

# Double synthèse modale appliquée au crissement de frein

## Analyse de stabilité, réponse vibratoire non-linéaire et champs acoustique

G. Corradi<sup>1</sup>, J.-J. Sinou<sup>1,2</sup>, S. Besset<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LTDS, UMR 5513, Ecole Centrale Lyon, {gregoire.corradi,jean-jacques.sinou,sebastien.besset}@ec-lyon.fr

<sup>2</sup> Institut Universitaire de France, Paris

**Résumé** — Cet article présente une étude numérique des méthodes de réduction modale appliquées au crissement de frein. Une méthode de double synthèse modale est proposée : dans un premier temps une réduction de Craig et Bampton classique est appliquée à chaque sous structure. La seconde étape consiste en une réduction modale du système formé par les interfaces de contact. Une étude de convergence du modèle réduit est menée en fonction de la taille des bases de réduction, à la fois sur l'analyse de stabilité, sur la réponse transitoire et sur les estimations du champ acoustique rayonné.

**Mots clés** — crissement, CEA, dynamique non-linéaire, méthodes de réduction, FEM, BEM.

## 1 Introduction

Les instabilités mécaniques dues à la friction, en particulier les vibrations de crissement, sont encore aujourd'hui l'objet d'un grand intérêt académique et industriel. Le crissement est étudié depuis des décennies. Des synthèses sur les mécanismes de frottement, les contributions et avancées majeures sur le sujet sont disponibles dans [4, 5, 8, 14]. Il est aujourd'hui assez largement accepté que le phénomène de couplage de modes (mode lock-in) est à l'origine des instabilités amenant aux vibrations auto-entretenues appelées crissement dans les systèmes de freinage, bien que d'autres mécanismes comme le stick-slip ou encore un coefficient de frottement décroissant avec la vitesse de glissement ont pu être proposés pour expliquer les vibrations auto-entretenues observées dans de tels systèmes.

Aujourd'hui l'approche classiquement préconisée lors d'une étude numérique est l'utilisation d'un Modèle Eléments Finis (FEM) du système suivie d'une étude de stabilité avec la méthode CEA (Complex Eigenvalue Analysis). Une intégration temporelle des équations différentielles peut être proposée pour obtenir l'évolution transitoire des réponses non-linéaires du système frottant, mais la grande taille des systèmes et le temps de calcul associé sont souvent prohibitifs, ce qui limite l'utilisation de cette approche encore de nos jours. Il a pu cependant être observé que l'analyse de stabilité peut conduire à une sous- ou sur-estimation des modes instables effectivement présents lors de la simulation non-linéaire temporelle [15], ce qui explique l'intérêt toujours important des chercheurs pour travailler sur des techniques de réduction, dans l'objectif d'aboutir à une utilisation plus efficace des outils permettant l'obtention des réponses non-linéaires [9, 10, 19].

## 2 Modèle Eléments Finis du système de frein simplifié

### 2.1 Modèle Eléments Finis

Dans cette étude nous utilisons un modèle simplifié d'un système de frein à disque, représenté Fig. 1. Il est constitué d'un disque et de deux plaquettes, qui sont considérés comme les principaux contributeurs du crissement. Les deux plaquettes glissent face à face de chaque côté du disque annulaire. Les deux interfaces sont composées de 220 noeuds de contact qui sont répartis de façon uniforme sur les interfaces de frottement, formant un maillage concordant entre les plaquettes et le disque. Le dos de la plaquette inférieure (Pad2) est encastrée, tout comme la surface intérieure du disque. Quatre noeuds du dos de la plaquette supérieure (Pad1) sont connectés à un noeud maître qui ne peut se déplacer que selon la

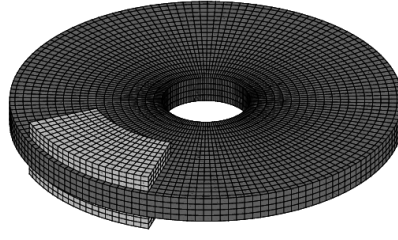


FIGURE 1 – Modèle Eléments Finis du disque et des deux plaquettes

verticale, ses rotations étant également bloquées. Une pression de freinage  $\mathbf{F}_{ext}$  est appliquée sur le dos de la plaquette supérieure.

Les forces de réaction aux deux interfaces sont la somme des réactions normales et tangentielles. Une méthode de pénalité pour le contact normal est retenue sous la forme d'une loi cubique comme ce fut le choix dans plusieurs études précédentes [17, 18]. La perte de contact possible entre deux points est également prise en compte, si bien que les plaquettes et le disque peuvent localement se séparer en plusieurs noeuds lors de l'apparition de vibrations. La réaction normale  $F_{norm}^i$  est donc de la forme suivante pour le couple  $i$  de noeuds sur n'importe quelle interface, où  $\delta_i$  est leur déplacement relatif :

$$F_{norm}^i = \begin{cases} k_L \delta_i + k_{NL} \delta_i^3 & si \quad \delta_i \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad (1)$$

La réaction tangentielle orthoradiale  $F_{tang}^i = \mu F_{norm}^i$  suit la loi de frottement classique de Coulomb avec un coefficient de frottement constant  $\mu$ . La force non-linéaire de contact est donc donnée par  $\mathbf{F}_{NL} = \mathbf{F}_{norm} + \mathbf{F}_{tang}$ . Nous pouvons donc obtenir l'équation décrivant la dynamique du système de frein :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{NL} + \mathbf{F}_{ext} \quad (2)$$

où  $\mathbf{X}$  est le vecteur des déplacements généralisé, où le point correspond à la dérivée temporelle.  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  and  $\mathbf{K}$  sont les matrices de masse, amortissement et raideur. L'amortissement est modélisé par un amortissement de Rayleigh sous l'expression suivante :  $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M}$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux paramètres de calibrage.

## 2.2 Analyse de stabilité

L'approche classique pour déterminer la stabilité d'un système est l'utilisation de la CEA (Complex Eigenvalue Analysis). Cette méthode est appliquée localement autour d'une position d'équilibre statique glissante  $\mathbf{X}_{eq}$ , qui est définie par l'équation suivante :  $\mathbf{K}\mathbf{X}_{eq} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}_{eq})$ . En considérant de petites perturbations  $\delta\mathbf{X}$  autour de  $\mathbf{X}_{eq}$  telles que  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{eq} + \delta\mathbf{X}$ , il est possible de linéariser l'équation 2 du mouvement autour de la position d'équilibre :

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{X}} + \underbrace{[\mathbf{K} - \mathbf{J}_{F_{NL}}(\mathbf{X}_{eq})]}_{\mathbf{K}^{tot}} \delta\mathbf{X} = 0 \quad (3)$$

où  $\mathbf{J}_{F_{NL}}(\mathbf{X}_{eq})$  est la matrice Jacobienne des réactions non-linéaires  $\mathbf{F}_{NL}$  en  $\mathbf{X}_{eq}$ . Nous pouvons signaler que les expressions des efforts de réaction aux interfaces nous permet d'obtenir rapidement une expression analytique de la Jacobienne. La méthode de CEA permet l'étude de la stabilité du point d'équilibre  $\mathbf{X}_{eq}$  par le calcul des modes propres par le problème aux valeurs propres associé :

$$(\lambda_k^2 \mathbf{M} + \lambda_k \mathbf{C} + \mathbf{K}^{tot}) \mathbf{X}_k = 0 \quad (4)$$

où  $(\lambda_k, \mathbf{X}_k)$  sont respectivement les valeurs propres et vecteurs propres du problème discrétisé, avec des valeurs propres complexes  $\lambda_k = a_k + ib_k$ . La partie imaginaire  $b_k$  définit la pulsation du mode tandis que la partie réelle  $a_k$  est relative à la stabilité du mode en question. S'il existe au moins une valeur

propre à partie réelle strictement positive ( $\exists k, a_k > 0$ ), alors le système sera localement instable autour du point d'équilibre  $\mathbf{X}_{eq}$ .

### 3 Méthodes de réduction

Le modèle initial FEM comporte environ 50000 degrés de liberté (ddl), ce qui peut mener à des coûts de calcul prohibitifs. Nous appliquons donc des méthodes de réduction au modèle pour condenser ce nombre de ddl élevé. Nous présentons ici la méthode de Craig et Bampton puis une méthode de synthèse modale généralisée appelée DMS (Double Modal Synthesis).

#### 3.1 Réduction de Craig et Bampton

La méthode de Craig et Bampton [2] consiste en la construction d'un modèle réduit pour chaque sous structure (ici le disque et les deux plaquettes) en utilisant les modes contraints ( $\Psi^n$ ) et les modes élastiques libres à interface fixe ( $\Phi^n$ ), avec  $n$  prenant les valeurs  $d$ ,  $p1$  ou  $p2$  respectivement pour le disque, la plaquette 1 et la plaquette 2. La validité de cette approche et sa convergence ont déjà été discutées [13].

La critère proposé pour choisir le nombre de modes élastiques libres à interface fixe est basé sur la fréquence maximale d'étude  $f_{max}$  (égale à 20000 Hz ici) et un coefficient  $\gamma$  tel que, pour chaque sous structure, nous conservons les modes élastiques libres à interface fixe dont la fréquence est inférieure à la fréquence de coupure  $f_c = \gamma f_{max}$ . Les ddl internes ( $\mathbf{u}_{int}^d, \mathbf{u}_{int}^{p1}, \mathbf{u}_{int}^{p2}$ ) sont donc exprimés en fonction des ddls internes généralisés  $\xi^d, \xi^{p1}, \xi^{p2}$ , (correspondant aux modes élastiques libres à interface fixe  $\Phi^n$ ) et des ddls d'interface ( $\mathbf{u}_I^d, \mathbf{u}_I^{p1}, \mathbf{u}_I^{p2}$ ) :  $\mathbf{u}_{int}^n = \Phi^n \xi^n + \Psi^n \mathbf{u}_I^n$ .

Cela nous permet de définir une matrice de passage  $\mathbf{T}$  entre la base physique et le modèle réduit par la méthode de Craig et Bampton :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I^d \\ \mathbf{u}_{int}^d \\ \mathbf{u}_I^{p1} \\ \mathbf{u}_{int}^{p1} \\ \mathbf{u}_I^{p2} \\ \mathbf{u}_{int}^{p2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Psi^d & \Phi^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}^{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi^{p1} & \Phi^{p1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}^{p2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi^{p2} & \Phi^{p2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I^d \\ \xi^d \\ \mathbf{u}_I^{p1} \\ \xi^{p1} \\ \mathbf{u}_I^{p2} \\ \xi^{p2} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{X}_{CB} \quad (5)$$

Dans la suite de l'étude, le système de référence est un modèle réduit par la méthode de Craig et Bampton avec un coefficient  $\gamma = 6$ , ce qui permet d'avoir une très bonne concordance par rapport au modèle FEM initial.

Dans cette première réduction de Craig et Bampton, nous avons donc réduit tous les ddls internes, et les ddl physiques restants se situent aux interfaces de contact. L'objectif de la seconde étape de réduction est de réduire ces ddls d'interface.

#### 3.2 Double Synthèse Modale

Cette méthode de réduction est basée sur la réduction d'interface. De précédentes études ont prouvé l'efficacité de cette méthode [1, 16]. Le but est de calculer les modes complexes du modèle condensé sur les interfaces frottantes, ce qui conduit à l'obtention de modes propres à gauche et à droite du système de ddls d'interface (car la matrice de raideur n'est pas symétrique). Nous avons donc besoin d'extraire les ddls physiques restants. Les matrices  $\tilde{\mathbf{M}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  sont les matrices extraites de  $\mathbf{M}_{CB}$  et  $\mathbf{K}_{CB}^{tot}$  (qui sont les matrices de masse et de raideur réduites par la première condensation de Craig et Bampton) sur les ddls d'interface.

Les modes propres à gauche et à droite  $\mathbf{X}_{Bdr}^i$  and  $\mathbf{X}_{Bga}^i$  sont donc calculés, classés par fréquence croissante et nous définissons les matrices  $\varphi_{dr}$  and  $\varphi_{ga}$  qui contiennent les premiers  $N_{DMS}$  modes propres :

$$\begin{cases} (-\omega_i^2 \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{X}_{Bdr}^i = 0, \quad \varphi_{dr} = [\mathbf{X}_{Bdr}^1 \dots \mathbf{X}_{Bdr}^{N_{DMS}}] \\ (-\omega_i^2 \tilde{\mathbf{M}}^t + \tilde{\mathbf{K}}^t) \mathbf{X}_{Bga}^i = 0, \quad \varphi_{ga} = [\mathbf{X}_{Bga}^1 \dots \mathbf{X}_{Bga}^{N_{DMS}}] \end{cases} \quad (6)$$

La taille de cette étape de réduction est donnée par le nombre  $N_{DMS}$  de modes d'interfaces conservé, associé aux ddls généralisés  $\eta_I$ . Le système final réduit est construit en utilisant les matrices de passage à gauche et à droite  $\mathbf{T}_{dr}$  et  $\mathbf{T}_{ga}$  définies par :

$$\mathbf{T}_{dr} = \begin{pmatrix} \varphi_{dr} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}^{d+p1+p2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_{ga} = \begin{pmatrix} \varphi_{ga} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}^{d+p1+p2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

et en considérant une permutation des ddls dans le vecteur  $\mathbf{X}$  :

$$\mathbf{X}_{DMS} = \begin{pmatrix} \eta_I \\ \xi^d \\ \xi^{p1} \\ \xi^{p2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{dr}^{-1} \mathbf{X}_{CB} = \mathbf{T}_{dr}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_I^d & \mathbf{u}_I^{p1} & \mathbf{u}_I^{p2} & \xi^d & \xi^{p1} & \xi^{p2} \end{pmatrix}^t \quad (8)$$

Comme  $\mathbf{K}_{CB}^{tot}$  dépend de  $\mu$ , une réduction DMS est nécessaire à chaque changement du point d'équilibre statique, contrairement à la première étape de réduction par Craig et Bampton.

La stabilité de ce système condensé peut être étudiée comme précédemment avec les matrices issues de la réduction de Craig et Bampton et de la DMS.

## 4 Analyse de stabilité

L'analyse de stabilité du système est menée en calculant ses valeurs propres complexes pour un ensemble de valeurs d'un paramètre de contrôle. Ici, l'évolution du coefficient de frottement a été choisie en considérant 501 valeurs équiréparties entre 0 et 1. Les valeurs propres du système pour chaque valeur de  $\mu$  sont calculées. Dans le cadre de l'étude, pour  $\mu = [0; 1]$ , on peut observer l'apparition de deux modes instables quand  $\mu$  augmente : le première pour une valeur  $\mu_1 = 0.67$  avec une fréquence  $f_1 = 857Hz$  et la seconde à  $\mu_2 = 0.76$  avec une fréquence  $f_2 = 2223Hz$ . Pour valider l'efficacité des deux étapes de réduction, un critère sur l'erreur moyenne sur la partie réelle ( $\delta r$ ) ou la partie imaginaire ( $\delta \omega$ ) des valeurs propres  $\lambda_k$  est défini. On peut définir ce critère sur l'ensemble  $N^{tot}$  des modes propres :

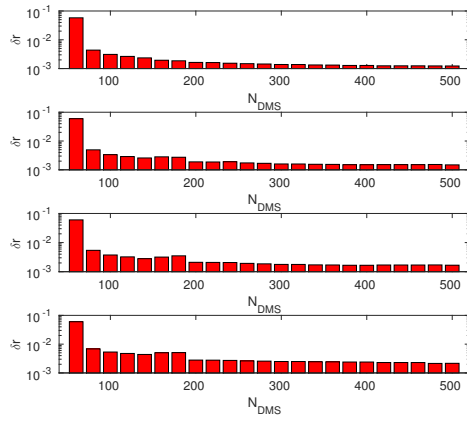
$$\delta r = \frac{1}{N^{tot}} \sum_{k=1}^{N^{tot}} \left| \frac{a_k^{ref} - a_k}{a_k^{ref}} \right|, \quad \delta \omega = \frac{1}{N^{tot}} \sum_{k=1}^{N^{tot}} \left| \frac{b_k^{ref} - b_k}{b_k^{ref}} \right| \quad (9)$$

Comme on peut le voir dans à la Fig. 2, les techniques de réduction basée sur la DMS (ici avec  $\gamma = 1.5$ ) convergent bien avec l'augmentation de la taille de la base de réduction. Un seuil concernant les deux paramètres de réduction  $\gamma = 1.5$  et  $N_{DMS} = 150$  pour lesquels l'évolution des critères de convergence se stabilise est observé. La configuration doublement réduite avec les paramètres de réduction  $\gamma = 1.5$  et  $N_{DMS} = 150$  est donc appelée "configuration optimale" pour la suite en considérant qu'elle est le meilleur compromis entre temps de calcul et précision des résultats.

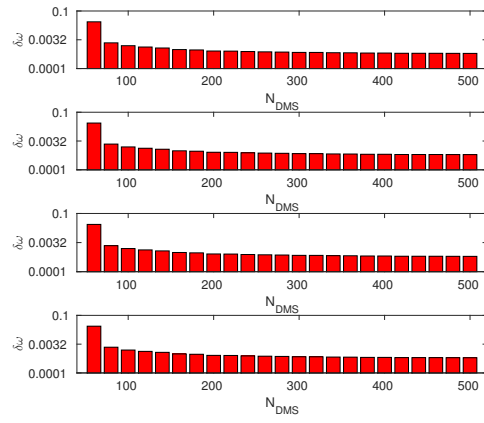
## 5 Réponse vibratoire non-linéaire

Les différents modes instables prédits par l'analyse de stabilité peuvent varier de ceux qui vont effectivement apparaître lors d'une intégration numérique temporelle des équations différentielles régissant le comportement du système. Il est donc nécessaire de procéder à cette simulation transitoire pour obtenir une estimation des niveaux vibratoires et du contenu fréquentiel. Le comportement transitoire complet est également une information importante car il contient plus d'informations que le calcul direct des cycles limites. En effet les niveaux observés sur ces régimes établis peuvent être inférieurs à ceux observés sur certaines portions du régime transitoire.

On considère donc une légère perturbation du système dynamique initialement à sa position d'équilibre statique glissant  $\mathbf{X}_{eq}$  et une intégration numérique temporelle du système de l'équation 2 est menée.

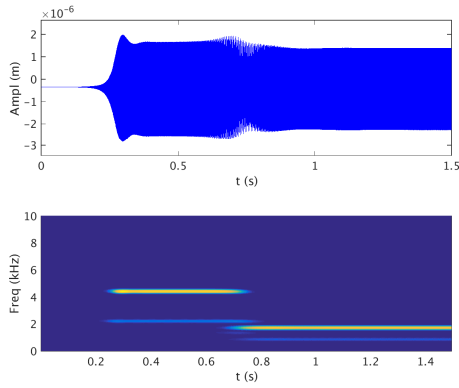


(a) Evolution de  $\delta r$  avec  $N_{DMS}$

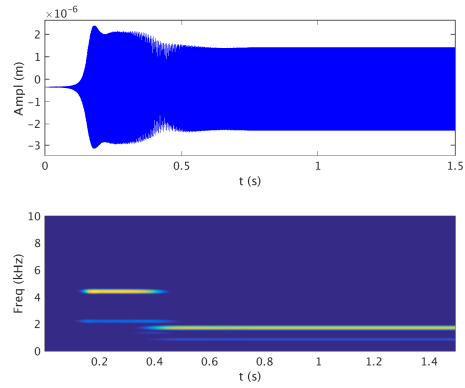


(b) Evolution de  $\delta \omega$  avec  $N_{DMS}$

FIGURE 2 – Evolution du critère d'erreur avec  $N_{DMS}$  pour la seconde étape de réduction,  $\gamma = 1,5$ , pour  $\mu \in \{0, 0.7, 0.8, 1\}$



(a) Signal et spectrogramme pour le modèle de référence



(b) Signal et spectrogramme pour la configuration optimale

FIGURE 3 – Evolution transitoire pour un ddl du disque,  $\mu = 0,8$

Pour calculer les évolutions temporelles du système différentiel, un intégrateur basé sur la  $\theta$ -méthode (voir [6, 10, 9]) est développé. Cette méthode utilise un pas de temps  $h$  constant entre deux instants  $t_i$  and  $t_{i+1}$ . La valeur du paramètre  $\theta$  est habituellement comprise entre 0 et 1, et est choisie ici à 0.5 car elle assure d'obtenir un schéma conservatif.

En supposant des évolutions régulières des variables du système (ce qui est assuré par la condition de contact régularisé pour  $\mathbf{F}_{NL}$  et la méthode de pénalité au niveau des interfaces) il est possible d'écrire un schéma implicite de résolution temporelle du système différentiel, qui va être déterminé à chaque itération du pas de temps  $h$ .

La Fig. 3 illustre les résultats de cette intégration temporelle dans le cas d'une configuration du modèle à deux modes instables avec un coefficient de frottement  $\mu = 0.8$  : les vibrations auto-entretenues transitoires et les spectrogrammes associés montrent l'évolution du comportement, ici en un point de l'interface du disque. La Fig. 4 montre également les cycles limites du régime établi et leur densité spectrale de puissance associée. Nous pouvons remarquer que les résultats sont très similaires entre la référence et la configuration optimale.

De plus, trois phases peuvent être identifiées sur cette simulation temporelle : la première est une croissance exponentielle des niveaux de vibration à partir de l'équilibre statique glissant. Le deuxième est une saturation de ces niveaux due aux effets non-linéaires vers un régime pseudo-établi principalement régi par le second mode instable à la fréquence fondamentale  $f_2 = 2223Hz$ . Finalement on observe une transition du régime régi par le second mode instable vers un autre régime quasi-périodique régi à présent principalement par le premier mode instable à la fréquence fondamentale  $f_1 = 857Hz$  et ses

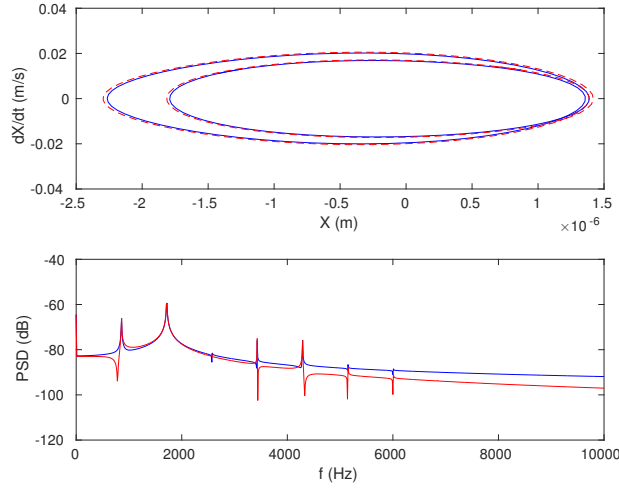


FIGURE 4 – Comparaison des cycles limites et des FFT pour le régime établi,  $\mu = 0,8$ , '—' : Référence, '—' : Configuration optimale

harmoniques.

Le contenu fréquentiel entre la référence et la configuration optimale est identique et les cycles limites sont presque confondus. La seule différence notable que l'on peut observer est un décalage temporel, une avance du système optimal dans ses transitions entre les différentes phases du signal transitoire.

Ce modèle numérique permet le calcul des vitesses à chaque point du modèle, et en particulier sur les noeuds surfaciques. Cette connaissance va nous permettre de mener des calculs acoustiques relatifs à la radiation sonore d'un tel système crissant.

## 6 Bruit de crissement

### 6.1 Modélisation à l'aide de la méthode des éléments de frontière (BEM)

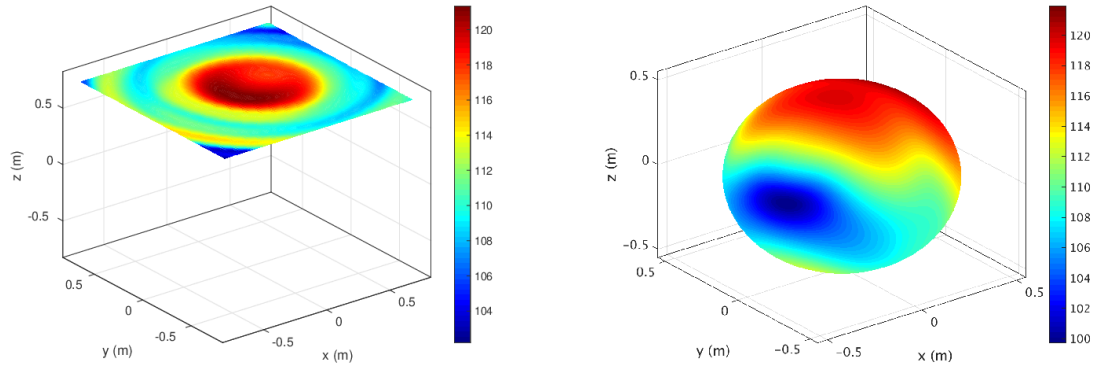
Dans cette étude, l'ensemble de la surface extérieure du système est considérée pour y appliquer une approche acoustique de type éléments de surface (BEM) pour calculer le champ acoustique rayonné par la structure dans l'air ambiant. Les vitesses surfaciques normales en tout point de la structure sont récupérées et les vitesses aux points de connection entre le disque et les plaquettes sont moyennées et projetées selon le vecteur normal local. Une FFT est estimée sur toutes les vitesses normales  $\dot{\mathbf{X}}_n$  sur une partie du régime établi à l'issue de l'intégration temporelle. Les  $k$  principales contributions fréquentielles  $\mathbf{f}_{BEM} = \{f_{BEM}^1 \dots f_{BEM}^k\}$  sont sélectionnées selon un algorithme déjà éprouvé dans les études [17, 18].

Les calculs BEM sont ensuite lancés pour chacune de ces fréquences. Ces fréquences peuvent être les fréquences fondamentales des instabilités  $f_1$  ou  $f_2$ , leurs harmoniques  $nf_1$  ou  $mf_2$  (avec  $n > 1$  et  $m > 1$  entiers), ou des combinaisons linéaires  $m \times f_1 + n \times f_2$  (avec  $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ ).

$$\dot{\mathbf{X}}_n(t) \approx \sum_{i=1}^k \dot{\mathbf{X}}_n^i(t) = \sum_{i=1}^k a_{BEM}^i \cos(\omega^i t) + b_{BEM}^i \sin(\omega^i t) \quad , \text{avec } \omega^i = 2\pi f_{BEM}^i \quad (10)$$

Pour chaque composante  $\dot{\mathbf{X}}_n^i$ , la méthode BEM calcule d'abord les pressions surfaciques associées  $\mathbf{P}_s^i$ , puis le champ de pression  $\mathbf{P}^i$  sur tout champ extérieur de points d'observation. Le champ acoustique final  $\mathbf{P}_{ext}$  sera alors la somme de chacune de ces contributions fréquentielles individuelles :  $\mathbf{P}_{ext} = \sum_{i=1}^k \mathbf{P}^i$ . Nous pouvons ensuite accéder au champ d'intensité acoustique  $\mathbf{L}_{BEM}^p = 10 \log_{10}(\mathbf{P}_{ext}^* \mathbf{P}_{ext} / P_{ref}^2)$ , avec  $P_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} Pa$ .

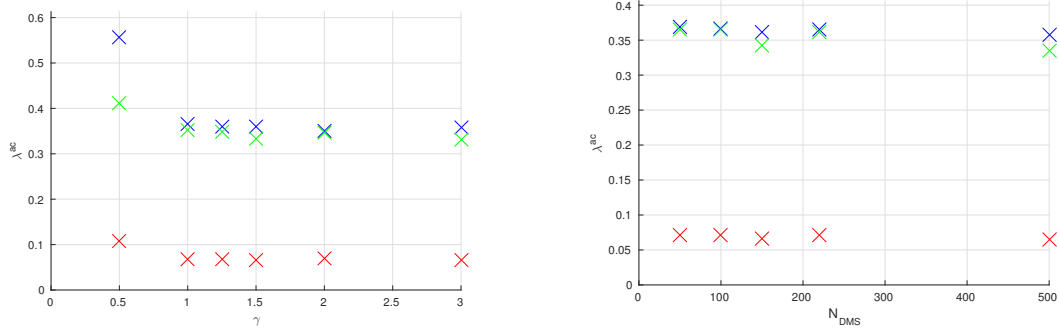
Trois principales surfaces d'observation sont définies : la première est un carré parallèle au disque placé à une distance  $Z_{carr}$  du disque, la seconde est une sphère centrée sur le système et de rayon  $R_{sph}$  et la dernière est formée de deux plans verticaux et perpendiculaires entre eux en contact avec le système à leur base et s'élevant à une hauteur  $Z_{haut}$ . Le raffinement de ces maillages d'observation est choisi de



(a) Intensité acoustique (dB) émise sur le carré à une distance de  $Z_{carr} = 0,75m$ , largeur de  $1.5m$

(b) Intensité acoustique (dB) émise sur la sphère de rayon  $R_{sph} = 0.5m$

FIGURE 5 – Intensité acoustique émise sur le régime établi,  $\mu = 0.8$



(a) Evolution d'un critère d'erreur relative pour la réduction de Craig et Bampton

(b) Evolution d'un critère d'erreur relative pour la réduction DMS, avec  $\gamma = 1.5$

FIGURE 6 – Evolution d'un critère d'erreur relatif  $\lambda^{ac}(f)$  basé sur la décomposition sur des wavelet 2D des motifs acoustiques, pour le carré : '—', la sphère : '—' et les plans verticaux : '—'

telle façon que la maille soit environ 6 fois plus petite que la plus petite longueur d'onde de  $\mathbf{f}_{BEM}$ , ce qui correspond à la fréquence la plus haute choisie.

## 6.2 Comparaison des figures acoustiques

Les calculs acoustiques BEM sont ensuite menés grâce au logiciel open-source OpenBEM [7], comme illustré Fig. 5. Afin d'évaluer la convergence des calculs acoustiques en fonction des tailles de bases de réduction, une décomposition des motifs acoustiques sur les différentes surfaces d'observation sur une base 2D de wavelet est utilisée en suivant l'algorithme de Mallat [11, 12, 3]. On peut observer qu'une bonne convergence du calcul transitoire permet d'obtenir des figures acoustiques déjà plutôt bien convergées, seuls les détails du champ acoustique seront affectés par un changement de la taille des bases de réduction comme illustré Fig. 6.

## 7 Conclusion

Cette étude illustre une procédure numérique basée sur la réduction par double synthèse modale permettant de réduire très efficacement les temps de calcul pour un système comportant des interfaces frottantes fixes. La convergence du modèle réduit a été étudiée au niveau de la stabilité, des vibrations transitoires et du champ acoustique rayonné dans le cas d'un système mécanique de frein pour l'étude du crissement.

## 8 Remerciements

J.-J. Sinou tient à remercier le support de l'Institut Universitaire de France.

### Références

- [1] S. Besset, J.-J. Sinou, *Modal reduction of brake squeal systems using complex interface modes*, Mechanical Systems and Signal Processing, **85**, 896-911, 2017.
- [2] R. Craig, M. Bampton, *Coupling of substructures for dynamic analyses*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, **6**, 1313-1319, 1968.
- [3] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Communications on pure and applied mathematics, **41**, 909-996, 1988
- [4] R.A. Ibrahim, *Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos Part 1 : mechanics of contact and friction*, Applied Mechanics Review **47**, 209-226, 1994.
- [5] R.A. Ibrahim, *Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos part 2 : Dynamics and modeling*, Applied Mechanics Review **47**, 227-253, 1994.
- [6] M. Jean, *The non-smooth contact dynamics method*, Computer methods in applied mechanics and engineering, **177**, 235-257, 1999.
- [7] P.M. Juhl, V.C. Henriquez. *OpenBEM*, [Online.] available : <http://www.openbem.dk>.
- [8] N.M. Kindkaid, O.M. O'Reilly, P. Papadopoulos, *Automotive disc brake squeal*, Journal of Sound and Vibration **267**, 105-166, 2003.
- [9] X. Lorang, *Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV*, Ph. D. Thesis, Ecole Polytechnique, 2007.
- [10] A. Loyer, *Etude numérique et expérimentale du crissement des systèmes de freinage ferroviaires*, Ph. D. Thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2012.
- [11] S. Mallat, *A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation*, IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, **11**, 674-693, 1989
- [12] S. Mallat, *Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models*, IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing, **37**, 2091-2110, 1989
- [13] M. Monteil, S. Besset, J.-J. Sinou, *A double modal synthesis approach for brake squeal prediction*, Mechanical Systems and Signal Processing, **70-71**, 1073-1084, 2016.
- [14] H. Ouyang, W. Nack, Y. Yuan, F. Chen, *Numerical analysis of automotive disc brake squeal : a review*, International Journal of Vehicle Noise and Vibration, **1**, 207-231, 2005.
- [15] J.-J. Sinou, *Transient non-linear dynamic analysis of automotive disc brake squeal - On the need to consider both stability and non-linear analysis*, Mechanics Research Communications **37**, 96-105, 2010.
- [16] J.-J. Sinou, S. Besset, *Simulation of transient nonlinear friction-induced vibrations using complex interfaces modes : application to the prediction of squeal events*, Shock and Vibrations, 2017.
- [17] K. Soobbarayen, S. Besset, J.-J. Sinou, *A simplified approach for the calculation of acoustic emission in the case of friction-induced noise and vibration*, Mechanical Systems and Signal Processing, **15** (50-51), 732-756, 2015.
- [18] K. Soobbarayen, S. Besset, J.-J. Sinou, *Noise and vibration for a self-excited mechanical system with friction*, Applied Acoustics, **74**, 1191-1204, 2013.
- [19] G. Vermot des Roches, *Frequency and time simulation of squeal instabilities. Application to the design of industrial automotive brakes*, Ph. D. Thesis, Ecole Centrale Paris, 2011