

Conception de Structures micro-architecturées par optimisation topologique multi-échelle.

T. Djourachkovitch¹, N. Blal¹, N. Hamila¹, A. Gravouil¹

¹ Univ Lyon, INSA-Lyon, CNRS UMR5259, LaMCoS, F-69621, France.
{tristan.djourachkovitch,Nawfal.Blal,Nahiene.Hamila,Anthony.Gravouil}@insa-lyon.fr

Résumé — Ces travaux portent sur la conception de structures micro-architecturées à hautes performances par optimisation topologique multi-échelle. À l'échelle macroscopique, l'objectif est de maximiser la rigidité tout en minimisant la masse de la structure, tandis que, à l'échelle microscopique, l'objectif est de concevoir des cellules à comportement homogène prescrit tout en minimisant leur masse. Ces travaux sont basés sur l'hypothèse de séparabilité des échelles et utilisent des méthodes d'homogénéisation. La structure est optimisée sur ces deux échelles, ce qui entraîne une réduction significative de la masse.

Mots clés — Optimisation topologique, Matériaux micro-architecturés, Homogénéisation.

1 Introduction

La conception de structures performantes consiste à optimiser certaines propriétés comme la masse ou la rigidité d'une structure en modifiant sa forme ou sa topologie au sein d'un domaine admissible. Il s'agit d'un sujet d'actualité et de nombreux travaux de recherche mais également d'application industrielles sont menés dans ce domaine. Le développement des techniques de fabrication additives rendent de plus en plus envisageable la conception de pièces mécaniques à topologie complexe et certaines applications concrètes ont déjà vu le jour grâce à ces procédés [5]. Les champs d'application de la conception optimisée sont vastes et en expansion, couvrant des domaines tels que la mécanique, la thermique, l'acoustique, etc.

Il existe diverses méthodes permettant de mettre en pratique la conception optimisée. Parmi les plus répandues, on trouve la méthode SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) [2] qui utilise une fonction de densité comme variable de design. L'évolution de la topologie au cours de la simulation est pilotée par cette fonction de densité qui vaut 1 dans les zones où on trouve de la matière et 0 ailleurs. Une autre méthode répandue consiste à représenter la topologie de manière implicite via une fonction de ligne de niveaux. Cette méthode va de paire avec la théorie de la dérivation de forme qui permet de déterminer une direction de perturbation qui minimise une fonction objectif. D'autres méthodes telles que la dérivation topologique basée, sur la formulation exacte de la dérivée d'une fonction coût suite à la nucléation d'une inclusion circulaire, ou la méthode MMC (Moving Morphable Components) ont montré leur capabilité dans le domaine de la conception optimisée.

La méthode utilisée pour ces travaux de recherche est celle des lignes de niveaux couplée à la dérivation de forme. L'objectif est de concevoir, dans un premier temps, des matériaux micro-architecturés périodiques consistant en une duplication d'un motif élémentaire dans toutes les directions de l'espace. Le tenseur d'élasticité homogène de ces matériaux est prescrit et la routine d'optimisation consiste à trouver une topologie qui assure ces spécification tout en minimisant la masse. Dans un second temps, une optimisation de structure macroscopique visant à minimiser la masse tout en maximisant la rigidité est menée en considérant que la structure est fabriquée à partir d'un matériau micro-architecturé obtenu dans la première étape. Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'optimisation topologique multi-échelle [7].

2 Formulation

L'objectif de ce travail est de concevoir des structures à hautes performances mécaniques en utilisant des matériaux micro-architecturés avec tenseur d'élasticité homogène prescrit. L'approche classique concernant l'étude des matériaux micro-architecturés est de considérer plusieurs échelles pour la structure. En chaque point de la macrostructure est associée une micro-architecture dont la longueur caractéristique est négligeable devant les dimensions de la structure comme illustré Figure 1.

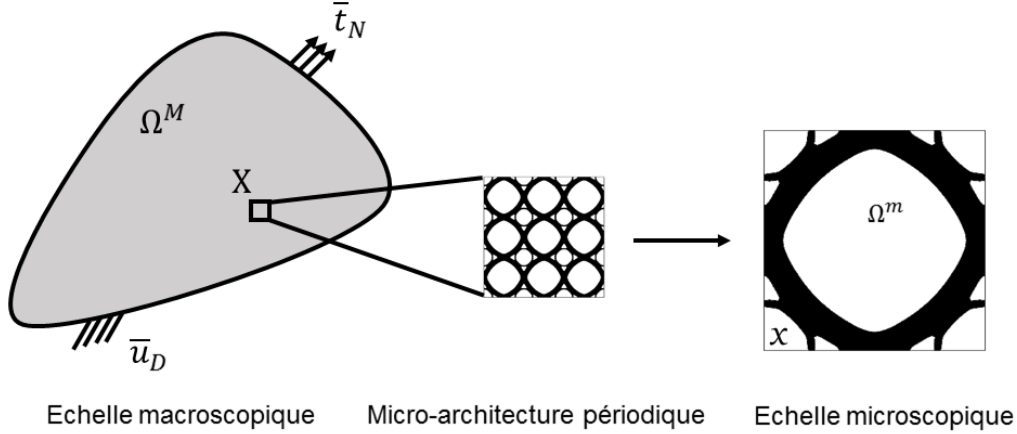


FIGURE 1 – Structure élastique à micro-architectures.

A l'échelle microscopique, la cellule élémentaire présente une phase solide et une phase vide. C'est sa topologie qui guide le comportement homogène équivalent qui sera optimisé.

2.1 Etude multi-échelle

Le cadre multi-échelle de ces travaux est basé sur l'hypothèse de séparabilité des échelles en élasticité linéaire. La solution du problème complet à deux échelles peut être divisé en deux sous problèmes par un développement asymptotique au premier ordre. Les deux sous problèmes étant le problème macroscopique et le problème microscopique. A l'échelle macro, le matériau est considéré uniforme et homogène, les hétérogénéités sont introduites à l'échelle micro.

2.1.1 Equations d'état du problème macroscopique

Soit Ω^M un ouvert de \mathbf{R}^3 qui désigne le volume de la macro structure (voir Figure 1). Les équations d'états en élasticité linéaire à l'échelle macroscopique s'écrivent (sans efforts volumiques) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{0}}} \\ \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{n}}} = \underline{\underline{\underline{\bar{t}}}}_N \quad \forall \underline{\underline{\underline{X}}} \in \Gamma_N \\ \underline{\underline{\underline{u}}} = \underline{\underline{\underline{\bar{u}}}}_D \quad \forall \underline{\underline{\underline{X}}} \in \Gamma_D \\ \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \nabla^s \underline{\underline{\underline{u}}} \\ \underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{C}}^M} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \end{array} \right.$$

Où la notation $\underline{\underline{\underline{\bullet}}}$ désigne une grandeur macroscopique, $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$, resp. $\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ désignent le champ de contrainte, resp. déformation au point $\underline{\underline{\underline{X}}}$ de la macro structure. Les efforts extérieurs de traction sur le bord de Neumann Γ_N sont désignés par $\underline{\underline{\underline{\bar{t}}}}_N$ et les déplacements prescrits sur les bords de Dirichlet Γ_D sont désignés par $\underline{\underline{\underline{\bar{u}}}}_D$. Le tenseur d'élasticité macroscopique (ou homogénéisé) utilisé pour la loi de comportement est désigné par $\underline{\underline{\underline{C}}^M}$.

2.1.2 Equations d'état du problème microscopique

Soit Ω^m un ouvert de \mathbf{R}^3 qui désigne le volume de la micro structure (voir Figure 1). Les équations d'états en élasticité linéaire à l'échelle microscopique s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla^s \underline{\underline{u}} \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \text{Conditions limites appropriées} \end{array} \right. \quad (1)$$

Où $\underline{\underline{\sigma}}$, resp. $\underline{\underline{\varepsilon}}$ désignent le champ de contrainte, resp. déformation local au point \underline{x} de la micro structure.

2.1.3 Homogénéisation

Afin de résoudre le problème microscopique, des conditions limites appropriées sur le bords Γ^m de la cellule élémentaire sont requises. Dans le cadre de l'homogénéisation, les champs locaux fluctuent autour de leur valeur moyenne du fait des hétérogénéités [6]. Le champs local de déplacement s'écrit alors :

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\bar{u}}} + \underline{\underline{\tilde{u}}}$$

Où $\underline{\underline{u}}$ est le champs de déplacement local et $\underline{\underline{\tilde{u}}}$ est la contribution périodique due aux hétérogénéités. Le champs de déformation peut alors aussi être vu comme la somme d'une contribution macroscopique $\underline{\underline{\bar{\varepsilon}}}$ et d'une contribution fluctuante $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\bar{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} \quad (2)$$

Comme le champs $\underline{\underline{\tilde{u}}}$ est considéré périodique, des conditions limites en périodicité sont utilisées pour résoudre l'équation (1) :

$$\underline{\underline{u}}^+ - \underline{\underline{u}}^- = \underline{\underline{\bar{\varepsilon}}} \cdot (\underline{\underline{x}}^+ - \underline{\underline{x}}^-) \quad \forall \underline{\underline{x}}^+ \in \Gamma_+^m, \forall \underline{\underline{x}}^- \in \Gamma_-^m \quad (3)$$

Où Γ_+^m et Γ_-^m représentent les bords opposés de la cellule élémentaire telles que les normales extérieures vérifient $\underline{\underline{n}}_+ = -\underline{\underline{n}}_-$ aux points opposés correspondants de Γ_+^m et Γ_-^m .

Afin d'évaluer le tenseur d'élasticité homogène de la cellule, certains modes de déformations macroscopiques $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(kl)}$ sont imposés [8]. Ces modes de déformation s'écrivent :

$$\underline{\underline{\bar{\varepsilon}}}^{(kl)} = \frac{\underline{\underline{e}}_k \otimes \underline{\underline{e}}_l + \underline{\underline{e}}_l \otimes \underline{\underline{e}}_k}{2}$$

Où les vecteurs $(\underline{\underline{e}}_i)_{i=1..3}$ engendrent l'espace Euclidien de \mathbf{R}^3 . Les indices (kl) , $(k, l \in \{1, 2, 3\})$ signifient que les composantes kl du champs de déformation macroscopique sont activés et les autres composantes sont nulles.

Ces modes de déformation macroscopique sont de moyenne unitaire à l'échelle local d'après l'équation (2) car le champs $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$ est de moyenne nul sur la cellule (car c'est un champs fluctuant). La loi de comportement homogénéisée s'écrit alors, pour chaque mode de déformation imposé :

$$\underline{\underline{\bar{\sigma}}}^{(kl)} = \underline{\underline{C}}^M : \underline{\underline{\bar{\varepsilon}}}^{(kl)}$$

L'utilisation du lemme de Hill permet alors d'écrire :

$$C_{ijkl}^M = \left\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{(ij)} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(kl)} \right\rangle$$

Où $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(kl)}$ est le champs de déformation local sur la cellule élémentaire obtenu lorsque qu'un champs de déformation macroscopique $\underline{\underline{\bar{\varepsilon}}}^{(kl)}$ est imposé via les conditions limites en périodicité par l'équation (3).

3 Outils de résolution

L'objectif du procédé d'optimisation présenté ci-dessous est de réduire la masse de la structure tout en conservant de bonnes propriétés mécaniques, à la fois à l'échelle macro et micro.

3.1 Fonctions objectif

L'optimisation macroscopique : Soit D^M un ouvert de \mathbf{R}^3 représentant le domaine de la simulation (ou domaine admissible). Soit Ω^M un sous ensemble de D^M représentant la phase solide (i.e : la topologie de la structure). Le matériau utilisé a un tenseur d'élasticité homogène fixé et l'objectif est de maximiser la rigidité (i.e : minimiser la souplesse) de la structure en minimisant sa masse (i.e : le volume de phase solide). La fonction objectif s'écrit alors [1] :

$$J^M(\Omega^M) = \int_{\Gamma^N} \bar{l}_N \cdot \underline{u} dS + \beta \int_{\Omega^M} d\Omega^M \quad (4)$$

Où $\beta [kg.m^{-1}.s^{-2}] \in R^+$ est un facteur d'échelle qui assure l'homogénéité de la fonction objectif (4) et fixe le compromis entre les deux critères d'optimisation.

L'optimisation microscopique : Soit D^m un ouvert de \mathbf{R}^3 représentant le domaine admissible de la cellule élémentaire. Soit Ω^m un sous ensemble de D^m représentant la phase solide. L'objectif est de minimiser l'erreur au sens des moindres carrés entre les composantes homogénéisées et les composantes prescrites du tenseur d'élasticité de la cellule, ainsi que de minimiser sa masse. La fonction objectif s'écrit alors :

$$J^m(\Omega^m) = (1 - \alpha) \sum_{ijkl} \eta_{ijkl} (C_{ijkl}^M - C_{ijkl}^P)^2 + \alpha \times \beta \int_{\Omega^m} d\Omega^m \quad (5)$$

Le premier terme de la fonction objectif (5) est la somme des erreurs au sens des moindres carrés entre les composantes $(ijkl)$ homogénéisées C_{ijkl}^M et les composantes prescrites C_{ijkl}^P du tenseur d'élasticité de la cellule élémentaire. Le paramètre sans unité η_{ijkl} fixe le poids donné à chacune de ces composantes. Le second terme, quant à lui, représente la masse de la cellule. Le paramètre β est défini de manière identique à l'équation (4). Enfin, le paramètre $\alpha \in [0, 1]$ est un facteur sans unité qui renforce l'un des deux critères d'optimisation.

3.2 Dérivation de forme

Afin de minimiser les fonction objectifs J^M et J^m définies par (4,5), la méthode de la dérivation de forme est appliquée. Cet outil de minimisation est valable aux deux échelles et la distinction ne sera plus faite par la suite.

Soit T_t un difféomorphisme traduisant une variation du domaine Ω tel que Ω_t décrive le domaine déformé la perturbation T_t [11] comme illustré Figure 2 :

$$\Omega_t = \{T_t(\underline{X}), \underline{X} \in \Omega\}$$

La vitesse Eulerienne de la perturbation est alors définie par :

$$\underline{V}(\underline{x}(t), t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}(\underline{X}, t) \quad (6)$$

Où \underline{X} décrit le domaine non perturbé Ω et $\underline{x}(\underline{X}, t)$ décrit le domaine Ω_t déformé par T_t .

La famille de perturbation considéré est construite comme suit :

$$\underline{x}(\underline{X}, t) = T_t(\underline{X}) + t \times \underline{V}(\underline{X}, 0)$$

La dérivation de forme de la fonction objectif $J(\Omega)$ peut alors s'écrire :

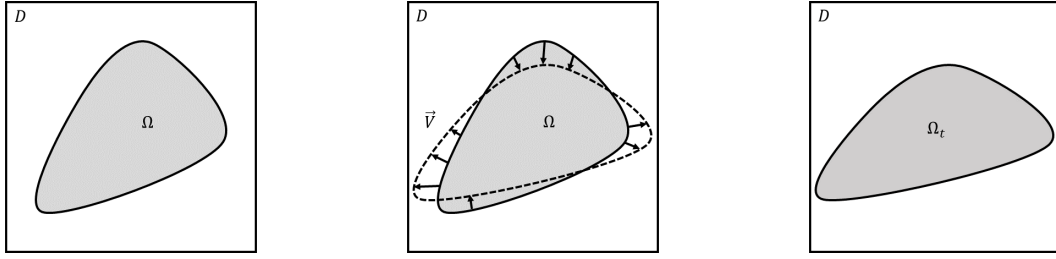


FIGURE 2 – Evolution du sous ensemble Ω de D sous l'effet d'une perturbation T_t .

$$DJ(\Omega) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [J(\Omega_t) - J(\Omega)]$$

Cette méthode couplée à l'approche de la recherche du point selle permet d'exprimer la dérivée de forme de la fonction objectif en fonction de la vitesse Eulerienne de perturbation. Ainsi, un choix judicieux de cette vitesse permet d'assurer que le signe de DJ soit négatif et ainsi, de minimiser la fonction objectif [3].

3.3 Lignes de niveaux

Afin de représenter le domaine Ω la méthode des lignes de niveaux est utilisée. Cette méthode à l'avantage de définir implicitement les bornes du domaine Ω au sein du domaine D via l'iso-zéro. Cette représentation implicite permet de déterminer simplement la topologie Ω sur un maillage fixe et ne nécessite pas de technique dites "d'interface tracking" qui peuvent être coûteuses en temps de calcul. La fonction ligne de niveaux ψ est définie par :

$$\begin{cases} \psi(\underline{x}, t) > 0 & \forall \underline{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \psi(\underline{x}, t) < 0 & \forall \underline{x} \in D \setminus \Omega \\ \psi(\underline{x}, t) = 0 & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

Où $\partial\Omega$ représente les limites du domaine Ω soit l'interface vide/matière qui sont définies implicitement par l'iso-zéro. Il est usuel de définir la fonction ψ comme la distance signée à l'interface (voir Figure 3) ce qui implique une identification efficace des propriétés géométriques du domaine D telles que l'iso-zéro, les longueurs, les courbures ou les normales [10, 9].

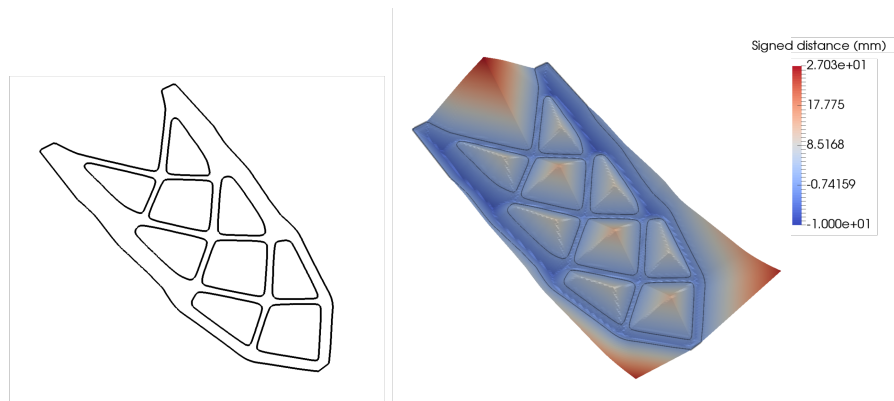


FIGURE 3 – Illustration d'une topologie (gauche) et de la fonction ligne de niveaux définie comme une distance signée associée (droite).

La fonction ψ est mise à jour itérativement au cours de la simulation via une équation d'Hamilton jacobi faisant intervenir un temps fictif :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(\underline{x}, t) + V(\underline{x}, t) \|\nabla \psi(\underline{x}, t)\| = 0 \quad (7)$$

La fonction V utilisée dans l'équation (7) est celle définie par l'équation (6) et obtenue par dérivation de forme, ce qui permet de faire évoluer la forme tout en minimisant la fonction objectif. Cette technique d'optimisation de forme est couplée à un critère énergétique d'apparition de nouveaux trous (i.e : variation de la topologie) ce qui conduit à un procédé d'optimisation topologique.

4 Exemple d'application

Dans cette section, un exemple d'application est donné afin de d'illustrer la capabilité de la méthode d'optimisation utilisée. Cet exemple porte, dans un premier temps, sur l'optimisation d'un matériau architecturé à comportement effectif prescrit. Dans un second temps, un exemple d'optimisation de structure, utilisant le matériau optimisé au préalable, est présenté.

4.1 Matériaux micro-architecturés

Pour l'exemple d'optimisation de matériau architecturé qui suit, la topologie de départ consiste en une cellule carré de dimension $1 \times 1 \text{ mm}^2$ pleine de matériau. Son comportement effectif est alors équivalent à celui du matériau utilisé : isotrope avec un module de Young arbitraire $E = 1 \text{ MPa}$ et un module de Poisson $\nu = 0.5$. La cellule est discrétisée par éléments finis via un maillage de dimension 80×80 d'éléments carrés P1. Le comportement prescrit (l'objectif à atteindre) est le suivant :

$$\underline{\underline{C}}^P = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.00 \\ 0.10 & 0.15 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Il s'agit d'un comportement original car le coefficient de poisson serait de 0.67, ce qui est supérieur à la limite théorique des matériaux isotropes. L'évolution de la topologie au cours du procédé d'optimisation est illustré Figure 4

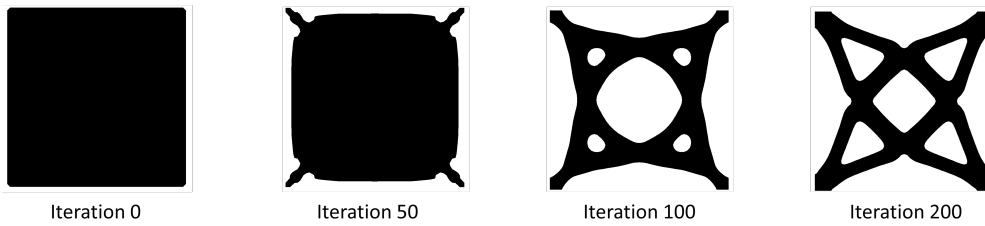


FIGURE 4 – Evolution de la topologie de la cellule élémentaire au cours du procédé d'optimisation.

Une fois la routine d'optimisation convergée, la fraction volumique de matière de la cellule est de 39% et son comportement effectif vaut :

$$\underline{\underline{C}}^P = \begin{bmatrix} 0.147 & 0.094 & 0.000 \\ 0.094 & 0.147 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.102 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

L'évolution de la fonction objectif au cours de la simulation est illustrée Figure 5.

4.2 Structures à micro-architectures

Pour l'exemple d'optimisation de structure avec matériau architecturé, la topologie de départ consiste en un domaine de dimension $20 \times 10 \text{ mm}^2$ pleine de matériau architecturé dont le comportement effectif est celui de l'exemple précédent. Le domaine est discrétisé via un maillage éléments finis 200×100 d'éléments carrés P1. Les conditions limites sont illustrées Figure 6.

L'évolution de la fonction objectif ainsi que la topologie optimisée sont illustrées respectivement Figure 7 et 8

La fraction volumique de la topologie optimisée est de 35% à l'échelle macroscopique. En considérant que la fraction volumique du matériaux utilisé est de 39%, il vient une fraction volumique de la structure micro-architecturée de 13.7%.

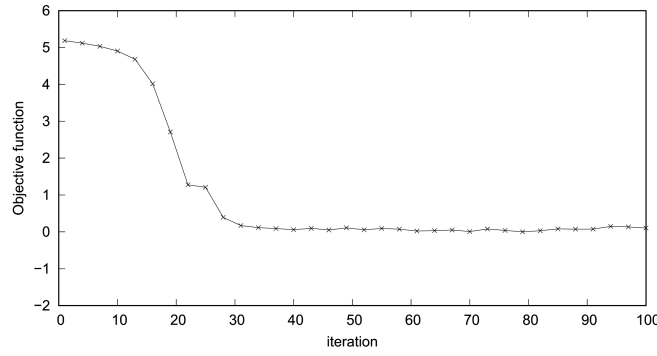


FIGURE 5 – Evolution de la fonction objectif de la cellule optimisée au cours du procédé d’optimisation.

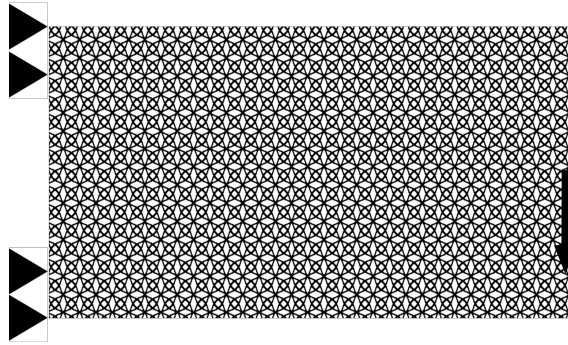


FIGURE 6 – Définition du problème d’optimisation multi-échelle.

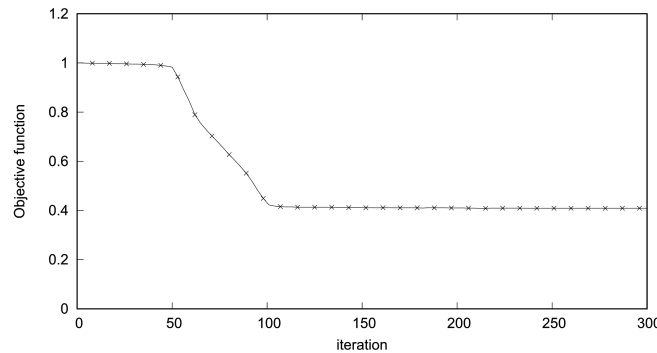


FIGURE 7 – Evolution de la fonction objectif du problème multi-échelle au cours du procédé d’optimisation.

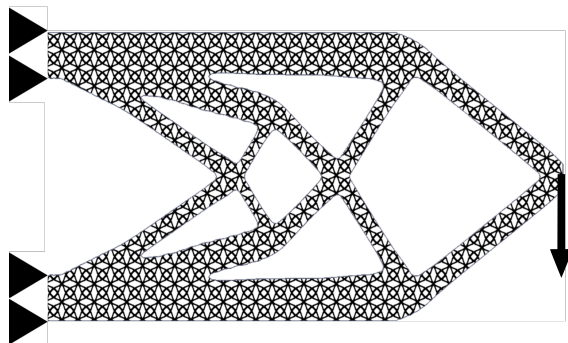


FIGURE 8 – Topologie optimisée du problème multi-échelle.

5 Conclusion

Ces travaux proposent une méthode de conception optimisée à deux échelles pour des matériaux micro-architecturés utilisés a posteriori dans des structures macroscopiques. Basée sur la méthode des lignes

de niveaux couplée à la théorie de la dérivation de forme, un critère d'appartition de nouveaux trous a été ajouté à la formulation afin de pouvoir faire varier la topologie au cours du procédé d'optimisation. Cependant, le choix de la topologie initiale reste impactant, notamment pour l'optimisation à l'échelle microscopique où il n'y a, à priori, pas unicité de la solution. La topologie à l'échelle microscopique est considérée comme "optimisée" si tôt que l'erreur relative entre le tenseur d'élasticité prescrit et le tenseur homogénéisé est suffisamment petite. Pour deux topologies respectant ces conditions, la masse devient le critère de sélection.

La méthode a été illustrée à l'échelle microscopique à travers un exemple original : un matériau à haut module de Poisson. Ce matériau est ensuite utilisé pour optimiser une structure à l'échelle macroscopique.

La fabricabilité de telles structures micro-architecturées est un enjeu de taille et des travaux sont en cours afin de mettre en relation les procédés d'optimisation multi-échelle et la fabrication additive [4].

Références

- [1] G. Allaire, F. Jouve, A.-M. Toader. *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, Journal of computational physics, 363-393, 2004.
- [2] M.-P. Bendsøe, O. Sigmund. *Topology optimization : Theory, Methods and Applications*, Springer, 2003.
- [3] J. Cea. *Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 371-402, 1986.
- [4] C. Dapogny, R. Estevez, A. Faure, G. Michailidis. *Shape and topology optimization considering anisotropic features induced by additive manufacturing processes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 626-665, 2019.
- [5] J. Favre, P. Lohmuller, B ; Piotrowski, S. Kenzari, P. Laheurte, F. Meraghni. *A continuous crystallographic approach to generate lattices and its effect on relative stiffness of architected materials*, Additive Manufacturing, 359-368, 2018.
- [6] V. Kouznetsova, M. Geers, W. Brekelmans. *Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1235-1260, 2002.
- [7] X. Liang, P. Breitkopf. *Concurrent topology optimization design of material and structure within FE2 non-linear multiscale analysis framework*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 524-542, 2014.
- [8] J.-C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet. *Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 109-143, 1999.
- [9] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao, M. Khang. *A pde-based fast local level set method*, Journal of computational physics, 410-438, 1999.
- [10] J.A. Sethian. *Level set methods, evolving interfaces in geometry, fluid mechanics computer vision, and material sciences*, Cambridge Monographs, 1996.
- [11] J. Sokolowski, J.-P. Zolesio. *Introduction to Shape Optimization*, Springer, 1992.