{NL}]$ est définie telle que :

$$[\mathcal{K}^{NL}] = [L_K][\mathbf{G}_K(\delta_K)][L_K]^T + [\Delta\tilde{\mathcal{K}}] \quad , \quad (7)$$

où $[L_K]$ est la matrice réelle de dimensions $(P \times Q)$ dont les colonnes contiennent les vecteurs propres de la matrice $[\mathcal{K}^{NL}]$ associés aux Q valeurs propres les plus importantes, où $[\Delta\tilde{\mathcal{K}}] = [\mathcal{K}^{NL}] - [L_K][L_K]^T$ et où $[\mathbf{G}_K(\delta_K)]$ est la matrice aléatoire de dimensions $(Q \times Q)$ (avec $Q \ll P$), dont la densité de probabilité est construite par le principe du maximum d'entropie [3]. Le scalaire δ_K est le paramètre qui contrôle le niveau d'incertitude dans la matrice. On suppose ici que l'aléa induit par le désaccordage est issu uniquement du terme de raideur élastique.

3 Application numérique

L'application numérique concerne l'analyse dynamique non linéaire d'une roue aubagée désaccordée intentionnellement et involontairement.

3.1 Description du modèle élément finis

La roue aubagée accordée est composée de 24 secteurs identiques (de type 1). Le maillage éléments finis d'un secteur est représenté Figure 1. Le matériau est supposé homogène, isotrope et élastique de module de Young $2 \times 10^{11} N.m^{-2}$, de coefficient de Poisson 0.3 et de masse volumique $7650 Kg.m^{-3}$, ce qui correspond à de l'acier. Dans le repère tournant lié à chaque aube, le disque est encastré au niveau de son alésage. La roue aubagée tourne autour de son axe de rotation à une vitesse constante $\Omega = 465 rad.s^{-1}$. Le logiciel commercial ANSYS est utilisé pour construire le secteur de référence. Celui-ci est constitué de 3,550 éléments finis solide tridimensionnels. Le maillage de la roue aubagée complète comporte donc 85,200 éléments finis, 262,392 noeuds et 787,176 degrés de liberté. Le désaccordage intentionnel est introduit en définissant un second type de secteur générateur (de type 2), obtenu en diminuant le module d'Young de l'aube de 10%, le module d'Young de la partie disque restant inchangé. Dans ce travail, on considère deux configurations : (1) une roue aubagée accordée constituée de secteurs de type 1 et dénotée par \mathcal{P}_1 et une roue aubagée désaccordée intentionnellement constituée de secteurs de type 1 et 2 dénotée par \mathcal{P}_2 , dont une représentation est montrée Figure 2. Les motifs des deux roues aubagées accordée et désaccordée intentionnellement, définissant la répartition spatiale des secteurs de type 1 et 2 sont donnés ci-dessous

$$\mathcal{P}_1 = [1111111111111111111111111111] \quad \mathcal{P}_2 = [111122111122111122111122] \quad (8)$$

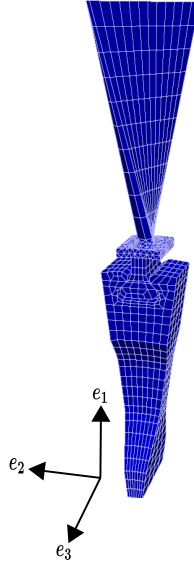


FIGURE 1 – Représentation du maillage éléments finis d'un secteur générateur

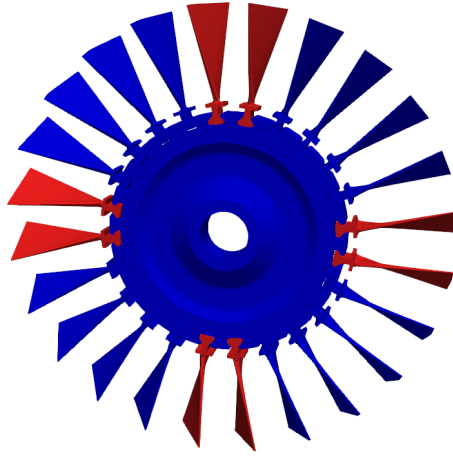


FIGURE 2 – Représentation de la roue aubagée désaccordée intentionnellement (configuration \mathcal{P}_2) constituée d'aubes de type 1 (bleu) et 2 (rouge)

3.2 Choix de la force d'excitation

La Figure 3 montre le graphe des valeurs propres $\nu_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}$ en fonction du nombre d'onde circconférentiel h correspondant au cas de la roue aubagée accordée (configuration \mathcal{P}_1). On choisit d'exciter la structure selon le nombre d'onde circconférentiel $h=4$ dans une bande d'excitation fréquentielle $\mathbb{B}_e = [1000, 1600] Hz$. Dans le domaine temporel, le vecteur des forces extérieures $\mathbf{F}(t)$ s'écrit sous la forme

$$\mathbf{F}(t) = s_0 g(t) \mathbb{F} \quad , \quad (9)$$

où la fonction $g(t)$, définie pour $t \in \mathbb{R}$, est construite de manière à ce que sa transformée de Fourier $|\hat{g}(2\pi\nu)| = 1$ dans la bande d'excitation \mathbb{B}_e et nulle en dehors de \mathbb{B}_e . Comme la réponse forcée est étudiée dans le domaine temporel, le signal $g(t)$ est tronqué numériquement et est défini pour $t \in [t_{ini}, t_{ini} + T]$ avec $t_{ini} = -0.065 s$ de telle façon que $g(t_{ini}) = 0$. La durée du signal est telle que $T = 0.35 s$, ce qui permet de capturer la fréquence fondamentale $\nu_0 = 434 Hz$, située en dehors de \mathbb{B}_e dans le cas de l'analyse dynamique non linéaire. La répartition spatiale de la force extérieure est un vecteur normalisé \mathbb{F} pour lequel les 3 directions liées au nœuds localisés en bout de chaque aube sont simultanément excités. L'intensité du chargement est donné par $s_0 = 1 N$. Une transformée de Fourier de la réponse dynamique non linéaire, calculée dans le domaine temporel est effectuée afin d'analyser *a posteriori* le

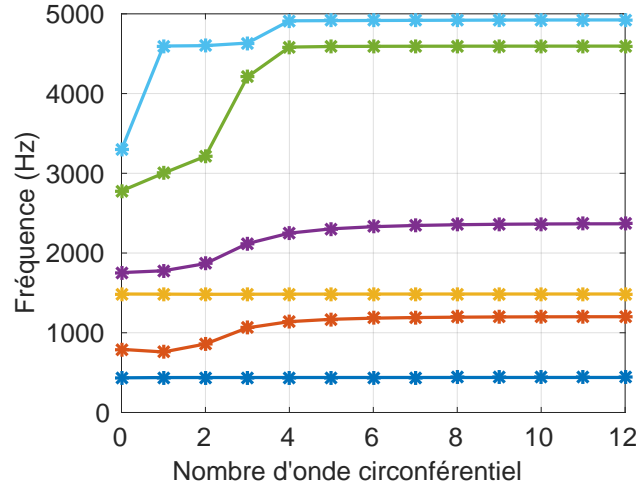


FIGURE 3 – Graphe $h \mapsto v_\alpha(h)$ des valeurs propres v_α correspondant à la configuration accordée \mathcal{P}_1 de la roue aubagée en rotation en fonction du nombre d'onde circonférentiel h .

comportement dynamique non linéaire dans le domaine fréquentiel.

3.3 Analyse dynamique non linéaire d'une roue aubagée désaccordée intentionnellement

Dans la suite, les notations indicielles NL et L sont utilisées respectivement dans le cas d'une analyse dynamique non linéaire ou linéaire. Elles sont délibérément omises si aucune confusion n'est possible. Soit $U_\alpha^j(t)$ le déplacement temporel de la pale j au noeud d'observation choisi dans la direction locale \mathbf{e}_α . Soit $\widehat{U}_\alpha^j(2\pi\nu)$ sa transformée de Fourier. Pour une configuration donnée, l'observation $|||\widehat{\mathbf{U}}_\alpha^j|||$ est définie par

$$|||\widehat{\mathbf{U}}^j|||^2 = \max_{\omega} ||\widehat{\mathbf{U}}^j(2\pi\nu)||^2 \text{ avec } ||\widehat{\mathbf{U}}^j(2\pi\nu)||^2 = \sum_{\alpha=1}^3 |\widehat{U}_\alpha^j(2\pi\nu)|^2. \quad (10)$$

Pour chaque motif, on recherche l'aube j_0 ayant l'amplitude fréquentielle la plus importante telle que :

$$j_0 = \arg \left\{ \max_j |||\widehat{\mathbf{U}}^j||| \right\}. \quad (11)$$

La Figure 4 montre les graphes $t \mapsto U_{3,L}^{j_0}(t)$ pour les deux configurations (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2). On peut noter que les réponses dans le domaine temporel de ces deux configurations sont très différentes. La Figure 5 montre les graphes de $t \mapsto U_{3,NL}^{j_0}(t)$ pour les deux configurations (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2). En comparant ces figures, on peut observer que l'intensité choisie de l'excitation induit des effets non linéaires géométriques non négligeables. En effet, la réponse non linéaire semble plus irrégulière, supposant la présence de plusieurs résonances en dehors de la bande d'excitation \mathbb{B}_e . Les réponses linéaires et non linéaires sont ensuite analysées dans le domaine fréquentiel. La Figure 6 montre les graphes de $\nu \mapsto ||\widehat{\mathbf{U}}_{LIN}^{j_0}(2\pi\nu)||$ (trait rouge) et $\nu \mapsto ||\widehat{\mathbf{U}}_{NL}^{j_0}(2\pi\nu)||$ (trait bleue) pour les configurations (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2). Pour les deux configurations, des résonances secondaires engendrées par les non-linéarités géométriques apparaissent en-dessous et au-dessus de la bande d'excitation fréquentielle \mathbb{B}_e .

3.4 Analyse dynamique non linéaire d'une roue aubagée désaccordée intentionnellement et involontairement

Dans cette partie, on s'intéresse à l'analyse non linéaire stochastique de la roue aubagée désaccordée intentionnellement et involontairement dans le cadre de la configuration \mathcal{P}_2 . Soit $\beta^{NL}(2\pi\nu)$ le facteur d'amplification dynamique aléatoire défini par,

$$\beta^{NL}(2\pi\nu) = \frac{||\widehat{\mathbf{U}}_{NL}^{j_0}(2\pi\nu)||}{|||\widehat{\mathbf{U}}_{NL}^{j_0,tuned}|||}, \quad (12)$$

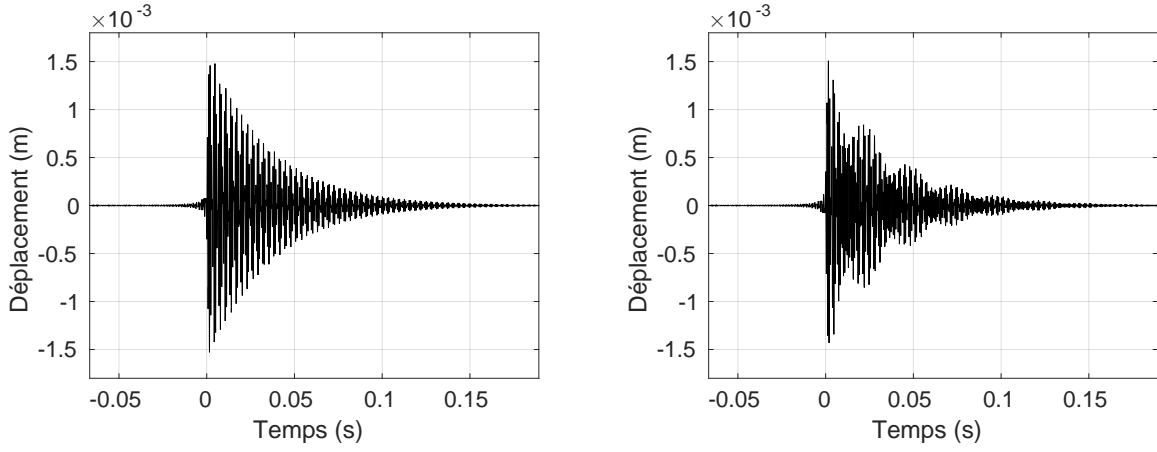


FIGURE 4 – Analyse dynamique linéaire dans le domaine temporel : graphe de $t \mapsto U_{3,L}^{j_0}(t)$ correspondant au motif \mathcal{P}_1 (figure gauche) et \mathcal{P}_2 (figure droite).

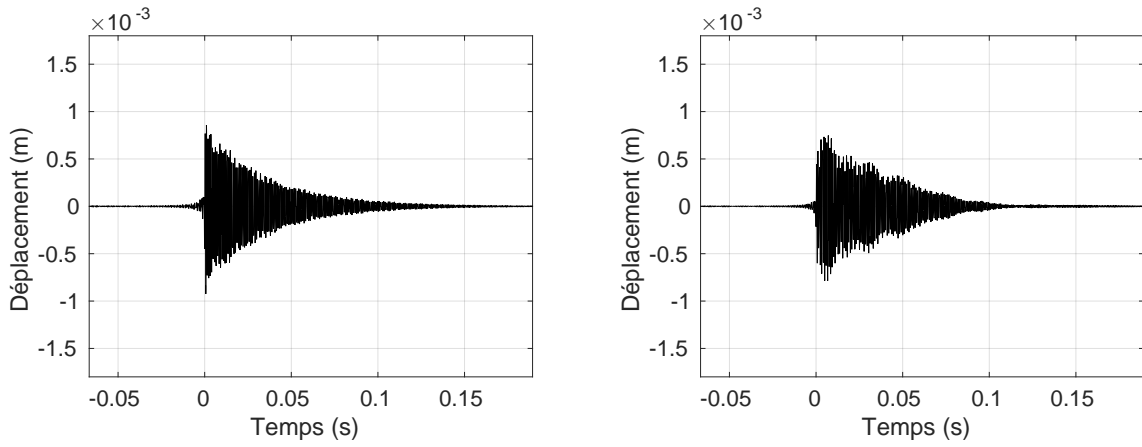


FIGURE 5 – Analyse dynamique non linéaire dans le domaine temporel : graphe de $t \mapsto U_{3,NL}^{j_0}(t)$ correspondant au motif \mathcal{P}_1 (figure gauche) et \mathcal{P}_2 (figure droite).

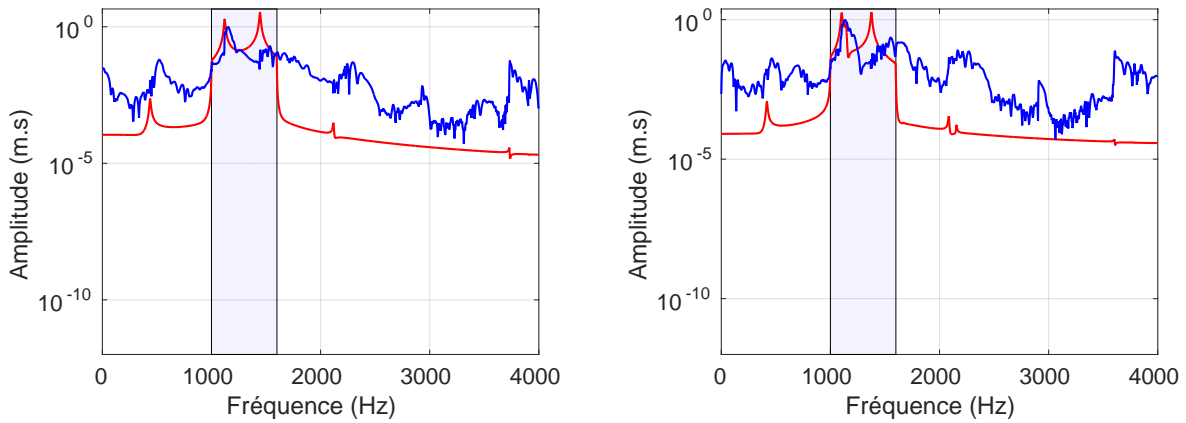


FIGURE 6 – Analyse dynamique linéaire et non linéaire dans le domaine fréquentiel : graphe de $\nu \mapsto \|\widehat{\mathbf{U}}_L^{j_0}(2\pi\nu)\|$ (trait rouge) et $\nu \mapsto \|\widehat{\mathbf{U}}_{NL}^{j_0}(2\pi\nu)\|$ (trait bleue) correspondant au motif \mathcal{P}_1 (figure gauche) et au motif \mathcal{P}_2 (figure droite).

avec $\|\widehat{\mathbf{U}}_{NL}^{j_0, \text{tuned}}\| = \max_{\nu \in \mathcal{B}_e} \|\widehat{\mathbf{U}}_{NL}^{j_0, \text{tuned}}(2\pi\nu)\|$. La Figure 7 montre les intervalles de confiance de $\beta^{NL}(2\pi\nu)$ pour $\delta = 5 \times 10^{-3}$ et $\delta = 0.1$ correspondant à un niveau de probabilité de 0.95. Ces résultats sont obtenus

dans la cadre d'une configuration désaccordée intentionnellement. On observe que la réponse dynamique non linéaire est très sensible aux incertitudes en dehors de la bande d'excitation fréquentielle. Soit $\beta_{max}^{+NL} = \max_{v \in \mathbb{B}_e} \beta^{+NL}(2\pi v)$ avec $\beta^{+NL}(2\pi v)$ le quantile à 95% du facteur d'amplification dynamique $\beta^{NL}(2\pi v)$. La Figure 8 montre le graphe $\delta \mapsto \beta_{max}^{+NL}$ décrivant l'évolution du maximum du facteur d'amplification pour chaque configuration en fonction du taux de désaccordage involontaire δ . On peut remarquer que le quantile à 95% du niveau d'amplification correspondant à la roue aubagée désaccordée intentionnellement reste inférieur à 1, supposant l'apport bénéfique du désaccordage intentionnel vis-à-vis du désaccordage involontaire pour une telle configuration. De plus, la figure montre l'évolution du maximum du facteur d'amplification pour ces deux configurations en fonction du taux de désaccordage δ . On peut remarquer que le niveau d'amplification dans la bande d'excitation fréquentielle \mathbb{B}_e reste inférieur à 1, supposant l'apport bénéfique du désaccordage intentionnel vis-à-vis du désaccordage involontaire pour une telle configuration.

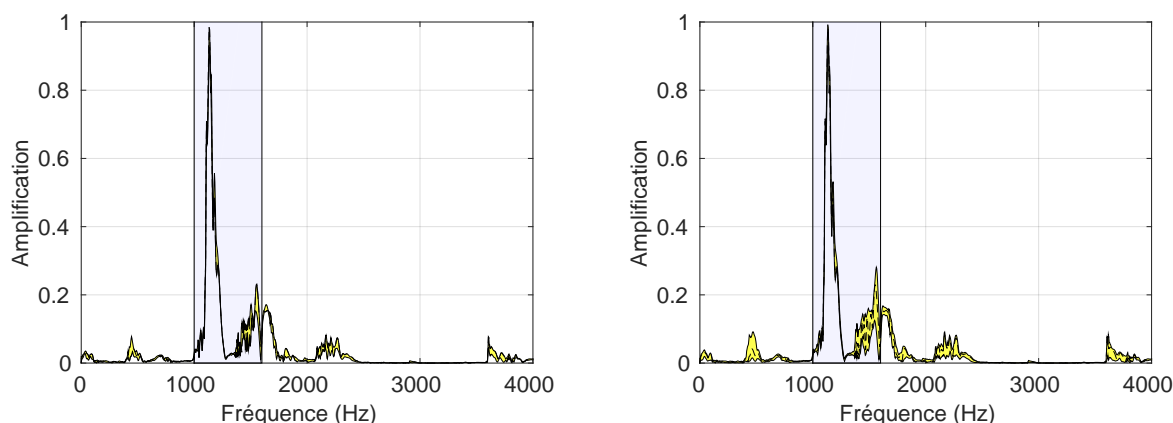


FIGURE 7 – Analyse stochastique non linéaire dans le domaine fréquentiel : graphe de $v \mapsto \beta^{NL}(2\pi v)$ pour $\delta = 0.005$ (figure gauche) et pour $\delta = 0.1$ (figure droite).

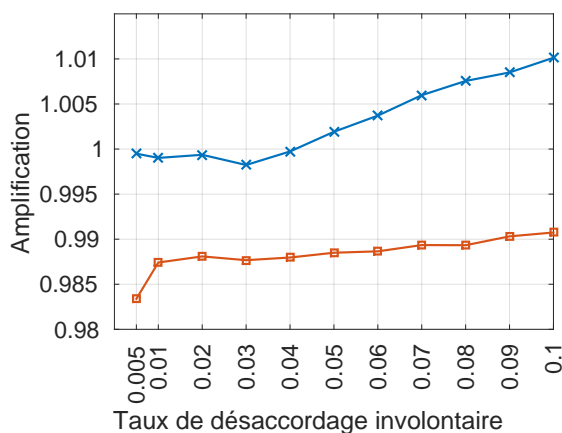


FIGURE 8 – Analyse stochastique non linéaire dans le domaine fréquentiel : graphe de $\delta \mapsto \beta_{max}^{+NL}$ associé au motif \mathcal{P}_1 (motif croix) et au motif \mathcal{P}_2 (motif carré)

CONCLUSION

Une méthodologie adaptée à la modélisation d'une roue aubagée en rotation désaccordée intentionnellement et involontairement a été proposée et appliquée à un modèle représentatif d'une roue aubagée industrielle. Les résultats mettent en avant la propagation des incertitudes via les non-linéarités géométriques en dehors de la bande d'excitation fréquentielle. La configuration \mathcal{P}_2 désaccordée intentionnellement et involontairement donne des niveaux d'amplification légèrement inférieurs à 1. Un travail d'optimisation de configuration est nécessaire pour trouver la configuration optimale qui donnera les niveaux d'amplification les plus faibles.

Références

- [1] E. Capiez-Lernout and C. Soize. An improvement of the uncertainty quantification in computational structural dynamics with nonlinear geometrical effects. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 7(1), 2017.
- [2] E. Capiez-Lernout, C. Soize, and M.-P. Mignolet. Computational stochastic statics of an uncertain curved structure with geometrical nonlinearity in three-dimensional elasticity. *Computational Mechanics*, 49(1) :87–97, 2012.
- [3] C Soize. *Uncertainty Quantification : An Accelerated Course with Advanced Applications in Computational Engineering*. Springer, 2017.
- [4] D.S. Whitehead. Effects of mistuning on the vibration of turbomachine blades induced by wakes. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 8(1) :15–21, 1966.
- [5] E. Capiez-Lernout and C. Soize. Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed-disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 126(3) :610–618, 2004.
- [6] B-K. Choi, J. Lentz, A.J. Rivas-Guerra, and M.P. Mignolet. Optimization of intentional mistuning patterns for the reduction of the forced response effects of unintentional mistuning : Formulation and assessment. In *International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition, New Orleans*, June 2001.
- [7] M. P. Castanier, Ottarsson G., and Christophe Pierre. A reduced order modeling technique for mistuned bladed disks. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119(3) :439–447, 1997.
- [8] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3) :277–294, 2000.
- [9] M.-P. Mignolet and C. Soize. Stochastic reduced order models for uncertain geometrically nonlinear dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(45-48) :3951–3963, 2008.