

# Un modèle hybride endommagement/péridynamique pour une simulation objective de la rupture

G. Lubineau<sup>1</sup>, F. Han<sup>2</sup>

<sup>1</sup> King Abdullah University of Science and Technology (KAUST), Physical Science and Engineering Division, COHMAS Laboratory, Thuwal. 23955-6900. Saudi Arabia, gilles.lubineau@kaust.edu.sa

<sup>2</sup> State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, International Research Center for Computational Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian, 116023, PR China

**Résumé** — La simulation objective (indépendante du maillage) de l'initiation puis de la propagation des fissures reste un défi. Nous présentons ici un modèle hybride entre la mécanique de l'endommagement "locale" (basée sur le tenseur des contraintes de Cauchy) et la péridynamique (basée sur une formulation intégrale). L'endommagement est utilisé pour décrire les dommages volumiques avant localisation. Une fois la localisation détectée en un point, la partie restante de l'énergie est dissipée par un modèle péridynamique adaptatif permettant de décrire l'apparition d'une dégradation surfacique.

**Mots clés** — Endommagement, péridynamique, localisation

## 1 Introduction et contexte

La simulation objective de la dégradation des matériaux jusqu'à l'initiation et la propagation de discontinuités telles que les fissures est un problème critique pour la simulation précise de l'intégrité structurelle. À ce jour, la tâche reste ardue et repose souvent sur deux approches bien distinctes : la mécanique de la rupture et la mécanique de l'endommagement.

La mécanique de la rupture a été introduite avec la simulation des matériaux fragiles par Griffith [1] dans le cadre de l'élasticité linéaire. Cette approche et ses dérivés ont joué un rôle majeur dans la conception prédictive des structures au cours du siècle dernier. Cependant, ces approches présentent deux inconvénients : (1) elles ne décrivent que la propagation de discontinuités déjà existantes au sein d'une structure, ce qui signifie qu'elles ne prédisent pas l'initiation de fissures macroscopiques et (2) l'introduction explicite de composantes discontinues dans la solution est souvent une difficulté du point de vue numérique. Différentes technologies existent actuellement. Certaines approches imposent aux fissures de suivre un chemin prédéterminé par les interfaces entre les éléments. D'autres approches font le choix d'un remaillage systématique ou d'enrichir au besoin la base d'approximation numérique en introduisant explicitement une fonction de forme supplémentaire bien adaptée [2, 3, 4].

En utilisant la mécanique de l'endommagement, la dégradation est non pas décrite explicitement mais par son effet sur certaines propriétés effectives, telles que le tenseur de rigidité élastique. Une variable interne (l'indicateur d'endommagement, qui peut être une quantité scalaire ou un tensorielle) est introduite pour représenter les modifications locales de la rigidité. La mécanique de l'endommagement s'est considérablement améliorée depuis les travaux pionniers de Kachanov [5] et de Robotnov [6] dans les années 1950. Le cadre thermodynamique a été bien défini [7] et il a été appliqué avec succès à une grande variété de configurations, dont certaines très difficiles, telles que les matériaux composites [8, 9]. Bien que la mécanique de l'endommagement soit généralement assez facile à mettre en œuvre, certains défis se posent : (1) les fissures macroscopiques sont généralement définies comme des zones de dommages sévères, ce qui est discutable, car l'endommagement par essence ne décrit pas les discontinuités macroscopiques et (2) les solutions deviennent dépendantes du maillages dans le cas d'endommagements sévères en raison de la perte d'unicité de la solution continue. Nous pouvons considérer ces problèmes comme étant interdépendants, car la dépendance parasite au maillage provient du fait que la localisation est une transition d'une dégradation "volumique", décrite de manière appropriée par la mécanique de l'endommagement, vers une dégradation "surfacique", qui ne peut être correctement représentée dans le cadre de la mécanique de l'endommagement. Ce manque de cohérence entre l'espace mathématique

dans lequel la solution théorique existe et l'espace numérique réellement utilisé est à l'origine de ce comportement. De nombreux travaux ont apporté des solutions mathématiques pour régulariser le problème, en introduisant des limiteurs de localisation, tels que les modèles d'endommagement non-locaux [10], les modèles à gradient [11] ou les modèles à effet retard [12]. Toutes ces approches partagent une idée commune : la nécessité d'introduire une longueur caractéristique supplémentaire au début de la localisation.

Nous proposons d'exploiter conjointement les avantages de la mécanique de l'endommagement et de la périodynamique pour créer un modèle hybride unifié qui surmonte les limitations mentionnées ci-dessus : la mécanique classique et "locale" de l'endommagement est utilisée sur l'ensemble de la structure pour réduire le temps de calcul ("locale" signifie par défaut dans notre cas une approche basée sur des interactions de contact, et plus particulièrement sur le tenseur des contraintes de Cauchy). Lorsque la localisation est détectée, l'énergie restante dans la zone concernée est dissipée de manière non locale en supplantant le modèle d'endommagement par un modèle périodynamique (et donc par essence, non-local). Ceci est rendu possible grâce à une technique de couplage que nous avons récemment développée, appelée "morphing", entre modèles non-locaux et locaux [13, 14, 15]. Des fissures peuvent alors apparaître dans la zone périodynamique, qui est discrétisée en utilisant une approche de type Galerkin discontinue, ce qui résout la plupart des problèmes mentionnés ci-dessus : les fissures sont en réalité représentées comme de véritables discontinuités, des simulations objectives sont garanties, la non-localité n'est introduite que lorsque cela est nécessaire et de manière automatique, guidée par le modèle d'endommagement.

Le reste de cet article est organisé comme suit. La section 2 passe en revue les principes fondamentaux du modèle hybride local/non-local. Nous introduisons nos choix sur la partition de l'énergie, entre la partie dissipée de manière locale (via le modèle d'endommagement continu et local) et la partie dissipée de manière non locale (via le modèle périodynamique et non-local). Nous illustrons enfin dans la dernière partie la validité de notre approche au moyen d'un exemple numérique bidimensionnel.

## 2 Un modèle hybride endommagement-périodynamique en élasto-statique

### 2.1 Formulation du modèle hybride

Nous ne détaillerons pas les lois d'évolution par soucis de concision et ne rappelons que les points clés relatifs à la formulation générale. Nous supposons un domaine tridimensionnel  $\Omega$  occupé par un matériau initialement élastique, isotrope et homogène. Le modèle hybride local (éventuellement avec endommagement) / non-local (périodynamique) se formule alors comme suit :

□ **Admissibilité cinématique et compatibilité :**

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}(x) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{u}(x) + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{u}(x)) \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\eta_{\underline{\xi}}(p, x) = \left( \underline{u}(p) - \underline{u}(x) \right) \cdot \underline{e}_{\underline{\xi}} \quad \forall \underline{x}, p \in \Omega, \quad (2)$$

$$\underline{u}(x) = \underline{\bar{u}}(x) \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_u. \quad (3)$$

□ **Admissibilité statique :**

$$\text{div} \underline{\underline{\underline{\sigma}}}(x) + \int_{H_{\delta}(\underline{x})} \{ \hat{f}[\underline{x}] \langle p - \underline{x} \rangle - \hat{f}[p] \langle \underline{x} - p \rangle \} dV_p = -\underline{b}(x) \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad (4)$$

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}(x) \cdot \underline{n}(x) = \underline{T}(x) \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_T. \quad (5)$$

□ **Relations de comportement :**

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}(x) = \underline{\underline{\underline{K}}}(x) : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}(x) \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad (6)$$

$$\hat{f}[\underline{x}] \langle p - \underline{x} \rangle = \frac{c[\underline{x}] (|\underline{\xi}|)}{2} \eta_{\underline{\xi}}(p, x) \underline{e}_{\underline{\xi}} \quad \forall \underline{x}, p \in \Omega. \quad (7)$$

$H_{\delta}(\underline{x})$  est ce qu'il est classique d'appeler en périodynamique l'"horizon". Chaque lien  $\underline{\xi}$  entre le centre  $\underline{x}$  de l'horizon et un de ses points  $p$  à une direction unitaire  $\underline{e}_{\underline{\xi}}$ .

Nous retrouvons dans l'équation (4) la superposition des équations d'équilibre d'un modèle local classique basé sur des contraintes de Cauchy et d'un modèle non-local basé sur les interactions entre le point  $\underline{x}$  et tout point  $\underline{p}$  de l'horizon. Dans l'équation (6),  $\underline{\underline{K}}(\underline{x})$  représente le tenseur d'élasticité au point  $\underline{x}$ . Celui-ci peut varier en espace en particulier dans le cas où le matériau s'endommage de manière hétérogène ou dans le cas où un morphing est utilisé en vue de connecter une zone locale à une zone non-locale. Nous ne détaillons pas ici le modèle d'endommagement pour des soucis de concision, mais il faut considérer que  $\underline{\underline{K}}(\underline{x})$  est donc potentiellement un tenseur élastique modifié par l'endommagement. Dans l'équation (7),  $c[\underline{x}](|\underline{\xi}|)$  correspond au micromodule classiquement introduit en périodynamique. Celui-ci peut également varier en espace, soit en raison de l'évolution de la dégradation, ou en raison de l'introduction du morphing.

Nous rappelons les équations fondamentales du morphing dans le cas d'un matériau sans endommagement. Notons  $\underline{\underline{K}}^0$  la raideur initiale du matériau lorsque décrit par le modèle local, et  $c^0(|\underline{\xi}|)$  le micromodule équivalent en périodynamique. Le morphing permet de coupler simplement les deux approches en variant en espace les propriétés matériau associées à chaque description. Une fonction de morphing  $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$  est introduite afin de décrire l'évolution du micromodule en espace, de telle manière que :

$$c[\underline{x}](|\underline{\xi}|) = \alpha(\underline{x})c^0(|\underline{\xi}|). \quad (8)$$

Le tenseur local  $\underline{\underline{K}}(\underline{x})$  doit alors être également fonction de l'espace afin d'assurer la complémentarité des deux modèles dans la zone de transition. En supposant que les déformations varient lentement au travers de la zone de transition et une équivalence énergétique entre le modèle hybride et les modèles homogènes, l'évolution du modèle local est simplement donnée par la contrainte ci-dessous [13] :

$$\underline{\underline{K}}(\underline{x}) = \underline{\underline{K}}^0 - \int_{H_\delta(\underline{x})} c^0(|\underline{\xi}|) \frac{\alpha(\underline{x}) + \alpha(\underline{p})}{2} \frac{\underline{\xi} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{\xi} \otimes \underline{\xi}}{2|\underline{\xi}|^2} dV_{\underline{p}}. \quad (9)$$

## 2.2 Localisation et conséquences sur la partition de l'énergie

Nous considérons ici pour simplifier le cas le plus simple d'un endommagement isotrope. Cependant, nous insistons sur le fait que l'approche est tout à fait générale et peut être étendue sans difficulté particulière à des configurations d'endommagement bien plus complexes. La densité d'énergie de déformation  $\phi$  en tout point du modèle endommagé s'écrit comme suit :

$$\phi(d) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{K}}(d) : \underline{\underline{\epsilon}}, \quad (10)$$

$\underline{\underline{K}}(d) = (1 - d)\underline{\underline{K}}^0$  est le tenseur élastique endommagé et  $d$  la variable d'endommagement.  $d$  varie de 0 pour le matériau sain à  $d_{max}$  ( $0 < d_{max} \leq 1$ ), qui est la valeur maximale de l'endommagement garantissant la positivité du tenseur élastique. Dans le cas simple du modèle isotrope,  $d_{max}$  est scalaire et égal à 1.

Cependant, un problème fondamental lors de la résolution numérique de l'endommagement est que l'objectivité par rapport à la discrétisation spatiale et temporelle n'est pas garantie pendant et après la localisation. La localisation prend place lorsque qu'une valeur critique de l'endommagement, appelée ici  $d_{crit}$  est atteinte. Cette valeur est généralement largement inférieure à  $d_{max}$ . La localisation prend sa source dans la perte de positivité de l'opérateur élastique tangent,  $\underline{\underline{C}}(d)$  lorsque  $d = d_{crit}$ . Ceci se traduit par la perte d'unicité du problème initial [16, 17].

La condition de définition et de positivité de l'opérateur élastique tangent peut être reformulée sous la forme du critère de stabilité de Hill [18]. Nous en rappelons ici les points clés et nous nous limitons au cas d'un matériau indépendant du temps, pour lequel la relation entre le taux d'évolution de la contrainte,  $\underline{\underline{\sigma}}$ , et le taux de déformation,  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ , peut être écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}(d) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}. \quad (11)$$

Une condition suffisante de stabilité est généralement basée sur la positivité du produit scalaire entre le taux d'évolution de la contrainte,  $\underline{\underline{\sigma}}$ , et le taux de déformation,  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$  [19, 16] :

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} : \underline{\underline{\sigma}} > 0. \quad (12)$$



$\underline{\underline{K_c^d}}$  est donc définie par :

$$\underline{\underline{K_c^d}} = \underline{\underline{K}}(1 - d_{crit} + d) = (d_{crit} - d)\underline{\underline{K}}^0 \quad (20)$$

De manière évidente,  $\phi(1 - d_{crit} + d)$  vaut 0 lorsque  $d$  atteint la valeur critique.

Cette partition de l'énergie est la clé dans l'application du morphing pour introduire localement le modèle périodynamique. Lorsqu'un point atteint la valeur critique, le modèle périodynamique est localement introduit pour remplacer la partie résiduelle de la raideur ( $\underline{\underline{K_c^0}}$ ). Le couplage avec le reste du modèle n'est fait que sur cette partie de la raideur en utilisant la technique de morphing décrite par l'équation 9.

### 3 Exemple numérique et conclusions

Nous appliquons la méthode proposée au cas d'une plaque bi-entaillée [20, 21]. Ses dimensions sont précisées sur la figure 1 (a). Les conditions en déplacement,  $\bar{u}_y = 12\text{mm}$ , sont prescrites en haut et en bas de la plaque, qui est également soumise aux compressions,  $\bar{F}_x = 1\text{GPa}$ , en haut à gauche et en bas à droite (voir la figure 1 (a)).

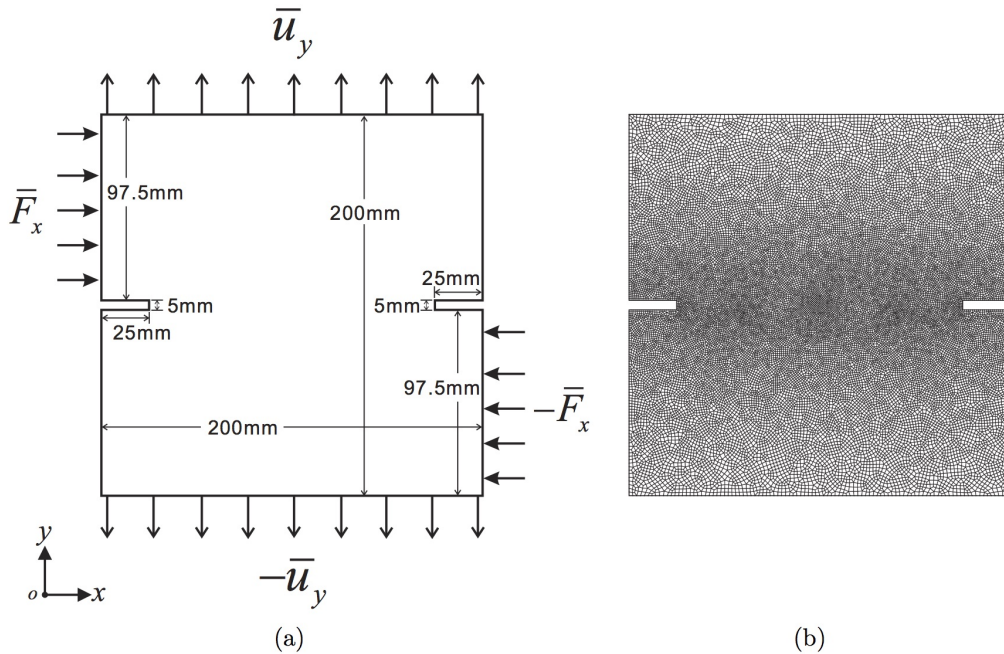


FIGURE 1 – La plaque bi-entaillée : (a) la géométrie et les conditions aux limites (b) le maillage pour l'exemple numérique

La figure 2 montre la déformation, la carte d'endommagement et le développement de la discontinuité au centre de la plaque. Dans la figure 2 (a), la plaque ne présente qu'une déformation élastique sans endommagement. Au pas de chargement 26, nous pouvons voir que des endommagements locaux apparaissent dans les zones de concentration de contrainte (figure 2 (b)). A ce stade, seul le modèle d'endommagement local est présent dans la structure. A l'étape 33 (figure 2), la localisation est détectée et une discrétisation de type Galerkin discontinue est introduite localement de concert avec le modèle périodynamique. Cette fissure se propage ensuite rapidement par la multiplication des zones localisées et l'introduction progressive des zones périodynamiques.

La simulation sur différentes discrétisations a montré que la dissipation ainsi que la morphologie de la rupture étaient indépendantes de la discrétisation. Notre approche peut également être vue comme l'utilisation de la périodynamique en tant que limiteur de localisation. En ce sens, elle réconcilie en partie dans un cadre cohérent les deux approches qui sont à ce jour utilisées de manière antagonistes mais qui, selon nous, peuvent être utilisées conjointement pour construire une approche complète et cohérente de la progression de la dégradation.

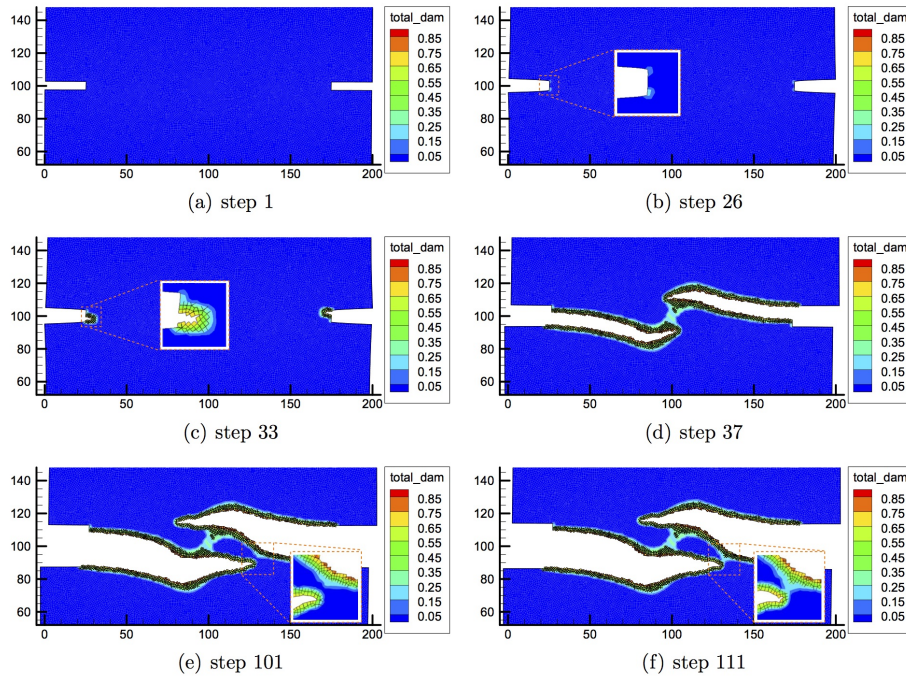


FIGURE 2 – L'évolution de l'endommagement et de la zone péri-dynamique depuis l'initiation jusqu'à la rupture complète. Sont représentés les contours de l'endommagement ainsi que les surfaces de rupture.

## Références

- [1] A. A. Griffith. *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*, volume 221. The Royal Society, 1921.
- [2] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150, 1999.
- [3] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 :601–620, 1999.
- [4] É. Budyn, G. Zi, N. Moës, and T. Belytschko. A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(10) :1741–1770, 2004.
- [5] L. M. Kachanov. Rupture time under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, 8 :26–31, 1958.
- [6] Y. N. Rabotnov. A mechanism of a long time failure. In *Creep problems in structural members*, pages 5–7, 1959.
- [7] J. Lemaitre. *A course on damage mechanics*. Springer, 1996.
- [8] P. Ladevèze and E LeDantec. Damage modeling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3) :257–267, 1992.
- [9] P. Ladevèze and G. Lubineau. On a damage mesomodel for laminates : micro-meso relationships, possibilities and limits. *Composites Science and Technology*, 61(15) :2149–2158, 2001.
- [10] Z. Bazant and G. Pijaudier-Cabot. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, 55 :287–293, 1988.
- [11] R. Peerlings, R. de Borst, W. Brekelmans, and M. Geers. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 3(4) :323–342, 1998.
- [12] O. Allix, P. Feissel, and P. Thévenet. A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers & Structures*, 81(12) :1177–1191, 2003.
- [13] G. Lubineau, Y. Azdoud, F. Han, C. Rey, and A. Askari. A morphing strategy to couple non-local to local continuum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(6) :1088–1102, 2012.
- [14] Y. Azdoud, F. Han, D. Littlewood, G. Lubineau, and P. Seleson. Coupling local and non-local models. In F. Bobaru, J. T. Foster, P. H. Geubelle, and S. A. Silling, editors, *Handbook of Peridynamic Modeling*, page 600. Chapman and Hall/CRC, 2016.
- [15] F. Han, G. Lubineau, Y. Azdoud, and A. Askari. A morphing approach to couple state-based peridynamics with classical continuum mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016.

- [16] R. de Borst, M. Crisfield, J. Remmers, and C. Verhoosel. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Wiley, second edition, 2012.
- [17] S. Murakami. *Continuum Damage Mechanics : A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture*. Springer, 2012.
- [18] R. Hill. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6(3) :236–249, 1958.
- [19] G. Maier and T. Hueckel. Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 16(2) :77–92, 1979.
- [20] M. B. Noor Mohamed, E. Schlangen, and J. G. M. Vanmier. Experimental and numerical study on the behavior of concrete subjected to biaxial tension and shear. *Advanced Cement Based Materials*, 1(1) :22–37, 1993.
- [21] W. Liu and J. W. Hong. A coupling approach of discretized peridynamics with finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 245-246 :163–75, 2012.