

Element fini solide-coque pour le calcul non linéaire des structures minces et moyennement épaisses

M.Dia^{1,2}, A.Gravouil¹, N. Hamila¹,
M. Abbas^{2,3}

¹ Université de Lyon, INSA-lyon, CNRS UMR5259, Lamcos, F-69621, France, {mouhamadou.dia, anthony.gravouil, Nahiene.hamila}@insa-lyon.fr

² EDF Lab, Paris Saclay, {mouhamadou-m.dia, Mickael.abbas.}@edf.fr

³ Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Industrielles, UMR 9219 EDF-CNRS-CEA-ENSTA, Université Paris Saclay

Résumé — Dans ce travail nous présentons la formulation d'un élément fini solide/coque dénommé SB9 de type hexaédrique à 9 nœuds et 25 degrés de liberté, soit 3 degrés de liberté par nœud sommet et un degré de liberté pour le neuvième nœud situé au centre de l'élément. L'addition du dernier nœud permet d'enrichir le champ de déformation de l'élément permettant ainsi l'utilisation d'une loi de comportement tridimensionnelle sans hypothèse des contraintes planes. La méthode des champs assumés de cisaillement transverse et la technique d'intégration réduite sont appliquées à la formulation de cet élément.

Mots clés — Solide/coque, Loi de comportement 3D, Non linéaire.

1 Introduction

Le développement d'éléments solides / coques est actuellement en plein essor. En effet, tant dans le domaine de la simulation des procédés (emboutissage des tôles) que du calcul des structures élancées (sous sollicitations extrêmes), la demande en utilisation d'éléments solides tridimensionnels avec un comportement proche de la cinématique des coques est de plus en plus important, en particulier par leur aptitude à utiliser des lois de comportements non-linéaires à grands nombres de variables internes sans l'hypothèse des contraintes planes. En effet, l'hypothèse des contraintes planes nécessite généralement de reprendre complètement la modélisation des lois de comportement non-linéaire tridimensionnelles et peut conduire à des difficultés numériques comme l'incompressibilité plastique par exemple. On peut aussi rencontrer des difficultés pour prendre en compte le contact en peau, ou simuler le pincement. Dans ce contexte, l'objet de ce travail de recherche est de formuler un nouvel élément fini solides / coques autorisant les cinématiques de Kirchoff-Love et de Reissner Mindlin, mais sans l'hypothèse des contraintes planes (afin d'utiliser des lois de comportement purement tridimensionnelles) [1, 2], avec des degrés de libertés en déplacement uniquement, et autorisant le cisaillement transverse éventuel ainsi que le pincement, mais aussi le contact et le frottement sur les surfaces extérieures, et ceci en rajoutant un degré supplémentaire au centre de l'élément fini (déformation hors plan à minima linéaire). Cette nouvelle classe d'éléments finis solides coques pourra également être étendue au cas des grandes transformations. L'un des défis les plus importants dans la formulation d'un élément solide/ coque est de pouvoir éliminer l'ensemble des phénomènes de verrouillages susceptible de faire surface lors de la modélisation d'une structure mince. Dans la formulation de ce nouvel élément nous utilisons la méthode d'intégration réduite pour résoudre certains verrouillages en membrane et augmenter l'efficacité en temps de calcul, la méthode des champs assumés pour résoudre les blocages en cisaillement transverse et par ailleurs la méthode des champs enrichis (EAS) pour éliminer les verrouillages liés au pincement.

2 Formulation variationnelle

La formulation faible de l'élément est basée sur la formulation à trois champs de Hu-Washizu où les déplacements, contraintes et déformations sont traités indépendamment. Le neuvième nœud de cet élément a été introduit dans le but d'enrichir la formulation pour notamment éviter les problèmes de verrouillages et améliorer la réponse de l'élément fini. Le formalisme s'apparente à la méthode "Enhanced Assumed Strain" (EAS) initialement proposée par Simo [3] mais cependant avec une légère différence

que nous allons voir par la suite. Le champ de déformation du SB9 peut alors s'écrire comme suit :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^\alpha$$

Où $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est le champ de déformation enrichie, $\boldsymbol{\varepsilon}$ la déformation réelle et $\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha$ l'enrichissement de déformation. Il est alors possible d'écrire la formulation variationnelle à trois champs de la façon suivante :

$$\delta\pi^{HW}(\mathbf{d}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_V \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T : \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV + \delta \int_V \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T : (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV - \delta\pi^{ext}$$

Où $\boldsymbol{\sigma}$ est la contrainte évaluée par la loi de comportement et $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ la contrainte postulée. L'hypothèse clé de la méthode d'enrichissement de Simo et Rifai est d'assumer une condition d'orthogonalité entre la contrainte postulée et l'enrichissement de déformation, de sorte à avoir :

$$\delta \int_V \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T : (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV = 0 \quad (1)$$

Dans le cas du SB9 on fait un postulat supplémentaire qui est de dire que la condition précédente est vérifiée si aucun chargement de pression de pincement n'est appliqué à l'élément. Néanmoins si un chargement de pression de pincement est appliqué, cette pression implique une contrainte de pincement linéaire dans l'épaisseur de l'élément. Ainsi, si on appelle p_i et p_s respectivement deux pressions appliquées sur les faces inférieure et supérieure de l'élément, la contrainte postulée s'écrit comme suit :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{33} = -\frac{1}{2}(1 - \zeta)p_i - \frac{1}{2}(1 + \zeta)p_s$$

de sorte que l'équation 1 se réévalue ainsi :

$$\delta \int_V \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T : (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV = \int_V \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{33} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{33}^\alpha dV$$

On enrichi ainsi la contrainte de pincement ce qui réduit considérablement le verrouillage en pincement.

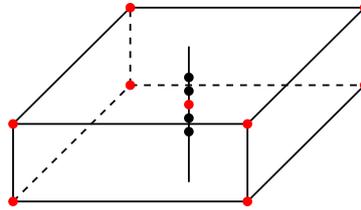


FIGURE 1 – Le SB9 et son schéma d'intégration

3 Champs assumés

La méthode des champs assumés de cisaillement consiste à interpoler les déformations de cisaillement à partir de la déformation calculée au milieu de chaque face afin d'éviter le phénomène de blocage en cisaillement transverse. Si on considère A, B, C et D les points milieux des quatre faces transversales au plan moyen de l'élément, voir figure 3. Sur chacun de ces points on calcule la déformation de cisaillement transverse correspondante, puis on fait une interpolation sur tout l'élément. Ainsi la nouvelle déformation de cisaillement transverse, dans la base covariante, s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\xi\zeta} &= \frac{1}{2}(1 - \eta)\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi\zeta}^A + \frac{1}{2}(1 + \eta)\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi\zeta}^C \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\xi\zeta} &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\boldsymbol{\varepsilon}_{\eta\zeta}^B + \frac{1}{2}(1 + \xi)\boldsymbol{\varepsilon}_{\eta\zeta}^D \end{aligned}$$

Cette technique d'interpolation initialement proposée par Bathe et Dvorkin [4] permet d'éliminer les verrouillages en cisaillement transverse.

4 Stabilisation

La méthode d'intégration réduite de l'élément SB9 fournit des gains en temps de calcul et réduit un certain nombre de verrouillage. Cependant, celle-ci introduit malheureusement des modes parasites associés à une énergie nulle (modes de Hourglass ou de sablier). En somme c'est une déficience de la matrice de rigidité, due à un "élargissement" du noyau de cette dernière. Il est alors impératif de compenser cette déficience en ajoutant à la rigidité une rigidité de stabilisation. Le noyau de la rigidité après stabilisation, doit se réduire aux seuls modes correspondants aux mouvements de solides rigides. Le choix des termes de stabilisation est fait en se basant sur la méthode de décomposition de Taylor proposée par Schwarz et Reese [5]. Cette dernière permet alors d'identifier clairement les modes sabliers à stabiliser pour garantir une matrice de rigidité correcte, c'est à dire inversible après élimination des mouvements de corps rigides.

5 Exemples numériques

5.1 Test linéaire : plaque circulaire encadrée

On montre ici un cas test principalement utilisé pour évaluer la bonne flexibilité de l'élément fini mais aussi la contrainte de pincement due à l'application d'un chargement de pression normale. La plaque considérée est encadrée sur son bord circulaire et un chargement de pression lui est appliquée à sa face inférieure. Les caractéristiques géométriques et matérielles sont consignées dans le tableau 1. Pour alléger les calculs (symétrie aidant), seul un quart de la plaque est maillé avec des éléments SB9, la figure 2 étant obtenue par réflexion. Le déplacement du centre de la plaque U_{c3} est ensuite relevé et comparé au déplacement théorique obtenue avec la théorie des plaques de Reissner-Mindlin : 1.005 Ce cas test

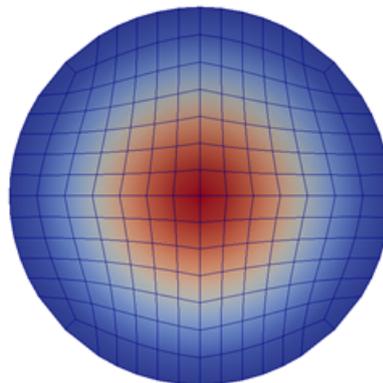


FIGURE 2 – Maillage de la plaque obtenu par double réflexion du quart de cercle

TABLE 1 – Caractéristiques géométriques et matérielles de la plaque

Rayon	R	100
Epaisseur	t	1
Module d'Young	E	2×10^5
Coefficient de poisson	ν	0.3
Charge appliquée	P	0.01172

montre l'intérêt de l'enrichissement de la déformation. Les résultats en déplacement (voir tableau 2) sont très corrects (0.25% d'erreur) avec ce maillage. Par ailleurs l'admissibilité statique $[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} = -p$ est parfaitement vérifiée ; où $\boldsymbol{\sigma}$ est le champ de contrainte, \mathbf{n} la normale à la face et p la pression appliquée.

TABLE 2 – Résultats en déplacements et contraintes

Paramètres	valeurs
U_{cz}	0.9975
σ_z face haut	0
σ_z face bas	-0.01172

5.2 Test non linéaire : poutre en flexion

Dans cet exemple on étudie la flexion hors plan d'une poutre encastrée. La poutre a une longueur $L = 10mm$ et une section rectangulaire de largeur $B = 1mm$ et d'épaisseur $T = 0.1mm$. Les données matériaux sont module de Young $E = 10^7 N/mm$ et le coefficient de poisson $\nu = 0.3$. On applique une force totale $F = \lambda F_0$ ($F_0 = 40N$ et λ facteur de charge) sur l'autre bout libre de la poutre pour la fléchir. La charge totale est incrémentée sur 10 pas de charge. Le déplacement vertical mesuré par Parish [6] et que nous utilisons comme référence est $U_{3ref} = 7.083mm$. La poutre est discrétisée par un élément sur son épaisseur et sa largeur et 16 éléments sur sa longueur (voir figure 4). La déformation solution obtenue

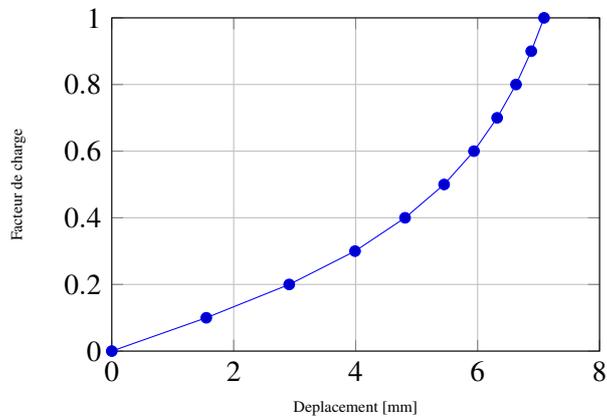


FIGURE 3 – Allure de l'incrément de charge par rapport au déplacement transversal

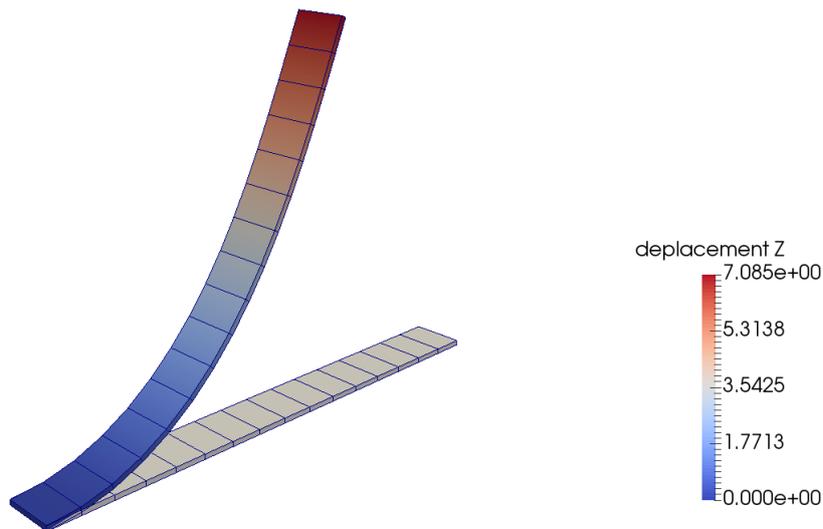


FIGURE 4 – Poutre en flexion : maillage

avec l'élément SB9 (voir figures 3) est $U_3 = 7.085mm$ soit une marge d'erreur absolue de 0.002, ce qui est très satisfaisant. Ce résultat montre la capacité de cet élément solide/coque à reproduire correctement le comportement de flexion des structures minces.

5.3 Conclusion

Dans ce travail nous proposons un nouvel élément fini solide/coque enrichi, pour la simulation des problèmes de structures minces et moyennement épaisses. Cet élément fonctionne avec une loi de comportement purement tridimensionnelle, donc sans hypothèse des contraintes planes. En combinant la technique d'intégration réduite, la méthode des champs assumés de cisaillement transverse et par ailleurs l'enrichissement des champs, le SB9 donne des résultats très satisfaisant comparables à ceux des éléments Shell classiques, dans la modélisation des structures minces. De plus, à la différence des éléments Shell classiques, le SB9 donne un champ de contrainte tridimensionnelle et fonctionne avec des lois de comportement tridimensionnelles linéaires ou non linéaires. Ce qui rend cet élément très attractif pour un grand nombre d'applications industrielles.

5.4 Références bibliographiques

Références

- [1] Bassa Bruno, Brunet Michel and Sabourin Francis *A new nine-node solid-shell finite element using complete 3D constitutive laws*, International journal for numerical methods in engineering, Wiley Online Library, 589-636, 2012.
- [2] Brunet Michel, Sabourin Francis and Sansalone Mickael *A new shell formulation using complete 3D constitutive laws*, International journal for numerical methods in engineering, Wiley Online Library, 688-716, 2011.
- [3] Rifai MS and Simo Juan C *class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*, International journal for numerical methods in engineering, Wiley Online Library, 1595-1638, 1990.
- [4] Bathe Klaus-Jürgen and Dvorkin Eduardo N *A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis*, Engineering computations, MCB UP Ltd, 77-88, 1984.
- [5] Reese Stefanie and Schwarze Marco *A reduced integration solid-shell finite element based on the EAS and the ANS concept—Geometrically linear problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley Online Library, 1322-1355, 2009.
- [6] Parisch, H *A continuum-based shell theory for non-linear applications*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley Online Library, 1855-1883, 1995.
- [7] Electricité de France, *CodeAster*, Finite element code_aster, Structures and Thermomechanics Analysis for Studies and Research, Open source on www.code-aster.org, 1989–2018