

# Benchmark numérique pour intégrateurs explicites destinés à la dynamique d'impact

J. Di Stasio<sup>1,2</sup>, D. Dureisseix<sup>1</sup>, A. Gravouil<sup>1</sup>,  
T. Homolle<sup>2</sup>, G. Georges<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Univ Lyon, INSA-Lyon, CNRS UMR5259, LaMCoS, F-69621, France {jean.di-stasio,david.dureisseix,anthony.gravouil}@insa-lyon.fr

<sup>2</sup> Michelin, Centre de technologie de Ladoux, {thomas.homolle, gabriel.georges}@michelin.com

**Résumé** — Ce travail vise à établir un benchmark numérique pour les schémas d'intégration temporels explicites dédiés aux problèmes dynamiques non-linéaire avec impact. Ce benchmark est constitué de plusieurs cas tests, simples à implémenter et à analyser, dont quatre sont présentés ici. Chaque cas vise à tester une propriété numérique du schéma importante en dynamique non-linéaire avec impact : conservation de l'énergie à l'impact et en temps long, conservation du moment angulaire, capacité à surmonter des accumulations d'impacts... Certains schémas référents en dynamique d'impact seront testés à travers ce benchmark.

**Mots clés** — Dynamique des structures, Dynamique d'impact, Dynamique non-régulière, Intégrateurs explicites, Schémas symplectiques.

## 1 Introduction

### 1.1 La dynamique d'impact pour les milieux continus

Ce benchmark vise à fournir une première analyse de schémas d'intégration temporels explicites pour la dynamique d'impact non-linéaire. Chaque cas test explore une propriété numérique importante pour garantir la robustesse du schéma : conservation de l'énergie à l'impact et en temps long, conservation du moment angulaire, accumulation d'impacts sur un pas de temps, comportement vis-à-vis des hautes fréquences sur problèmes éléments finis... À la complexité de la dynamique non-linéaire s'ajoutent celles de l'impact : discontinuité en vitesse et événements potentiellement multiples dans un laps de temps court. La suite présente le cadre général de l'étude.

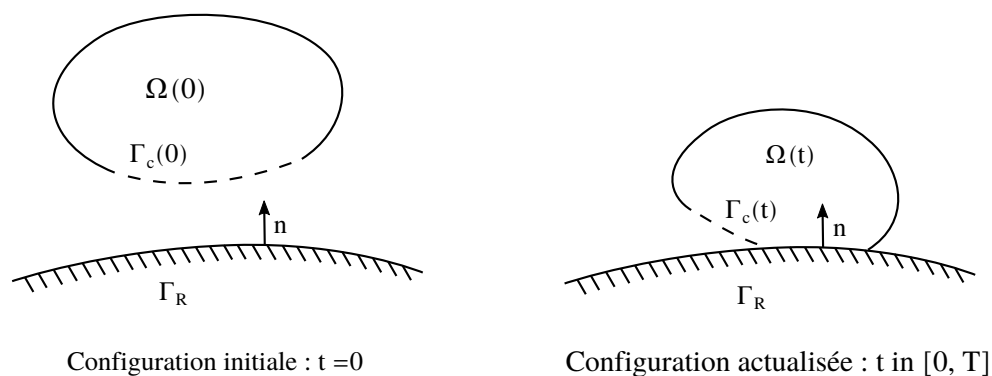


FIGURE 1 – Problème de référence

Un corps déformable  $\Omega$  est soumis à des chargements internes liés aux matériaux, et à des chargements externes. Pour simplifier, ce corps vient impacter une frontière rigide  $\Gamma_R$  et le contact est sans frottement et non-adhérent. Tous les points de contact potentiels se trouvent dans une partie  $\Gamma_c$  de la frontière de  $\Omega$ . La position d'un point de  $\Omega$  est notée  $\mathbf{x}$ , le déplacement et ses dérivées temporelles  $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$ . Pour décrire les conditions de contact, il est nécessaire d'introduire  $\mathbf{n}_\Omega$  la normale extérieure à  $\Gamma_c$  et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à  $\Gamma_R$  (pour un point où le contact est actif :  $\mathbf{n}_\Omega = -\mathbf{n}$ ). À un point  $\mathbf{x}$  de  $\Gamma_c$  est

associé  $\mathbf{x}_M$  point le plus proche sur  $\Gamma_R$ . Sur  $\Gamma_c$ , les efforts de contact sont notés  $\boldsymbol{\lambda}$  (le contact étant ici sans frottement, ces efforts sont dirigés selon  $\mathbf{n}_\Omega$ ).

Pour ce modèle de contact, le comportement au contact peut se résumer sous la forme des conditions dites de Hertz-Signorini-Moreau (HSM) :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_c, \quad 0 \leq g_N \perp \lambda_N \geq 0 \quad (1)$$

Avec  $g_N$  le gap ou distance normale entre un point  $\mathbf{x}$  de  $\Gamma_c$  et son plus proche voisin  $\mathbf{x}_M$  sur  $\Gamma_R$ , défini comme suit :  $g_N = (\mathbf{x}_M - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ .  $\lambda_N$  est l'effort de contact normal, défini par :  $\lambda_N = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}_\Omega$ . L'équation (1) impose la non-pénétration des deux corps en contact ( $g_N \geq 0$ ), et un effort de contact uniquement en compression ( $\lambda_N \geq 0$ ) non-nul seulement pour un gap nul (condition de complémentarité). La forme (1) des conditions HSM est écrite en utilisant la position (à travers le gap  $g_N$ ). Il est possible d'écrire ces conditions de manière équivalente en utilisant la vitesse, comme montré dans [10] :

$$\begin{array}{lll} \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c, & \text{Si } g_N = 0, & 0 \leq r_N \perp v_N \geq 0 \\ & \text{Sinon,} & r_N = 0 \end{array} \quad (2)$$

Deux nouvelles grandeurs sont nécessaires :  $v_N$  la vitesse normale selon  $\mathbf{n}$ , définie par :  $v_N = \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$  ; et l'impulsion normale de contact  $r_N$  correspondant à  $\lambda_N$ .

Pour modéliser la réponse du corps rigide, une loi d'impact (dite de Newton) est introduite :

$$\tilde{v}_N(t_i) = 0 \quad \text{avec } \tilde{v}_N(t_i) = v_N(t_i^+) + e_c v_N(t_i^-) \quad (3)$$

Cette loi relie les vitesses normales avant et après l'impact par un coefficient de restitution  $e_c \in [0; 1]$ . Elle permet de passer de manière continue d'un contact élastique ( $e_c = 1$ ), à un contact dit « plastique » ( $e_c = 0$ ). Elle peut être intégrée dans (2) en remplaçant  $v_N$  par la vitesse dite formelle  $\tilde{v}_N$ .

Le problème de référence ci-dessus peut être discrétisé en espace par la méthode des éléments finis. Cirak et West [4] proposent une approche variationnelle permettant d'obtenir un problème semi-discrét en espace pour la dynamique d'impact. Dans [6] les auteurs lient cette forme semi-discrète à la formulation introduite par Moreau dans [10] pour les milieux granulaires rigides. Il devient alors possible d'utiliser le formalisme développé par Moreau pour les impacts en milieux granulaires sur des problèmes milieux continus. L'écriture proposée dans [6] est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}d\dot{\mathbf{U}} &= (\mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{int}) dt + \mathbf{L}^t d\mathbf{r} \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \\ \left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } g_N^k = 0, & 0 \leq r_N^k \perp \tilde{v}_N^k \geq 0 \\ \text{Sinon } g_N^k > 0, & r_N^k = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les vecteurs  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}^{ext}$  et  $\mathbf{F}^{int}$  regroupent les grandeurs nodales :  $\mathbf{U}$  les déplacements nodaux,  $\mathbf{F}^{ext}$  les efforts externes, et  $\mathbf{F}^{int}$  les efforts matériaux. L'indice  $k$  indique que la grandeur est considérée au nœud  $k$ .  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse du système,  $\mathbf{L}$  est un opérateur de projection sur  $\Gamma_c$  selon  $\mathbf{n}$ . Son expression varie selon la méthode de projection choisie. Les nœuds de  $\Gamma_c$  sont notés  $\{1, \dots, p\}$ .  $d\mathbf{r}$  est une mesure de l'impulsion, et  $d\dot{\mathbf{U}}$  est une mesure de la vitesse définie comme suit :

$$d\dot{\mathbf{U}} = d\dot{\mathbf{U}}_s + d\dot{\mathbf{U}}_I \quad \text{avec} \quad d\dot{\mathbf{U}}_s = \begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}dt & \text{si } \ddot{\mathbf{U}} \text{ définie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad d\dot{\mathbf{U}}_I = \dot{\mathbf{U}}(t^+) - \dot{\mathbf{U}}(t^-)$$

Cette mesure permet de traiter à la fois les impacts ( $\ddot{\mathbf{U}}$  non-définie,  $d\dot{\mathbf{U}}_s$  nulle), et le cas régulier ( $\ddot{\mathbf{U}}$  définie, et  $d\dot{\mathbf{U}}_I$  nulle).

## 1.2 Les schémas d'intégration temporels

Les schémas d'intégration temporels sont un sujet central en dynamique des structures. Il existe une grande variété de schémas pour la dynamique avec contact. Selon [5], il est possible de les classifier en fonction de la méthode choisie pour satisfaire les conditions de contact. Les multiplicateurs de Lagrange

sont une de ces méthodes. Ils permettent de satisfaire exactement les conditions de contact, mais impliquent la résolution d'un problème implicite au contact. Pour des schémas en temps explicites, cette méthode est la plus précise et permet d'obtenir une formulation du contact énergétiquement consistante. Nous choisissons donc de nous focaliser sur les schémas utilisant des multiplicateurs de Lagrange. Dans la suite les schémas utilisent une des deux formes des conditions HSM (1) et (2) sous une forme discrète.

**Schéma de Carpenter.** Carpenter présente dans [2] un schéma explicite nommé « forward increment Lagrange multiplier ». Le schéma d'intégration temporel est celui de la différence centrée, et les conditions HSM discrètes sont considérées sur la position. Pour rendre compatible les multiplicateurs de Lagrange avec une formulation explicite, les forces de contact à l'instant  $t_n$  sont calculées pour que la position à  $t_{n+1}$  vérifie les conditions de contact. Ce schéma présente un problème implicite pour le contact, lié à l'opérateur de Delassus  $\mathbf{L}_{n+1}\mathbf{M}_{lump}^{-1}\mathbf{L}_{n+1}^t$ . Cet opérateur relie le gap aux contraintes de contact. Il est diagonal seulement pour des maillages conformes.

Avec les notations introduites précédemment, le schéma de Carpenter s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{n+1}^* &= h^2\mathbf{M}_{lump}^{-1}(\mathbf{F}_n^{ext} - \mathbf{F}_n^{int}) + 2\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_{n+1} = \mathbf{L}(\mathbf{U}_{n+1}^*), \quad \mathbf{g}_{N,n+1} = \mathbf{g}_N(\mathbf{U}_{n+1}^*) \\ \boldsymbol{\lambda}_n^* = -h^{-2} \left[ \mathbf{L}_{n+1}\mathbf{M}_{lump}^{-1}\mathbf{L}_{n+1}^t \right]^{-1} \mathbf{g}_{N,n+1} \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad \lambda_n^k = \begin{cases} \lambda_n^{*,k} & \text{if } \mathbf{g}_{N,n+1}^k \leq 0 \\ 0 & \text{if } \mathbf{g}_{N,n+1}^k > 0 \end{cases} \\ \mathbf{U}_{n+1}^c = h^2\mathbf{M}_{lump}^{-1}\mathbf{L}_{n+1}^t\boldsymbol{\lambda}_n^* \\ \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_{n+1}^* + \mathbf{U}_{n+1}^c \end{array} \right. \quad (4) \end{aligned}$$

**Schéma de Paoli-Schatzman.** Dans [13, 12], les auteurs proposent une modification du schéma de Carpenter pour prendre en compte la loi d'impact de Newton (3). Les conditions HSM discrètes sont toujours écrites sur la position, mais sont modifiées pour imposer une loi d'impact sur trois pas de temps. Ce schéma inclut le schéma de Carpenter pour  $e_c = 0$ .

Le schéma de Paoli-Schatzman est identique au schéma de Carpenter (4) sauf pour le calcul du gap, dont l'expression est :  $\mathbf{g}_{N,n+1} = \mathbf{g}_N(\mathbf{U}_{n+1}^* + e_c\mathbf{U}_{n-1})$ .

**Schéma de CD-Lagrange.** Ce schéma a été introduit dans [6]. Il est explicite, aussi basé sur la différence centrée, mais utilise cette fois-ci une formulation discrète en vitesse des conditions HSM. Là encore apparaît l'opérateur de Delassus qui relie impulsion de contact et vitesse. Ce schéma est à notre connaissance le seul explicite utilisant une formulation discrète en vitesse des conditions HSM.

Le schéma de CD-Lagrange peut se résumer sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{n+1} &= \mathbf{U}_n + h\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_{n+1} = \mathbf{L}(\mathbf{U}_{n+1}), \quad \mathbf{g}_{N,n+1} = \mathbf{g}_N(\mathbf{U}_{n+1}) \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad \text{Si } g_{N,n+1}^k \leq 0, \quad v_{n+\frac{3}{2}}^k = -e_c(\mathbf{L}_{n+1}\dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}})^k \\ \mathbf{r}_{n+\frac{3}{2}}^* = \mathbf{H}_{n+1}^{-1} \left( \mathbf{v}_{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{L}_{n+1} \left[ \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + h\mathbf{M}_{lump}^{-1}(\mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}_{n+1}^{int}) \right] \right) \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad \text{Si } g_{N,n+1}^k \leq 0, \quad r_{n+\frac{3}{2}}^k = \max(0, \mathbf{r}_{n+\frac{3}{2}}^{*,k}) \\ \text{Sinon} \quad r_{n+\frac{3}{2}}^k = 0 \end{array} \right. \\ \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{3}{2}} &= \dot{\mathbf{U}}_{n+\frac{1}{2}} + h\mathbf{M}_{lump}^{-1}(\mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}_{n+1}^{int}) + \mathbf{M}_{lump}^{-1}\mathbf{L}_{n+1}^t\mathbf{r}_{n+\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

**Schéma de Moreau-Jean.** Ce schéma, introduit dans [10, 8], est basé sur la  $\theta$ -méthode pour l'intégration temporelle et sur une formulation discrète en vitesse des conditions HSM. Il est implicite, mais nous servira de point de comparaison pour le schéma de CD-Lagrange. Les deux schémas utilisent en effet la même forme des conditions HSM. Pour assurer la conservation de l'énergie, la variante considérée

du schéma sera celle pour  $\theta = 1/2$ . Le schéma d'intégration temporel est alors équivalent au schéma de Crank-Nicholson, ou à celui de l'accélération moyenne de Newmark.

Les équations de ce schéma sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + h\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F}_{n+\theta}^{ext} - \mathbf{F}_{n+\theta}^{int}) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}_{n+1}^t \mathbf{r}_{n+1} \\ \text{Avec } \mathbf{F}_{n+\theta} = \theta\mathbf{F}_{n+1} + (1-\theta)\mathbf{F}_n \\ \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h(\theta\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + (1-\theta)\dot{\mathbf{U}}_n) \\ \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{L}_{n+1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}_{n+1}^t] \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{L}_{n+1} [\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + h\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}_{n+1}^{int})] \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } g_N^k(\mathbf{U}_{n+\frac{1}{2}}) \leq 0, \quad 0 \leq \mathbf{r}_{n+1}^k \perp \tilde{\mathbf{v}}_{n+1}^k \geq 0 \\ \text{Sinon} \quad \mathbf{r}_{n+1}^k = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{U}_n + \frac{1}{2}h\dot{\mathbf{U}}_n & \mathbf{L}_{n+1} &= \mathbf{L}(\mathbf{U}_{n+\frac{1}{2}}) \\ \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} &= \mathbf{L}_{n+1}(\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + e_c\dot{\mathbf{U}}_n) & \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{L}_{n+1}\dot{\mathbf{U}}_{n+1} \end{aligned}$$

## 2 Présentation du benchmark

### 2.1 Balle rebondissante : un DDL – Système linéaire avec impact

Ce cas test est courant dans la littérature touchant à la dynamique d'impact [3, 1]. Il consiste en une bille rigide soumise seulement à son poids venant impacter un sol rigide. Le comportement du contact entre la bille et le sol est modélisé par une loi d'impact de Newton. Si le coefficient est compris entre 0 et 1, chaque impact dissipe de l'énergie. La hauteur de chaque rebond diminue alors ainsi que le temps entre deux impacts, ceci jusqu'à l'arrêt de la bille. Le temps d'arrêt est fini, mais le nombre d'impacts infini. Ce phénomène est appelé paradoxe de Zénon. La solution analytique est simple, ce qui facilite le calcul de l'erreur pour les solutions obtenues numériquement.

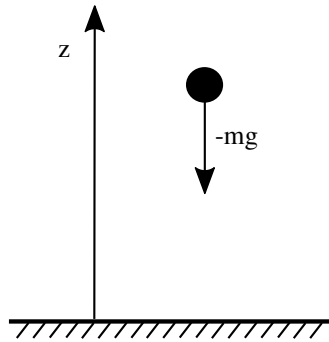


FIGURE 2 – Balle rebondissante

Ce cas test représenté figure 2 est décrit par l'équation suivante :  $m\dot{z} = -mgdt + L^t dr$ .

Il permet de tester le comportement du schéma à l'impact, notamment la conservation de l'énergie, et met en défaut les schémas dits « event-driven » pour  $0 < e_c < 1$ . Ces schémas adaptent leur pas de temps pour que les instants d'impact coïncident avec les instants  $t_n$ . Les conditions de contact sont alors imposées à la manière de conditions initiales, et la solution calculée conserve sa régularité sur un pas de temps. Mais dans le cas où  $0 < e_c < 1$ , le pas de temps tend vers zéro. Ceci montre l'intérêt d'utiliser des schémas « time-stepping », à pas de temps constant, qui peuvent traiter plusieurs instants d'impact au sein d'un même pas de temps. Pour un schéma time-stepping avec multiplicateurs de Lagrange (comme ceux présentés ci-dessus), il est nécessaire de relaxer partiellement les conditions HSM pour conserver un traitement de l'impact en fin de pas de temps. La forme discrète de (1) vérifie alors exactement les conditions de contact seulement pour la position, et (2) seulement pour la vitesse.

Ce cas test montre aussi que les schémas basés sur une écriture en position des conditions discrètes de contact (schéma de Paoli-Schatzman) ne permettent de représenter correctement que le cas où  $e_c = 0$

(correspondant alors au schéma de Carpenter). Pour  $e_c > 0$  l'énergie théorique n'est pas conservée au sens discret : à l'impact de l'énergie peut même être injectée par le schéma. La conservation n'est obtenue qu'à convergence. Par contre pour les schémas de Moreau-Jean et CD-Lagrange, basés sur l'écriture en vitesse des conditions HSM, l'impact conserve l'énergie théorique au sens discret. L'ordre de convergence constaté est  $O(h^2)$  pour les phases de vol libre (sans impact), et de  $O(h)$  pour les phases d'impact ( $h$  étant le pas de temps du schéma). Sur les prochains cas tests, les schémas de Paoli-Schatzman et Carpenter ne seront pas testés du fait de la non-conservation de l'énergie à l'impact.

## 2.2 Oscillateur de Van der Pol : un DDL – Système non-linéaire avec impact

Ce cas test, issu de l'électronique, est un oscillateur à un degré de liberté présentant un terme d'amortissement visqueux non-linéaire. Un terme de contact est ajouté pour introduire des discontinuités en vitesse. L'équation le décrivant est la suivante :

$$d\dot{x} - \xi\omega_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) \dot{x} dt + w_0^2 x dt + L' dr = 0$$

Les paramètres  $\xi$  et  $\omega_0$  caractérisent le comportement du système. Pour  $\xi \ll \omega_0$ , il est équivalent à celui d'un système masse-ressort classique. Ce système tend vers un cycle limite dans l'espace des phases, ce qui permet de tester facilement la conservation de l'énergie : seuls les schémas conservatifs restent sur ce cycle limite en temps long.

Pour les schémas explicites se pose le problème du calcul du terme d'amortissement. Celui-ci dépend en effet de la position et de la vitesse actualisée, or seule la première est explicite. Il est courant d'expliquer le deuxième terme en prenant la dernière vitesse calculée. Ceci implique une modification de l'équilibre dynamique. En transposant ce problème dans un cas simple, l'oscillateur de Van der Pol permet de tester les schémas explicites avec le terme d'amortissement totalement explicite (vitesse non-actualisée), ou implicite (vitesse actualisée). La résolution implicite se réduisant alors à une simple division. Il est facile de comparer les variantes et de quantifier l'erreur réalisée.

Ce cas test permet de montrer que pour le schéma de CD-Lagrange l'ordre de convergence est abaissé en rendant explicite le terme d'amortissement. Sans impact, l'ordre de convergence est de  $O(h^2)$  pour un terme d'amortissement implicite et de  $O(h)$  pour un terme d'amortissement explicite. Cet ordre de convergence abaissé a peu d'importance pour le cas avec impact, car tous les schémas convergent alors en  $O(h)$ . Les schémas de Moreau-Jean et CD-Lagrange conservent comme attendu l'énergie en temps long.

## 2.3 Ressort tournant : deux DDL – Conservation du moment angulaire avec impact

Le cas test du ressort tournant est un système masse-ressort en rotation, où la masse est soumise seulement à l'action du ressort et à la résultante d'impact. Ce problème présente un terme de raideur non-linéaire, du fait des grandes rotations. Il teste notamment la conservation du moment angulaire, propriété caractéristique des intégrateurs symplectiques. Il permet aussi d'introduire du contact frottant.

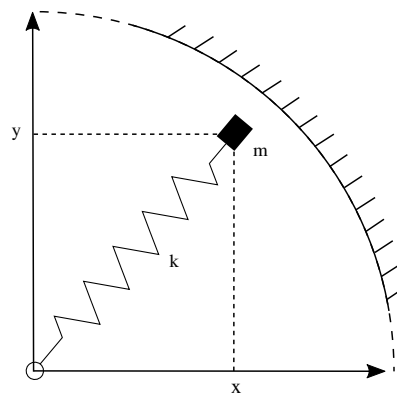


FIGURE 3 – Ressort tournant

Ce cas test décrit par la figure 3 est régi par les équations suivantes :

$$m d\dot{\mathbf{x}} = -k \left( 1 - \frac{l_0}{\|\mathbf{x}\|} \right) \mathbf{x} \cdot dt + \mathbf{L}^t \cdot d\mathbf{r} \quad \text{avec } \mathbf{x} = (x, y)$$

Pour les résultats présentés dans la suite, les paramètres sont les suivants :

$$m = 1 \text{ kg} \quad k = 10 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-2} \quad l_0 = 1 \text{ m} \quad \mathbf{x}(0) = (0.8; 0) \text{ m} \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (1; 2) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad h = 10^{-1} \text{ s}$$

Pour un contact non frottant et élastique, la réaction de contact est normale à la frontière (dirigée vers le centre de rotation). Le moment angulaire doit donc rester constant au cours du mouvement. Ceci permet de tester le caractère symplectique du schéma dans un cas avec impact. Si le moment angulaire discret n'est pas conservé, le schéma n'est pas symplectique.

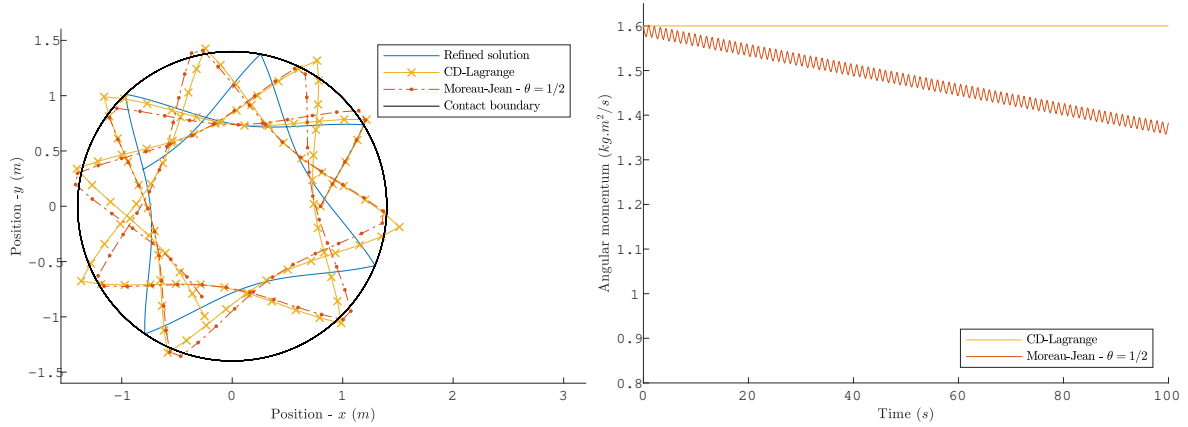


FIGURE 4 – Ressort tournant – Contact glissant : position et moment angulaire

La figure 4 montre les résultats obtenus pour un contact glissant ( $e_c = 1$ ,  $\mu = 0$ ). La courbe bleue correspond à une solution fine calculée par le schéma de CD-Lagrange avec  $h = 10^{-5} \text{ s}$ . La figure de gauche représente la position sur les 5 premières secondes du mouvement, celle de droite montre l'évolution du moment angulaire sur 100 s. Pour le schéma CD-Lagrange, le moment angulaire est exactement conservé à sa valeur analytique. Pour le schéma de Moreau-Jean, il perd plus de 10% de sa valeur sur 100 s de simulation. Sur la figure 5, les mêmes grandeurs sont représentées mais cette fois-ci pour un contact frottant :  $e_c = 0$ ,  $\mu = 0.2$ . Le système évolue vers un état où il tangente la frontière mais sans rentrer en contact avec elle. En effet les efforts de contact sont cette fois-ci dissipatifs et viennent abaisser le moment angulaire du système. Du fait de l'erreur numérique sur la position, les deux solutions à  $h = 10^{-1} \text{ s}$  présentent plus d'impacts que la solution fine. Pour le schéma de Moreau-Jean, lorsque l'état tangent est atteint le moment angulaire oscille autour d'une valeur moyenne.

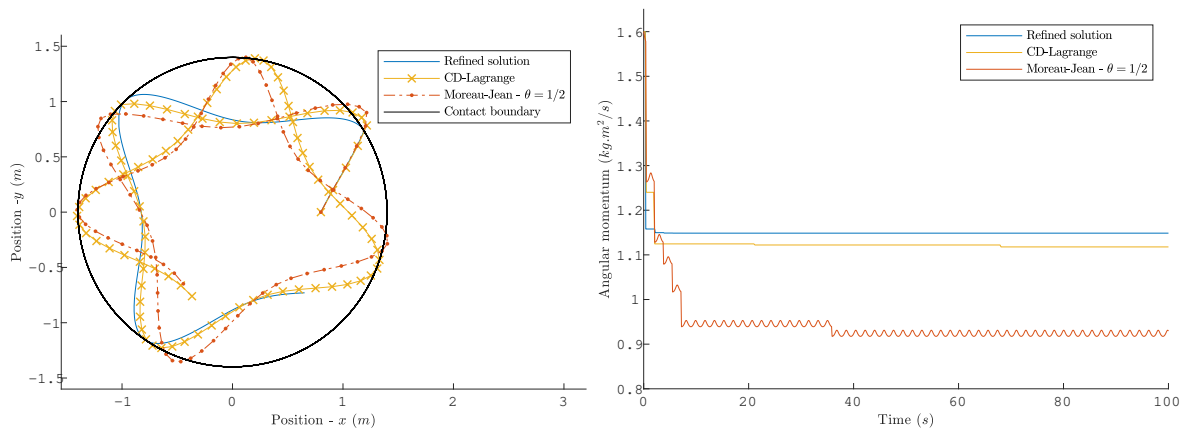


FIGURE 5 – Ressort tournant – Contact frottant : position et moment angulaire

Ce cas test montre que pour un schéma non-symplectique la non-conservation du moment angulaire peut provoquer une erreur importante. Il permet aussi de vérifier que passer d'un contact glissant à un

contact frottant pour les schémas de Moreau-Jean et CD-Lagrange est simple. En effet, cela n'ajoute aucune complexité algorithmique.

## 2.4 Barre en impact : multi-DDL – Impact sur problème EF

Ce cas test est fréquent dans la littérature [6, 3, 2, 4] relative aux problèmes éléments finis avec impact. Ce problème est même utilisé dans [5] pour une comparaison de plusieurs schémas. Il consiste en une barre élastique, discrétisée en espace par éléments finis, qui impacte une frontière analytique. La barre n'est soumise qu'aux efforts internes élastiques et à la résultante de contact. La zone de contact est réduite à un unique nœud, celui en bout de barre. Ce problème est intéressant car c'est l'un des rares en élasto-dynamique où la solution analytique est connue. La discrétisation EF introduit des hautes fréquences (liées aux modes propres des éléments) dites « parasites » car absentes du problème analytique. Selon les schémas d'intégration, ces hautes fréquences sont plus ou moins présentes.

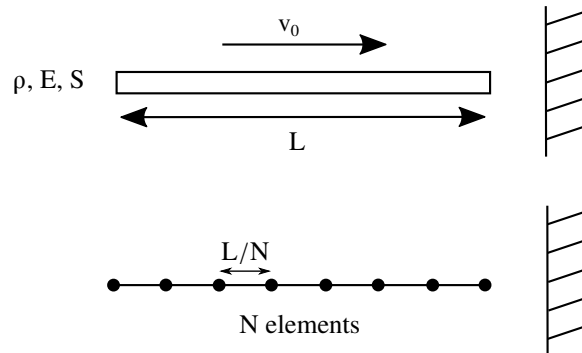


FIGURE 6 – Barre en impact

La figure 6 représente le problème continu et le problème discret. Ce dernier est régi par les équations suivantes :

$$\mathbf{M} \cdot d\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} \cdot dt = \mathbf{L}^t \cdot d\mathbf{r}$$

Ce cas test met en avant deux types d'oscillations parasites. Les premières apparaissent sur la position juste après l'impact. Pour un coefficient de restitution nul, elles disparaissent mais le contact devient non-conservatif en énergie. L'énergie dissipée correspond à l'énergie cinétique du nœud de contact, annulée lors de l'impact. À convergence en espace et en temps, l'énergie est conservée et le coefficient de restitution n'a plus d'influence. Mais ceci pose la question d'une formulation du contact pour les problèmes EF conservative en énergie, et du rôle du coefficient de restitution. L'autre type d'oscillation apparaît sur la vitesse après que la barre ait quitté le contact. En diminuant le pas de temps et la taille des éléments, l'amplitude de ces oscillations diminue mais leur fréquence augmente.

Ce cas test montre la nécessité de traiter les hautes fréquences parasites. Ceci pourrait être réalisé par un schéma dissipatif, tel que ceux présentés dans [3]. Mais de tels schémas n'existent pas pour la dynamique d'impact en explicite. Ce problème pose aussi la question de la formulation du contact non-conservative en énergie, et du rôle du coefficient de restitution. Pour des schémas implicites, des formulations redistribuant la masse de bord à l'intérieur du domaine ont été développées dans ce sens [9, 7]. Celles-ci sont conservatives en énergie, mais ne sont pas compatibles avec une approche explicite.

## 3 Résultats obtenus et perspectives

Ce benchmark nous a permis d'obtenir plusieurs résultats importants sur les schémas d'intégration temporels pour la dynamique d'impact. Les schémas basés sur une formulation discrète en vitesse des conditions de Hertz-Signorini-Moreau ont un meilleur comportement énergétique que ceux basés sur une formulation en position. Pour des grandes rotations avec impact, un schéma symplectique tel que CD-Lagrange présentera de meilleurs résultats du fait de la conservation exacte du moment angulaire. Pour des problèmes éléments finis, deux problèmes apparaissent : la formulation du contact n'est pas conservative en énergie, et lors de l'impact de l'énergie est transformée en oscillations parasites haute fréquence.

Ce benchmark met aussi en avant les propriétés du schéma CD-Lagrange : explicite, il conserve l'énergie à l'impact et en temps long, et est adapté à des problèmes non-linéaires.

Pour compléter ce benchmark, il faudrait ajouter un cas avec des maillages incompatibles au contact. Cela permettrait de mettre en avant les difficultés inhérentes à un opérateur de Delassus non-diagonal.

## Références

- [1] V. Acary, *Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction*, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 256, pp. 224–250, 2013.
- [2] N. J. Carpenter, R. L. Taylor, and M. G. Katona, *Lagrange constraints for transient finite element surface contact*, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 32, no. 1, pp. 103–128, 1991.
- [3] Q. Chen, V. Acary, G. Virlez, and O. Brüls, *A nonsmooth generalized- $\alpha$  scheme for flexible multibody systems with unilateral constraints*, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 96, no. 8, pp. 487–511, Nov. 2013.
- [4] F. Cirak and M. West, *Decomposition contact response (DCR) for explicit finite element dynamics*, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 64, no. 8, pp. 1078–1110, 2005.
- [5] D. Doyen, A. Ern, and S. Piperno, *Time-Integration Schemes for the Finite Element Dynamic Signorini Problem*, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 33, no. 1, pp. 223–249, 2011.
- [6] F. E. Fekak, M. Brun, A. Gravouil, and B. Depale, *A new heterogeneous asynchronous explicit–implicit time integrator for nonsmooth dynamics*, *Comput. Mech.*, vol. 60, no. 1, pp. 1–21, 2017.
- [7] P. Hauret, *Mixed interpretation and extensions of the equivalent mass matrix approach for elastodynamics with contact*, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 199, no. 45–48, pp. 2941–2957, 2010.
- [8] M. Jean, *The non-smooth contact dynamics method*, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 177, no. 3–4, pp. 235–257, 1999.
- [9] H. B. Khenous, P. Laborde, and Y. Renard, *Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics*, *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 27, no. 5, pp. 918–932, 2008.
- [10] J. J. Moreau, *Numerical aspects of the sweeping process*, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 177, no. 3–4, pp. 329–349, 1999.
- [11] N. M. Newmark, *A Method of Computation for Structural Dynamics*, *J. Eng. Mech. Div.*, vol. 85, no. 7, pp. 67–94, 1959.
- [12] L. Paoli and M. Schatzman, *A Numerical Scheme for Impact Problems II : The Multidimensional Case*, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 40, no. 2, pp. 734–768, 2002.
- [13] L. Paoli and M. Schatzman, *A Numerical Scheme for Impact Problems I : The One-dimensional Case*, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 40, no. 2, pp. 702–733, 2002.