

Contrôle de la dispersion du champ de contrainte par une approche basée sur le Halo pour la modélisation 3D par Éléments Discrets d'un composite biosourcé

D. Moukadiri^{1,2}, W. Leclerc¹, M. Guessasma¹, E. Bellenger¹, F. Druesne²

¹ Université de Picardie Jules Verne, LTI, EA 3899 MIM, 48 Rue d'Ostende, 02100 Saint-Quentin

² Université de Technologie de Compiègne, Roberval, CNRS FRE 2012, Centre de Recherche de Royallieu CS 60319 - 60203 Compiègne Cedex

Résumé — L'objectif de la présente contribution est de développer une approche permettant de contrôler le niveau de dispersion du champ de contrainte locale dans la simulation 3D par la Méthode des Éléments Discrets (MED), basée sur le modèle cohésif de type poutre. L'approche introduite, que nous avons nommé Halo, permet de lier directement le niveau de dispersion de la contrainte locale pour un Éléments Discret (ED) au nombre d'EDs dans son voisinage. Dans un premier temps, l'approche est appliquée au cas d'un milieu homogène, puis, le cas d'un composite renforcé en fibres de lin est étudié.

Mots clés — Méthode des Éléments Discrets, Matériaux composites, Fibre de lin, Modélisation numérique, Dispersion de la contrainte, Caractérisation expérimentale.

1 Introduction

La MED introduite par [4], a tout d'abord été proposée pour la modélisation de la mécanique des roches au début des années 1980. Depuis, la MED a été développée pour simuler des problèmes de triboologie [8], dans le domaine de l'agriculture [12] ou encore pour des applications géotechniques [3]. Par ailleurs, cette méthode a également été utilisée pour modéliser des milieux continus homogènes et hétérogènes, et simuler l'initiation et la propagation de fissures [6]. Dans ce contexte, il a été établi dans la littérature que le modèle cohésif de type poutre [7] basé sur la théorie d'Euler-Bernoulli est plus adapté que le modèle ressort classique [9] pour modéliser le processus de fissuration [6] et à prendre en compte les hétérogénéités du domaine.

Les composites à base de fibres naturelles sont de plus en plus populaires dans l'industrie des composites. Grâce à leur respect des normes environnementales, leurs propriétés mécaniques intéressantes [2] et leur adhésion aux polymères, les fibres de lin sont aujourd'hui parmi les renforcements les plus utilisés en Europe. Notre objectif dans la présente contribution, est de développer une approche permettant de contrôler le niveau de dispersion du champ de contrainte locale dans la simulation 3D par la MED. En effet, le champ de contrainte résultant est hétérogène, même dans le cas où celui-ci est théoriquement homogène, ce qui peut mener à des problèmes dans la simulation mécanique à cause de la surestimation de la contrainte locale, notamment pour la prédiction de l'initiation et de la propagation de fissures. Pour cela, nous choisissons d'étudier le composite biosourcé à base de fibres de lin, lequel représente un cas d'étude intéressant et a fait l'objet de différents travaux dans la littérature. Pour contrôler la dispersion de la contrainte, nous introduisons une échelle mésoscopique à l'aide d'une approche que nous avons nommé Halo. Cette approche permet d'évaluer la contrainte dans un ED en prenant en considération la contribution de ses voisins, dans ce que nous appelons le Halo de l'ED. Dans un premier temps, l'approche est appliquée dans le cadre du milieu homogène, et comparée à la méthode des éléments représentatifs [7]. Le nombre d'EDs par Halo est ensuite lié directement au niveau de dispersion de la contrainte. Dans un second temps, le cas du composite biosourcé est étudié. Le module de Young longitudinal du matériau est expérimentalement quantifié et s'avère en accord avec celui obtenu numériquement. L'approche Halo est ensuite appliquée et le nombre convenable d'EDs pour contrôler la dispersion de la contrainte est discuté. De plus, des simulations par la Méthode des Éléments Finis (MEF) sont effectuées et sont en bon accord avec les résultats du modèle cohésif de type poutre associé à l'approche Halo.

2 Modèle cohésif de type poutre

2.1 Domaine équivalent

Afin d'être considéré comme un domaine équivalent à un milieu continu, un empilement granulaire doit permettre une représentation fidèle d'un milieu élastique à la fois homogène et isotrope. Pour cela, plusieurs hypothèses liées à la disposition des EDs doivent être vérifiées, et plusieurs paramètres doivent être contrôlés, à savoir le nombre de coordination Z , qui est défini comme étant le nombre moyen de contacts par ED, la compacité et la polydispersité. Dans la présente contribution, nous considérons les hypothèses du Random Close Packing lesquelles imposent un nombre de coordination de 6.2 et une compacité de 0.64 pour un réseau de sphères monodisperses. Cependant, dans le but d'éviter des effets directionnels indésirables et ainsi assurer l'isotropie du système, nous introduisons une légère polydispersité basée sur un modèle gaussien avec un coefficient de variation de 0.3.

2.2 Modèle cohésif de type poutre

Dans cette approche, le milieu continu est modélisé par un empilement granulaire répondant aux hypothèses précédentes, dans lequel la cohésion du milieu est décrite par un lien cohésif reliant chaque paire d'EDs en contact. Notre choix est de considérer un modèle cohésif de type poutre, plutôt qu'un modèle plus classique de type ressort [9], ce qui permet d'induire des motifs de fissuration plus réalistes. L'élément poutre utilisé est défini par un ensemble de paramètres microscopiques (Figure 1), à savoir la longueur L_μ , le module de Young E_μ , le module de cisaillement G_μ , la section transversale S_μ , les moments quadratiques axiaux $I_{\mu,1}$ et $I_{\mu,2}$, et le moment polaire J_μ . On définit le moment quadratique dans le plan de la section transversale de l'élément poutre par : $I_\mu = I_{\mu,1} = I_{\mu,2}$ et $J_\mu = J_\mu/2$.

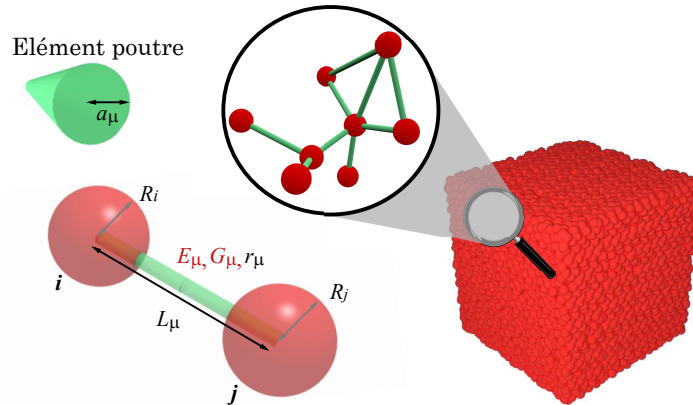


FIGURE 1 – Modèle cohésif de type poutre

Le rayon a_μ de la section de l'élément poutre reliant deux EDs en contact i et j est calculé en fonction des rayons R_i et R_j des deux EDs et d'un paramètre adimensionné $r_\mu \in]0,1]$ par l'équation (1).

$$a_\mu = r_\mu \frac{R_i + R_j}{2} \quad (1)$$

Ainsi, les propriétés microscopiques E_μ et r_μ permettant d'avoir un comportement macroscopique, caractérisé par le module de Young macroscopique E_M et le coefficient de Poisson macroscopique ν_M , sont définies à travers un processus de calibration présenté dans [7]. Dans le cas du modèle cohésif de type poutre, chaque lien cohésif reliant deux EDs i et j , est contrôlé par un vecteur de force interne, obtenu à l'aide de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Ce vecteur est exprimé par l'équation (5), où n , t et b représentent les directions principales du repère local de coordonnées cartésiennes lié au contact entre les deux EDs i et j . Les déplacements normaux et tangentiels associés à i et j sont respectivement $u_n^{i,j}$ et $u_{t,b}^{i,j}$, et les composantes de rotation en torsion et en flexion sont respectivement $\theta_n^{i,j}$ et $\theta_{t,b}^{i,j}$. Les raideurs normale k_n et tangentielle k_t classiques sont définies respectivement par les équations (2) et (3). Le paramètre s_n est associé à la torsion et est donné par l'équation (4).

$$k_n = \frac{E_\mu S_\mu}{L_\mu} \quad (2)$$

$$k_t = \frac{12 E_\mu I_\mu}{L_\mu^3} \quad (3)$$

$$s_n = \frac{2 G_\mu I_\mu}{L_\mu} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} F_n^{j \rightarrow i} \\ F_t^{j \rightarrow i} \\ F_b^{j \rightarrow i} \\ M_n^{j \rightarrow i} \\ M_t^{j \rightarrow i} \\ M_b^{j \rightarrow i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_t L_\mu}{2} & \frac{k_t L_\mu}{2} \\ 0 & 0 & k_t & 0 & -\frac{k_t L_\mu}{2} & -\frac{k_t L_\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_t L_\mu}{2} & 0 & \frac{k_t L_\mu^2}{3} & \frac{k_t L_\mu^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_t L_\mu}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_t L_\mu^2}{3} & \frac{k_t L_\mu^2}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n^i - u_n^j \\ u_t^i - u_t^j \\ u_b^i - u_b^j \\ \theta_n^i - \theta_n^j \\ \theta_t^i \\ \theta_t^j \\ \theta_b^i \\ \theta_b^j \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.3 Propriétés élastiques macroscopiques

On considère un motif cubique de longueur $L = 1\text{cm}$, également appelé Volume Élémentaire Représentatif (VER), qui représente un domaine homogène en respectant plusieurs hypothèses liées à la taille et l'isotropie du système. On note que la valeur de la longueur L du VER n'affecte pas le comportement mécanique macroscopique. La Figure 2 illustre l'essai numérique de traction réalisé pour évaluer les propriétés élastiques macroscopiques, à savoir le module de Young E_M et le coefficient de Poisson ν_M . Le VER est soumis à des conditions de symétrie et à une vitesse constante V appliquée sur une face donnée (Figure 2). La force de réaction F est ensuite évaluée en additionnant les contributions des EDs appartenant à la face opposée à celle sollicitée.

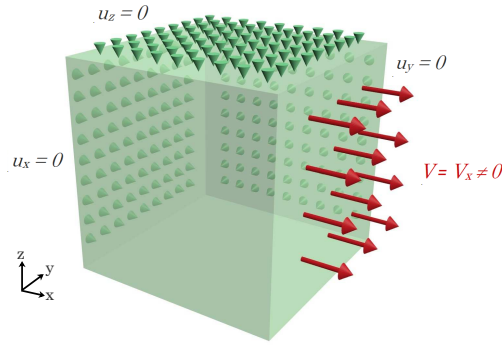


FIGURE 2 – VER cubique avec conditions de symétrie et vitesse imposée

Les propriétés élastiques macroscopiques peuvent être déterminées par les équations suivantes :

$$E_M = \frac{F}{S \varepsilon_T} \quad (6)$$

$$\nu_M = \frac{-\varepsilon_T}{\varepsilon_L} \quad (7)$$

où S est la section transversale du VER sur laquelle la force F est extraite, ε_L et ε_T sont respectivement les déformations longitudinale et transversale.

2.4 Dispersion du champ de contrainte

2.4.1 Tenseur de contrainte

Le tenseur de contrainte est évalué à l'échelle de l'ED à l'aide d'un tenseur de Cauchy équivalent $\bar{\sigma}_i^p$, proposé par [13] pour les simulations de dynamique moléculaire et reformulé pour la MED [5] :

$$\bar{\sigma}_i^p = \frac{1}{2V_i} \sum_{j \in Z_i} \frac{1}{2} (d_{ij} \otimes f_{ij} + f_{ij} \otimes d_{ij}) \quad (8)$$

où f_{ij} est le vecteur des forces de cohésion appliquées à l'ED i par l'ED j , d_{ij} est le vecteur des positions reliant les deux centres de i et j , V_i est le volume de l'ED i , et Z_i est son nombre de coordination. On note que la symétrie du tenseur de contrainte dans la formulation proposée par [5] est imposée, d'où le double produit tensoriel dans l'équation 8. Nous définissons le volume de représentation d'un ED i par le rapport de son volume réel V_i à la compacité du milieu discret ϕ . Afin de respecter le volume du milieu continu modélisé, nous considérons le tenseur de contrainte $\bar{\sigma}_i$ associé au volume de représentation de i au lieu de son volume réel, par l'expression suivante :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\phi}{2V_i} \sum_{j \in Z_i} \frac{1}{2} (d_{ij} \otimes f_{ij} + f_{ij} \otimes d_{ij}) \quad (9)$$

2.4.2 Dispersion du champ de contrainte

Nous effectuons l'essai numérique de traction sur le VER homogène présenté dans la section 2.3 avec $V_x = 10^{-5}$ m/s. La dispersion de la contrainte est évaluée à l'aide du coefficient de variation (CoV_σ), qui est le rapport entre l'écart type et la moyenne de la contrainte locale de tous les EDs dans le domaine. Dans un premier temps, nous étudions la sensibilité du champ de contrainte locale aux paramètres microscopiques E_μ et r_μ . Un ensemble de paires de paramètres microscopiques (E_μ, r_μ) est testé, avec $E_\mu \in [2 \text{ GPa}, 1000 \text{ GPa}]$ et $r_\mu \in [0.1, 0.9]$. Les résultats ne montrent aucun effet de E_μ sur le CoV_σ . Cependant, nous remarquons que le CoV_σ est plus important quand r_μ est plus petit (Figure 3.a), autrement dit quand le coefficient de Poisson est plus important. Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à l'effet de la densité de l'empilement granulaire sur la dispersion du champ de contrainte.

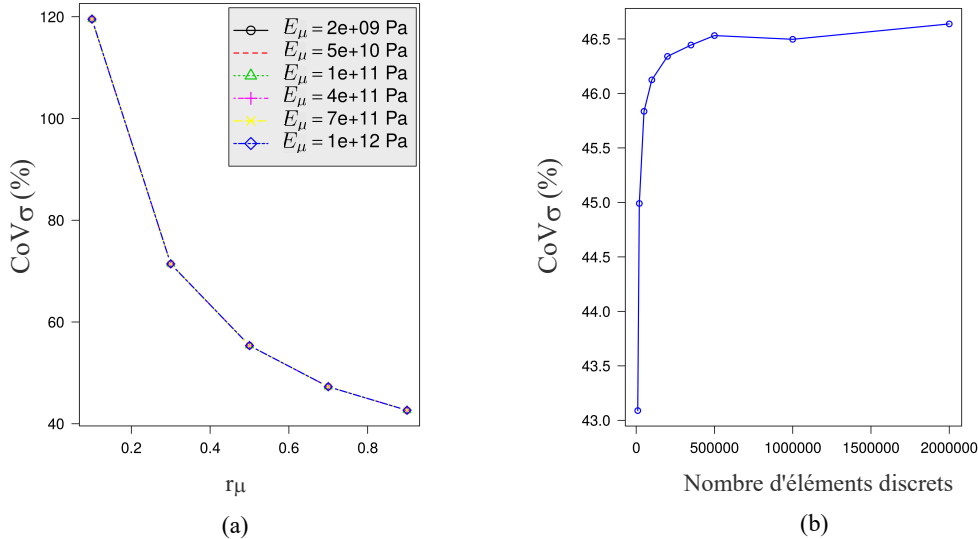


FIGURE 3 – Influence des paramètres microscopiques E_μ et r_μ (a) et du nombre d'EDs (b) sur la dispersion du champ de contrainte

Nous utilisons $E_\mu = 220.2$ GPa et $r_\mu = 0.72$, ce qui conduit à un comportement macroscopique caractérisé par un module de Young $E_M = 69.5$ GPa et un coefficient de Poisson $\nu_M = 0.2$. Ces propriétés correspondent au verre de silice, ici utilisé à titre d'exemple académique. La Figure 3.b montre que le CoV_σ atteint 46.6% même si le champ de contrainte dans le domaine étudié est théoriquement homogène, ce qui a été vérifié par la MEF. Nous remarquons que le CoV_σ converge lentement à partir d'une

densité de 700 000 EDs, ce qui est en bon accord avec les résultats de [7]. Nous estimons que nous quantifions correctement le niveau de dispersion à partir d'un nombre minimal d'EDs permettant d'éviter tout effet lié à la densité de l'empilement sur les propriétés mécaniques. En se basant sur ce résultat, tous les calculs présentés dans ce qui suit sont effectués en utilisant une densité de 700 000 EDs.

3 L'approche Halo

3.1 Présentation de l'approche Halo

La surestimation de la contrainte influence la simulation mécanique et conduit à précipiter certains phénomènes mécaniques, notamment l'initiation et la propagation des fissures. Pour cette raison, nous proposons une approche basée sur la notion du Halo, afin de contrôler le niveau de dispersion du champ de contrainte dans la simulation mécanique 3D par la MED.

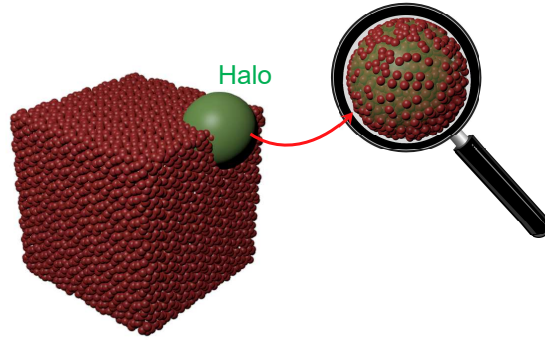


FIGURE 4 – Exemple de Halo introduit à l'échelle mésoscopique

L'idée de l'approche consiste à évaluer la contrainte locale d'un ED i en prenant en considération la contribution des EDs voisins dans ce que nous appelons le Halo de i . Ce dernier est une géométrie sphérique introduite à l'échelle mésoscopique, dont le centre coïncide avec celui de l'ED i . Le tenseur de contrainte de i est alors évalué sur le volume de son Halo V_i^h par l'équation (10) [10], où f_{ij} est le vecteur des forces de cohésion appliquées à i par j , et d_{ij} est le vecteur des positions reliant les deux centres de i et j .

$$\bar{\sigma}_i^h = \frac{1}{2V_i^h} \sum_{i \in V_i^h} \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} (f_{ij} \otimes d_{ij} + d_{ij} \otimes f_{ij}) \quad (10)$$

3.2 Application de l'approche Halo au domaine homogène

Nous considérons le VER du verre de silice, pour lequel nous avons évalué la dispersion de la contrainte dans la section 2.4.2, soumis aux mêmes conditions aux limites que celles illustrées dans la Figure 2. Nous nous intéressons à l'influence du nombre d'EDs par Halo sur le CoV_σ . Les résultats montrent que plus on a d'EDs par Halo, autrement dit plus le rayon du Halo est important (Table 1), moins la contrainte est dispersée (Figure 5). Nous exprimons le rayon R_{Halo} du Halo dans la Table 1 en fonction du rayon de l'ED R_{ED} . Les résultats obtenus permettent de déterminer facilement le nombre requis d'EDs par Halo pour atteindre un niveau visé de dispersion du champ de contrainte. En effet, un premier indicateur de 10% de dispersion est atteint pour environ 70 EDs par Halo, ce qui est équivalent à un rayon du Halo égal à 5 fois le rayon de l'ED. Ainsi, un deuxième indicateur de 5% est atteint pour environ 270 EDs par Halo, ce qui est équivalent à un rayon de Halo égal à 8 fois le rayon de l'ED. Dans [7], l'auteur présente la méthode des éléments représentatifs, permettant d'évaluer la contrainte à l'aide d'un pavage fixe de polyèdres. Cette méthode est comparable à l'approche Halo. Toutefois, on peut remarquer que l'approche Halo (Figure 5) nécessite moins d'EDs par Halo pour atteindre un certain niveau de dispersion. De plus, la méthode des éléments représentatifs présente 3 autres inconvénients : le besoin de générer un maillage, l'adaptation du maillage à la géométrie et aux invariants du modèle, l'obtention d'un champ uniforme uniquement à l'échelle de l'élément représentatif et non à l'échelle de

l'ED. Ensuite, nous nous intéressons à l'effet du paramètre microscopique r_μ sur le CoV_σ , en utilisant différents rayons du Halo : 5, 10 et 15 fois le rayon de l'ED. Les résultats obtenus sont illustrés dans la Figure 6, et permettent de déterminer la taille du Halo convenable pour un r_μ donné et un CoV_σ visé.

TABLE 1 – Nombre d'EDs par Halo en fonction de son rayon

Rayon du Halo R_{Halo} ($\times R_{ED}$)	2	5	8	10	15	20
Nombre d'EDs par Halo	2	70	270	555	1770	3971

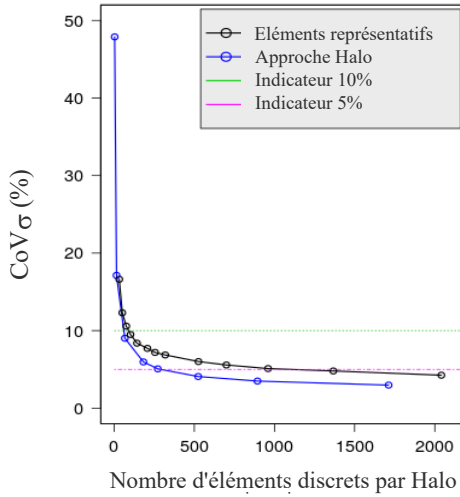


FIGURE 5 – Influence du nombre d'EDs par Halo ou par élément représentatif sur le CoV_σ

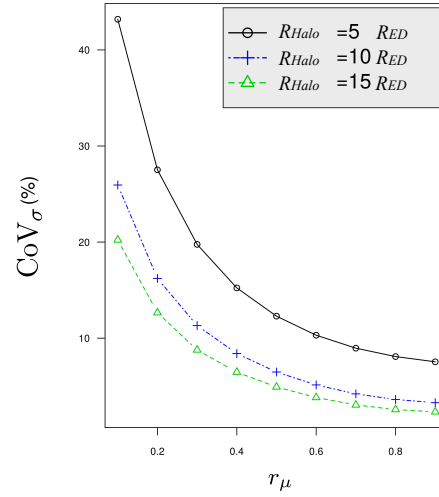


FIGURE 6 – Influence du paramètre r_μ et du rayon du Halo sur le CoV_σ

3.3 Application de l'approche Halo au domaine hétérogène

3.3.1 Caractérisation expérimentale du composite étudié

Dans la présente contribution, nous nous intéressons à un composite unidirectionnel (UD) biosourcé renforcé en fibres de lin. La matrice est constituée de résine époxy laquelle est une résine thermodurcissable souvent employée du fait de ses hautes performances mécaniques et de sa bonne résistance à la dégradation. Dans cette étude, nous utilisons la résine époxy biosourcée InfuGreen 810 fournie par Sicomin et produit avec environ 38% de carbone d'origine végétale. Ainsi, nous utilisons le FLAXPLY UD 180 fourni par LINEO, qui est un tissu de lin prêt à être imprégné et composé d'un ensemble de fils de lin UD. Le composite UD lin-époxy biosourcé est élaboré par le procédé Resin Transfer Molding. Des essais de traction longitudinale sont ensuite effectués sur le matériau, à l'aide de la corrélation d'images, pour quantifier un module de Young longitudinal macroscopique de 19.7 ± 1.8 GPa.

3.3.2 Modélisation numérique du composite lin-époxy biosourcé

Le matériau est modélisé par un VER de longueur $L = 1$ cm, composé d'une seule inclusion cylindrique représentant un fil de lin, dont l'axe est parallèle à la direction x , noyée dans la matrice époxy biosourcée. Nous rappelons que la valeur de L n'affecte pas le comportement mécanique macroscopique. L'époxy biosourcé est caractérisé par un module de Young macroscopique $E_M^m = 3.3$ GPa et un coefficient de Poisson $\nu_M^m = 0.33$. Les propriétés microscopiques correspondantes déterminées via le processus de calibration sont $E_\mu^m = 1950$ GPa et $r_\mu^m = 0.1$. En se basant sur le module de Young longitudinal expérimental défini dans la section 3.3.1 et en utilisant une simple loi des mélanges, nous évaluons le module de Young macroscopique du lin $E_M^f = 39.7$ GPa. Le coefficient de Poisson est lui fixé à $\nu_M^f = 0.3$. Les propriétés microscopiques correspondantes à l'inclusion sont alors $E_\mu^f = 5200$ GPa et $r_\mu^f = 0.18$. La fraction

volumique de l'inclusion est fixée à 45.5% afin de concorder avec celle du matériau fabriqué présenté dans la section 3.3.1. Par ailleurs, nous définissons le module de Young microscopique E_{μ}^{ψ} correspondant aux éléments poutres reliant chaque paire d'EDs à l'interface fibre-matrice ψ par : $E_{\mu}^{\psi} = (E_{\mu}^m + E_{\mu}^f)/2$. Nous réalisons un essai numérique de traction avec les mêmes conditions aux limites que celles illustrées dans la Figure 2, en utilisant un empilement de 700 000 EDs.

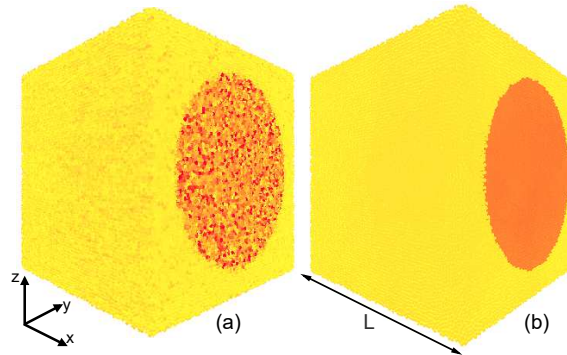


FIGURE 7 – Champ de contrainte dans le VER : avec 2 (a) et 1770 (b) EDs par Halo

Le module de Young déterminé numériquement en utilisant le modèle cohésif de type poutre est égal à 19.1 GPa, ce qui est en bon accord avec la valeur expérimentale obtenue de 19.7 GPa. Nous évaluons le champ de contrainte σ_x pour une déformation de $5.2e^{-4}$ et nous utilisons l'approche Halo pour contrôler le niveau de dispersion dans notre modèle, via l'étude de l'effet du nombre d'EDs par Halo. Comme attendu et discuté précédemment, plus le nombre d'EDs par Halo est élevé, plus le taux de dispersion est faible, comme illustré sur la Figure 7. D'après la Figure 6, le rayon du Halo approprié pour une dispersion inférieure à 4% est estimé à environ 15 fois le rayon de l'ED, ce qui est équivalent dans notre cas à 1770 EDs par Halo. On note que nous considérons la même taille de Halo dans la matrice et l'inclusion puisque les valeurs de r_{μ} dans les deux phases sont proches. Les Figures 8.a et 8.b représentent le champ de contrainte dans le VER du composite biosourcé dans le plan $x=L/2$, en utilisant l'approche Halo avec 2 et 1770 EDs par Halo respectivement.

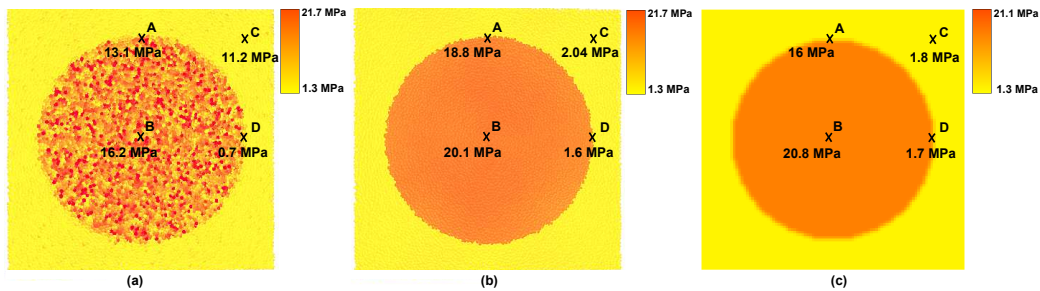


FIGURE 8 – Champ de contrainte dans le VER : résultats du modèle cohésif de type poutre avec 2 (a) et 1770 (b) EDs par Halo et résultats éléments finis (c) (plan $x=L/2$)

A des fins de comparaison, l'échelle des isovaleurs utilisée dans les Figures 8.a et 8.b sont les valeurs extrêmes obtenues dans le cas de 1770 EDs par Halo. Ces images démontrent l'efficacité de l'approche Halo pour lisser le domaine et diminuer le niveau de dispersion de la contrainte. Par ailleurs, le même essai de traction numérique est reproduit en utilisant la MEF. Nous utilisons un maillage régulier composé de 1 million de voxels (chaque voxel est divisé en 5 tétraèdres) ce qui est proche de la densité de l'empilement granulaire utilisé composé de 700 000 EDs. D'un point de vue quantitatif, les valeurs de contrainte extraites aux positions A, B, C et D dans le plan $x = L/2$ pour 1770 EDs par Halo sont assez proches des prédictions de la MEF aux mêmes positions (Figure 8.c). De plus, les valeurs extrêmes obtenues en utilisant le modèle cohésif de type poutre sont en bon accord avec celles obtenues en utilisant la MEF, pour un Halo composé d'environ 1770 EDs où $\sigma_{x_{min}} = 1.3$ MPa et $\sigma_{x_{max}} = 21.7$ MPa, par rapport à 2 EDs par Halo où $\sigma_{x_{min}} = -14.2$ MPa et $\sigma_{x_{max}} = 130.6$ MPa. On peut donc conclure qu'un Halo composé de 1770 EDs, dont le rayon est égal à 15 fois le rayon de l'ED, est convenable pour lisser le champ de

contrainte obtenu par le modèle cohésif du type poutre, ce qui est en bon accord avec les résultats de la section 3.2.

4 Conclusion

Les travaux réalisés dans la présente contribution montrent l'efficacité de l'approche Halo pour contrôler le niveau de dispersion du champ de contrainte locale dans la modélisation discrète des milieux homogène et hétérogène. En perspective, afin de prendre en compte la variabilité des propriétés mécaniques dans la simulation numérique des composites biosourcés, le couplage de notre modèle 3D par la MED avec l'approche probabiliste Certain Generalized Stresses Method [11] est à développer.

Financement

La présente contribution est réalisée dans le cadre du projet VARIATION (N°REG16021), financé par la région Hauts-de-France et par le Fonds Européen de Développement Régional (FEDER).

Références

- [1] D. André and I. Iordanoff and J. Charles and J. Neauport. *Discrete element method to simulate continuous material by using the cohesive beam model*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 113-128(213), 2012.
- [2] C. Baley and A. Bourmaud. *Average tensile properties of French elementary flax fibers*, Materials Letters, 159-161(122), 2014.
- [3] C. Chen and G. McDowell and N. Thom. *Discrete element modelling of cyclic loads of geogrid-reinforced ballast under confined and unconfined conditions*, Geotextiles and Geomembranes, 76-86(35), 2012.
- [4] P. Cundall and O. Strack. *Discrete numerical model for granular assemblies*, Géotechnique, 47-65(29), 1979.
- [5] M. Jebahi and D. André and F. Dau and J. Charles and I. Iordanoff. *Simulation of Vickers indentation of silica glass*, Journal of Non-Crystalline Solids, 15-24(378), 2013.
- [6] B. Le and F. Dau and J. Charles and I. Iordanoff. *Modeling damages and cracks growth in composite with a 3D discrete element method*, Composites Part B : Engineering, 615-630(91), 2016.
- [7] W. Leclerc. *Discrete element method to simulate the elastic behavior of 3D heterogeneous continuous media*, International Journal of Solids and Structures, 86-102(121), 2017.
- [8] C. Machado and M. Guessasma and V. Bourny. *Electromechanical prediction of the regime of lubrication in ball bearings using Discrete Element Method*, Tribology International, 69-83(127), 2018.
- [9] D. Potyondy and P. Cundall. *A bonded-particle model for rock*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 1329-1364, 41(8), 2004.
- [10] J. Weber. *Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents, application à la rhéologie de ces milieux*, Bulletin de Liaison des Ponts et Chaussées, 30, 1966.
- [11] Q. Yin, F. Druesne and P. Lardeur. *The CGSM for static analysis of multilayered composite plates with variability of material and physical properties*, Composite Structures, 360-368(140), 2016.
- [12] M. Zheng and L. Yaoming and X. Lizhang. *Discrete-element method simulation of agricultural particles' motion in variable-amplitude screen box*, Computers and Electronics in Agriculture, 92-99(118), 2015.
- [13] M. Zhou. *A new look at the atomic level virial stress : on continuum-molecular system equivalence*, Proceedings : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2347-2392(459), 2003.