

# Une méthode Quasi-FE<sup>2</sup> pour la résolution de structures composites sans séparation d'échelles

M. V. Le<sup>1,2</sup>, J. Yvonnet<sup>1</sup>, N. Feld<sup>2</sup> et F. Detrez<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle,  
Université Paris-Est, MSME UMR 8208 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France,  
{minh-vuong.le, julien.yvonnet, fabrice.detrez}@u-pem.fr

<sup>2</sup> Safran Tech, Etablissement Paris Saclay, rue des Jeunes Bois-Châteaufort, 78114 Magny-les-Hameaux, France,  
{minh-vuong.le, nicolas.feld}@safrangroup.com

**Résumé** — Une nouvelle méthode multi échelle est proposée pour résoudre des problèmes linéaires de structures hétérogènes. Une solution approchée capable de capturer toutes les hétérogénéités est construite en combinant les solutions de problèmes aux limites sur des sous-domaines et un calcul de structure globale avec un maillage grossier. Des exemples numériques sur des structures académiques et des structures industrielles sont présentés dont un calcul allant jusqu'à 1,3 milliard de degrés de liberté.

**Mots clés** — décomposition de domaines, multi-échelle, composites.

## 1 Introduction

Les matériaux composites sont aujourd'hui une technologie majeure dans de nombreux domaines industriels. Avec les performances des architectures de calcul actuelles, les méthodes numériques jouent un rôle important dans la modélisation et simulation de ces matériaux. Dans certaines situations, il peut être utile d'étudier des parties de structures complètes incluant toutes les hétérogénéités, notamment dans des situations où les échelles sont faiblement séparées et où les méthodes classiques d'homogénéisation ne peuvent s'appliquer. Cependant, réaliser ce type de calcul est souvent extrêmement lourd voire infaisable lorsque des méthodes de simulation telles que la méthode des éléments finis est appliquée, au vu du nombre énorme de degrés de liberté mis en jeu. Pour contourner ce problème, les méthodes de décomposition de domaine ont été proposées dans la littérature (voir par exemple [1]). Ces approches sont pour la plupart basées sur des communications entre les sous-domaines par le biais des interfaces en utilisant des algorithmes itératifs. Malheureusement ces méthodes sont souvent mise en défaut dans le cas de structures hétérogènes, en raison des pré-conditionneurs difficiles à définir.

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode multi échelle ayant pour objectif de permettre le calcul de structures hétérogènes élastiques linéaires impliquant un très grand nombre de degrés de liberté. La méthode possède des similarités avec la méthode FE<sup>2</sup> [2] mais est basée sur la communication entre les éléments d'un maillage grossier et des sous-domaines maillés finement. Nous présentons des applications de la méthode Quasi-FE<sup>2</sup> sur des structures académiques simplifiées, puis sur des structures de types industrielles. Les résultats obtenus ont été validés sur des exemples de plus faibles tailles où une solution de référence par calcul complet pouvait être réalisée.

## 2 Principe de la méthode

L'idée principale de la méthode proposée [3] est de construire une approximation du problème considéré en combinant les solutions de problèmes locaux à l'échelle des sous-domaines et une solution à l'échelle de la structure, construite sur un maillage grossier (voir Figure 1).

### 2.1 Problème local

On décompose le champ de déformations microscopiques en trois parties comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overline{\nabla \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

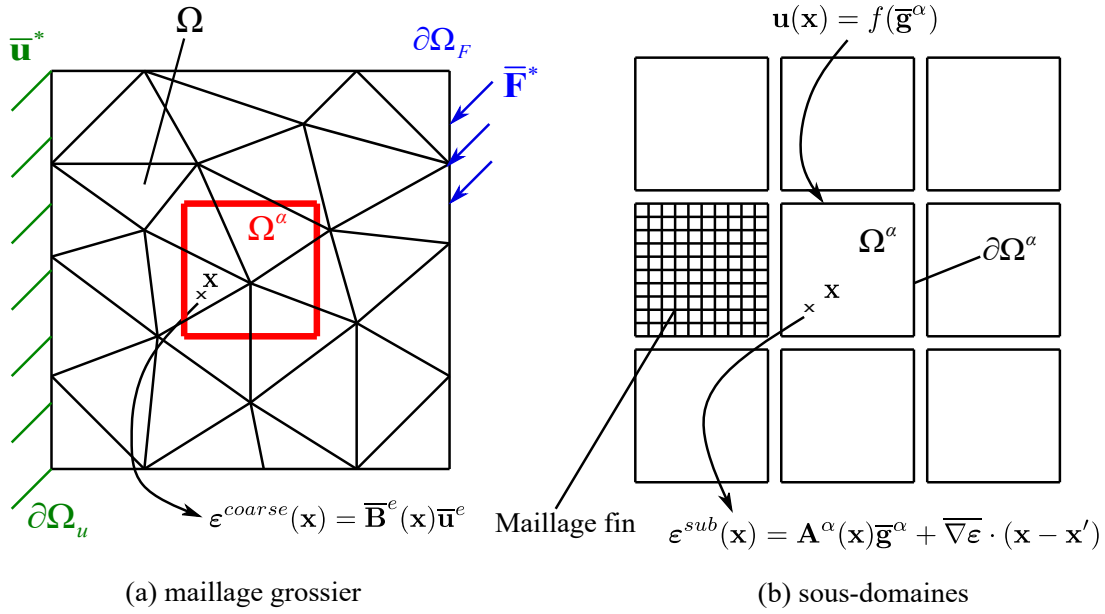


FIGURE 1 – Description schématique de la méthode proposée.

où  $\bar{\varepsilon}$  représente le tenseur des déformations macroscopique,  $\bar{\nabla}\varepsilon$  le gradient de déformation macroscopique et  $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x})$  la fluctuation restante. D'après le principe de superposition, on peut alors exprimer le champ de déformations microscopique en fonction des solutions des problèmes locaux sur des sous-domaines :

$$[\varepsilon(\mathbf{x})] = \mathbf{A}^\alpha(\mathbf{x}') \bar{\mathbf{g}}^\alpha + \bar{\nabla}\varepsilon \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^\alpha. \quad (2)$$

où  $\mathbf{A}^\alpha(\mathbf{x})$  est le tenseur de localisation associé à chaque sous-domaine,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sont les repères global et local du sous-domaine, respectivement.  $\bar{\mathbf{g}}^\alpha$  désigne le vecteur de modes réduits qui définit les conditions aux limites du problème local défini par exemple en 2D par :

$$\bar{\mathbf{g}}^\alpha = [\bar{\varepsilon}_{11}, \bar{\varepsilon}_{22}, \bar{\varepsilon}_{12}, \bar{\nabla}\varepsilon_{112}, \bar{\nabla}\varepsilon_{221}]^T. \quad (3)$$

On définit le problème local à résoudre dans chaque sous-domaine :

Étant donné  $\bar{\mathbf{g}}^\alpha = \{\bar{\varepsilon}, \bar{\nabla}\varepsilon\}$ , trouver  $\varepsilon(\mathbf{x})$  dans  $\Omega^\alpha$  tel que :

$$\nabla \cdot (\mathbb{C}(\mathbf{x}) : \varepsilon(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (4)$$

$$f_i(\mathbf{x}) = C_{ijkl}(\mathbf{x}) \bar{\nabla}\varepsilon_{klj}, \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\varepsilon}\mathbf{x} + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{A}} : \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \quad \text{sur } \partial\Omega^\alpha. \quad (6)$$

où  $\bar{\mathcal{A}}$  est le tenseur d'ordre 3 du second gradient de déplacement défini par :

$$\bar{\mathcal{A}}_{ijk} = \bar{\nabla}\varepsilon_{ijk} + \bar{\nabla}\varepsilon_{ikj} - \bar{\nabla}\varepsilon_{jki}. \quad (7)$$

## 2.2 Relation entre les déformations microscopiques et les déplacements macroscopiques

Afin de relier les solutions sur les sous-domaines au maillage grossier, on a besoin de déterminer une relation entre les déplacements macroscopiques  $\bar{\mathbf{u}}$  et les déformations microscopiques  $[\varepsilon(\mathbf{x})]$ . Pour

se faire, on minimise l'écart entre les champs de déformations macroscopiques et microscopiques sur chaque élément grossier défini comme suit :

$$J = \int_{\Omega^e} \left( \mathbf{A}^\alpha(\mathbf{x}') \bar{\mathbf{g}}^\alpha + \overline{\nabla \varepsilon} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \bar{\mathbf{B}}^e \bar{\mathbf{u}}^e \right)^2 d\Omega, \quad (8)$$

Minimiser  $J$  par rapport à  $\bar{\mathbf{g}}^\alpha$  donne :

$$[\varepsilon(\mathbf{x})] \simeq \mathbf{A}^\alpha(\mathbf{x}) [\mathbf{G}^\alpha]^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{H}^{\alpha e} \bar{\mathbf{u}}^e = \mathbf{M}^\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{H}^{\alpha e} \bar{\mathbf{u}}^e \quad (9)$$

où

$$\mathbf{G}^\alpha = \int_{\Omega^\alpha} (\mathbf{A}^\alpha(\mathbf{x}))^T \mathbf{A}^\alpha(\mathbf{x}) d\Omega, \quad (10)$$

et

$$\mathbf{H}^{\alpha e} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{A}^\alpha(\mathbf{x}))^T \bar{\mathbf{B}}^e(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (11)$$

## 2.3 Problème global

Maintenant, on considère le problème global à résoudre sur la structure. En supposant que les forces volumiques sont nulles, il est défini comme suit :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}^* & \forall \mathbf{x} \in \partial \bar{\Omega}_u, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{F}}^* & \forall \mathbf{x} \in \partial \bar{\Omega}_F, \end{cases} \quad (12)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \bar{\Omega}_u, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{F}}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \bar{\Omega}_F, \quad (14)$$

On a formulation faible du problème ci-dessus en utilisant la forme vectorielle du champ de déformations :

$$\int_{\Omega} [\varepsilon(\mathbf{u})]^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) [\varepsilon(\delta \mathbf{u})] d\Omega = \int_{\partial \Omega_F} \bar{\mathbf{F}}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma. \quad (15)$$

En substituant l'expression de la déformation en fonction du déplacement sur le maillage grossier (9) dans (15), on obtient :

$$\delta \bar{\mathbf{u}}^{eT} \int_{\Omega} (\mathbf{H}^{\alpha e})^T (\mathbf{M}^\alpha(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{M}^\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{H}^{\alpha e} d\Omega \bar{\mathbf{u}}^e = \delta \bar{\mathbf{u}}^{eT} \int_{\partial \Omega_F} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{F}}^* d\Gamma. \quad (16)$$

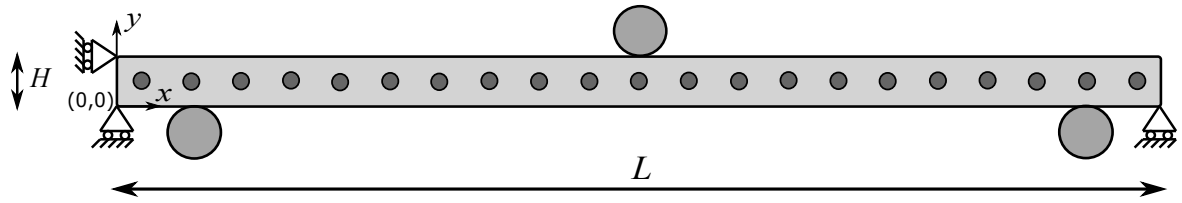
Une fois que  $\bar{\mathbf{u}}$  est calculé à partir du problème global, le champ local des déformations peut être reconstruit à partir de la relation (9), on en déduit le champ local des contraintes à partir de la loi de comportement locale :

$$[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})] = \mathbf{C}(\mathbf{x}) [\varepsilon(\mathbf{x})] = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{M}^\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{H}^{\alpha e} \bar{\mathbf{u}}^e. \quad (17)$$

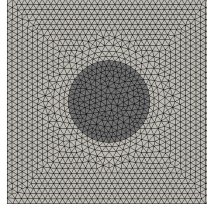
## 3 Exemples numériques

### 3.1 Flexion 3 points d'une poutre en 2D

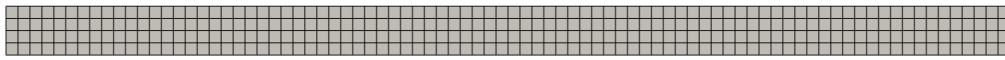
On considère une poutre soumise à une flexion 3 points (Figure 2a). Les dimensions de la poutre sont  $L = 21mm$  et  $H = 1mm$ . Chaque inclusion a un diamètre de 0,4 mm et est positionnée au centre d'un sous-domaine carré de taille  $H$  (voir Figure 2b). La matrice et l'inclusion sont considérées élastiques linéaires et isotropes, les paramètres élastiques sont résumés dans le Tableau 1. Afin d'éviter le problème de contact, le chargement est simplifié sous la forme de champs de pression paraboliques. Les résultats de la méthode proposée avec ou sans gradient sont comparés avec la solution de référence, obtenue à partir d'un calcul direct par éléments finis.



(a) Structure et conditions aux limites



(b) Maillage d'un sous-domaine

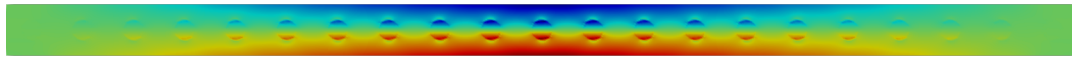


(c) Maillage grossier de la structure

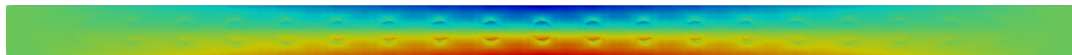
FIGURE 2 – (a) Structure et conditions aux limites de la poutre considérée (b) maillage d'un sous-domaine (c) maillage grossier de la structure entière.

TABLE 1 – Propriétés mécaniques des constituants de la poutre.

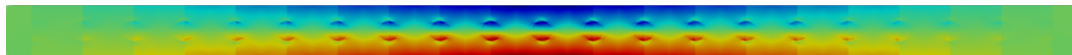
	Matrix	Inclusion
Module d'Young (MPa)	2,5	$2,5 \times 10^3$
Coefficient de Poisson	0,25	0,25



(a) Référence



(b) Méthode proposée



(c) Méthode avec gradient

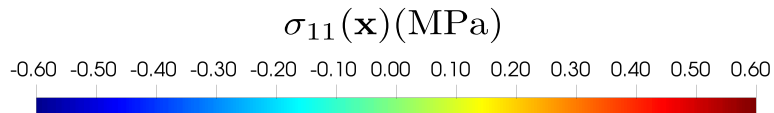


FIGURE 3 – Champs de contraintes relocalisées  $\sigma_{11}(\mathbf{x})$  (MPa).

Dans la Figure 3, on voit que la solution obtenue par la méthode proposée avec gradient de déformation est en bon accord avec la solution de référence, alors que le résultat de la méthode sans gradient est moins précis. C'est dû au fait que dans ce cas, les chargements du type de flexion sont compatibles avec les modes de gradient de déformations. Pour une visualisation plus quantitative, la Figure 4 montre l'évo-

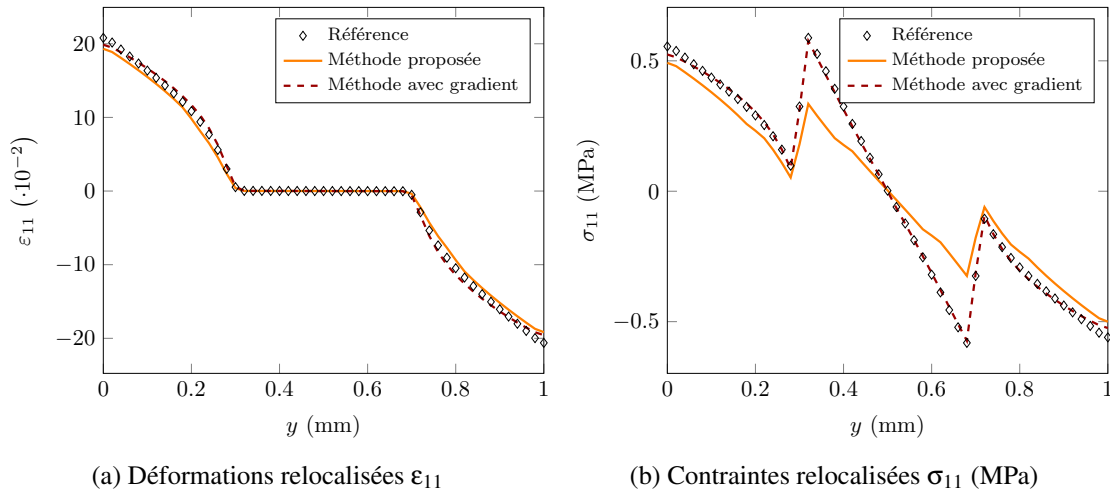


FIGURE 4 – Comparaison de la solution de référence, méthode proposée, et la méthode avec gradient de la composante 11 de la déformation et la contrainte suivant la ligne ( $x = L/2$ ).

lution de la première composante du tenseur de déformations et de contraintes suivant la ligne verticale au milieu de la poutre.

### 3.2 Simulation d'une structure contenant 1,3 milliard de degrés de liberté

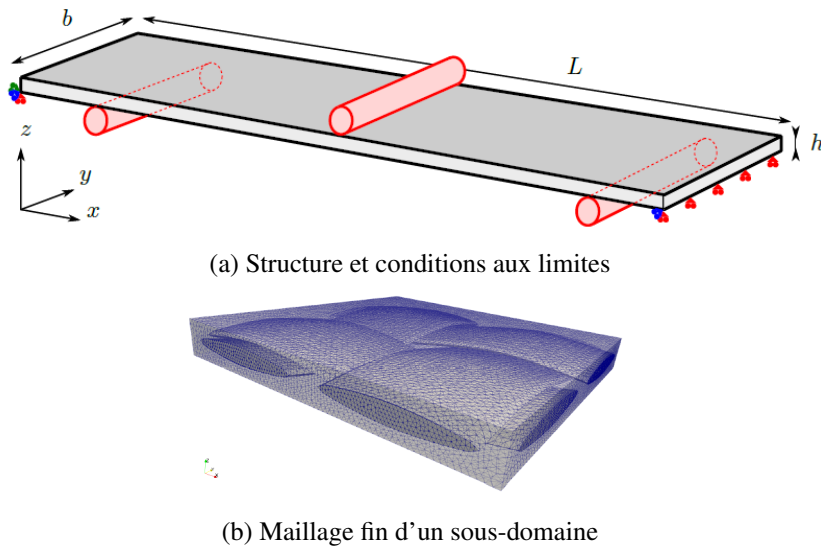


FIGURE 5 – Structure considérée et maillage d'un sous-domaine.

On considère maintenant une structure en composite tissé (Figure 5a), soumise à une flexion 3 points. Les dimensions de la structure sont  $L = 50$  mm,  $b = 10$  mm et  $h = 1.1$  mm. Le maillage fin d'un sous-domaine est décrit dans la Figure 5b. Chaque sous-domaine contient  $63 \times 10^6$  éléments tétraédriques linéaires, correspondant à  $37 \times 10^6$  degrés de libertés. La structure entière comprend 625 sous-domaines, correspondant à 1,3 milliard d'inconnues grossièrement. Comme l'exemple précédent, afin d'éviter le problème de contact, le chargement est simplifié sous la forme de champs de pression paraboliques.

Les champs relocalisés de déformations d'un bloc de matière au milieu de la structure sont montrés dans la Figure 6. En terme de temps de calcul, la simulation totale de la méthode proposée (problèmes locaux et global) coûte 5 jours, sur 32 cœurs, ce qui est très raisonnable en considérant la taille du problème.

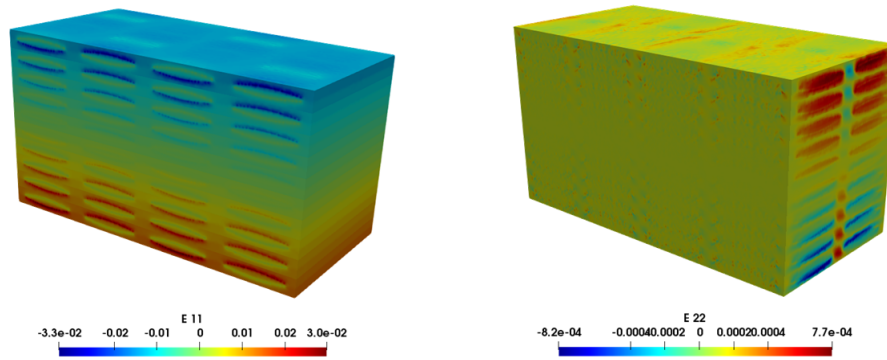


FIGURE 6 – Champ relocalisé :  $\varepsilon_{11}(\mathbf{x})$  (gauche) et  $\varepsilon_{22}(\mathbf{x})$  (droite) d’un bloc de matière au milieu de la structure.

## 4 Conclusions

La méthode proposée a été développée et testée sur des structures académiques simplifiées. Puis des tests sur des structures industrielles ont été menés. Un calcul 3D totalisant 1.3 milliard d’inconnues a été mené sur une station de calcul standard en environ cinq jours. Les résultats des tests numériques sont en bon accord avec la solution de référence, obtenue soit par un calcul direct, soit par un calcul de décomposition de domaines classique pour de grands problèmes industriels.

## Références

- [1] P. Gosselet and C. Rey. Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13(4) :515, 2006.
- [2] Frédéric Feyel. A multilevel finite element method (FE<sup>2</sup>) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30) :3233–3244, 2003.
- [3] M. V. Le, J. Yvonnet, N. Feld, and F. Detrez. A Quasi-FE<sup>2</sup> method : going beyond billion-degrees of freedom finite element simulations of heterogeneous structures. *Manuscript submitted for publication*, 2018.