

Une méthode de calcul CutFEM 1D-3D pour la prédiction efficace du comportement des matériaux composites à renforts fibreux.

P. Kerfriden^{1,2}, S. Claus³, I. Mihai², A.D. Jefferson²

¹ Centre des matériaux, Mines ParisTech, France, pierre.kerfriden@mines-paristech.fr

² Cardiff University, School of Engineering, UK, {mihai,jefferson}@cardiff.ac.uk

³ Department of Computer Science, University of Copenhagen, Denmark, susi.claus@di.ku.dk

Résumé — Nous présentons un modèle CutFEM pour les solides renforcés par des éléments structuraux unidirectionnels. Les champs de fibres sont décrits par la trace de l'espace élément fini du milieu 3D, sans contrainte de conformité. Le couplage est réalisé par dualité. Par s'assurer que les problèmes posés sur les fibres restent bien posés, nous introduisons une méthode de pénalisation consistante spécifique qui combine une intégration sur la bande d'éléments intersectés et la pénalisation intérieure. Les performances sont illustrées dans le cadre de la simulation des bétons à renforts fibreux.

Mots clés — CutFEM, couplage 1D-3D, renforts fibreux, LaTIn, rupture et endommagement, bétons auto-cicatrisant

Introduction

Nous présentons une méthode permettant de coupler un milieu élastique ambiant tridimensionnel et des renforts fibreux unidimensionnels, sans conformité de maillage. Plus précisément, les fibres, supposées rectilignes et ne possédant aucune résistance en flexion, peuvent couper les éléments de manière arbitraires, et leurs extrémités peuvent être localisées au milieu des éléments. Contrairement aux approches classiques utilisées pour prendre en compte la rigidité additionnelle apportée par les renforts unidimensionnels (voir par exemple la discussion proposée dans [1]), les fibres posséderont ici leur cinématique propre [2, 3], ce qui nous autorisera à décrire des glissements relatifs et à construire des lois de couplage avancées. En particulier nous développons dans cet article un modèle de couplage inélastique de type frottement de Coulomb. La cinématique de fibres est décrite par la trace de l'espace élément fini de la matrice à la géométrie des fibres, dans l'esprit des méthodes de domaine implicite de type CutFEM [4, 5]. Bien que les méthodes CutFEM soient traditionnellement associées à des conditions de raccord de type pénalisation consistante entre les différents sous-domaines [6, 7, 8], nous développons ici une méthode primale-duale LaTIn [9, 10] pour lier les fibres au milieu ambiant, et intégrer la loi de raccord inélastique, comme nous l'avons proposé précédemment dans le cadre du traitement du contact unilatéral décrit sur des interfaces non-conformes dans [11] (voir aussi les propositions alternatives publiées récemment dans [12, 13])

Cette approche éléments finis non-conforme doit être stabilisée. Les techniques de stabilisation pour les calculs sur variétés immergées sont relativement immatures. Certains travaux ont néanmoins étudié la question dans le cadre des équations de Laplace-Beltrami [2] et dans le cadre des écoulements de fluides dans des réseaux de canalisations et de fissures [14, 15, 16]. Notre approche est celle d'une stabilisation strictement consistante. Premièrement, nous ajoutons de la diffusion dans la direction des fibres en pénalisant les sauts de gradient ("Ghost-penalty" [5]). Ceci permet d'éviter les problèmes d'instabilités numériques liées aux mauvaises coupes. Deuxièmement, nous bloquons les modes cinématiques à énergie nulle en pénalisant les gradients normaux. Des termes de stabilisation similaires sont proposés pour régulariser les champs duaux. Dans cet article, et après avoir introduit la méthode en détails, nous montrerons numériquement que l'approche proposée permet de contrôler les champs de fibres étendus, sans introduire d'artefacts numériques indésirables.

1 Composite à renforts fibreux unidimensionnels

1.1 Fibres 1D immergées dans une matrice 3D

Nous considérons le problème d'un matériau élastique en dimension $d \in \{2, 3\}$ renforcé par n_f fibres linéiques unidimensionnelles. Le composite occupe domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. La $i^{\text{ème}}$ fibre occupe domaine

$$\Gamma_f^i = \left\{ x \in \Omega \mid x = P_1^i + \alpha \frac{(P_2^i - P_1^i)}{\|P_2^i - P_1^i\|_2}, \alpha \in [0, 1] \right\}, \quad (1)$$

où P_1^i et P_2^i sont deux éléments de \mathbb{R}^d . Nous définissons $t_f^i = \frac{(P_2^i - P_1^i)}{\|P_2^i - P_1^i\|_2}$. Le champ t_f est un champ défini sur Γ_f dont la restriction à Γ_f^i est t_f^i . Nous définissons $\Gamma_f = \bigcup_{i=1}^{n_f} \Gamma_f^i$ et nous supposons que les fibres ne se touchent pas : $\Gamma_f^i \cap \Gamma_f^j = \{\}$ if $i \neq j$. Le bord de Ω est représenté par $\partial\Omega$. Il est composé d'une partie Dirichlet $\partial\Omega_d$ et de la partie Neumann complémentaire $\partial\Omega_n$. Le champ $u_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est le déplacement de la matrice du composite. u_m est recherché dans l'espace de Sobolev $\mathcal{U}_m = \mathcal{H}^1(\Omega)$. Le déplacement de la $i^{\text{ème}}$ fibre est $u_f^i : \Gamma_f^i \rightarrow \mathbb{R}^d$, et nous introduisons également $u_f : \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ de Γ_f dont la restriction à $\Gamma_f^i \subset \Gamma_f$ est u_f^i . Le champ u_f est recherché dans l'espace produit $\mathcal{U}_f = \prod_{i=1}^{n_f} \mathcal{H}^1(\Omega_f^i)$.

L'analyse nonlinéaire en temps sera réalisée sur un intervalle de pseudo-temps $\mathcal{T} = [0, T]$. Nous supposons que les conditions initiales $u_m(\cdot, 0)$ and $u_f(\cdot, 0)$ sont homogènes. Au temps $t \in \mathcal{T}$, le triplet solution $(u_m(t), u_f(t), \lambda(t)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}_f \times \mathcal{Z}$ doit vérifier le principe variationnel suivant : pour toute paire $(\delta u_m, \delta u_f) \in \mathcal{U}_m \times \mathcal{U}_f \times \mathcal{Z}$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_s u_m : C : \nabla_s \delta u_m dx + \int_{\Gamma_f} k_f \nabla_f u_f : \nabla_f \delta u_f dx - \int_{\Gamma_f} \lambda \cdot (\delta u_m - \delta u_f) dx \\ = \int_{\Omega} f_d \cdot \delta u_m dx + \int_{\partial\Omega_n} t_d \cdot \delta u_m dx, \end{aligned} \quad (2)$$

sous condition de respect des conditions de Dirichlet $u_m = u_d$ sur $\partial\Omega_d$ (impliquant une restriction supplémentaire sur le choix du champ test correspondant). Le champ λ est une densité d'efforts linéiques caractérisant les efforts appliqués par les fibres sur la matrice. Dans la formulation précédente, nous avons utilisé le symbol $\mathcal{Z} = \mathcal{L}^2(\Gamma_f)$. Nous avons également utilisé $\nabla_s \cdot = \frac{1}{2} (\nabla \cdot + (\nabla \cdot)^T)$ et ∇_f est l'opérateur gradient projeté défini par $\nabla_f \cdot = (t_f \otimes t_f) : \nabla \cdot$. Les champs $f_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ représente une densité d'effort volumique connue, et $t_d : \partial\Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un champ connu d'efforts de surface. Finalement, $k_f \in \mathbb{R}$ représente la rigidité élastique des fibre, et $C \in (\mathbb{R}^d)^4$ est le tenseur de Hooke correspondant à l'élasticité isotope. Pour la suite nous définissons l'opérateur saut $[u] := u_m - u_f$, où nous supposons implicitement l'existence du produit cartésien u entre u_m et u_f .

1.2 Couplage fibres/matrice inélastique

Le couplage fibre/matrice est supposé parfait dans les directions normales aux fibres *i.e.*

$$\Pi_f^\perp [u] := (I_d - t_f \otimes t_f)[u] = 0 \quad \text{in } \partial\Gamma_f, \quad (3)$$

Pour la suite, nous séparons formellement le champ λ de la manière suivante :

$$\lambda = \Pi_f \lambda + \Pi_f^\perp \lambda := (I_d - \Pi_f^\perp) \lambda + \Pi_f^\perp \lambda = (t_f \otimes t_f) \lambda + \Pi_f^\perp \lambda =: \lambda_f^\Pi + \Pi_f^\perp \lambda, \quad (4)$$

L'effort de couplage axial λ_f^π est indéterminé pour le moment. Nous introduisons un modèle de plasticité parfaite qui lie cette quantité au glissement axial $[u]^\Pi := \Pi_f [u]$. Pour cela, nous supposons que la paire $(u_m(t), u_f(t))$ satisfait le principe de dissipation maximum, sujet à la contrainte suivante :

$$f_f(\lambda^\Pi) := |\lambda^\Pi| - Y \leq 0 \quad \text{in } \Gamma_f, \quad (5)$$

où Y est l'unique paramètre du modèle de plasticité. Les conditions de Tucker associées à ce problème d'optimisation peuvent alors être écrites de la façon suivante :

$$f_f(\lambda^\Pi) \leq 0 \quad f_f(\lambda^\Pi) [\dot{u}]^\Pi = 0 \quad \text{sign}(\lambda^\Pi) [\dot{u}]^\Pi \leq 0. \quad (6)$$

2 Formulation éléments finis coupés primale/duale

2.1 Éléments finis coupés CutFEM [4, 6]

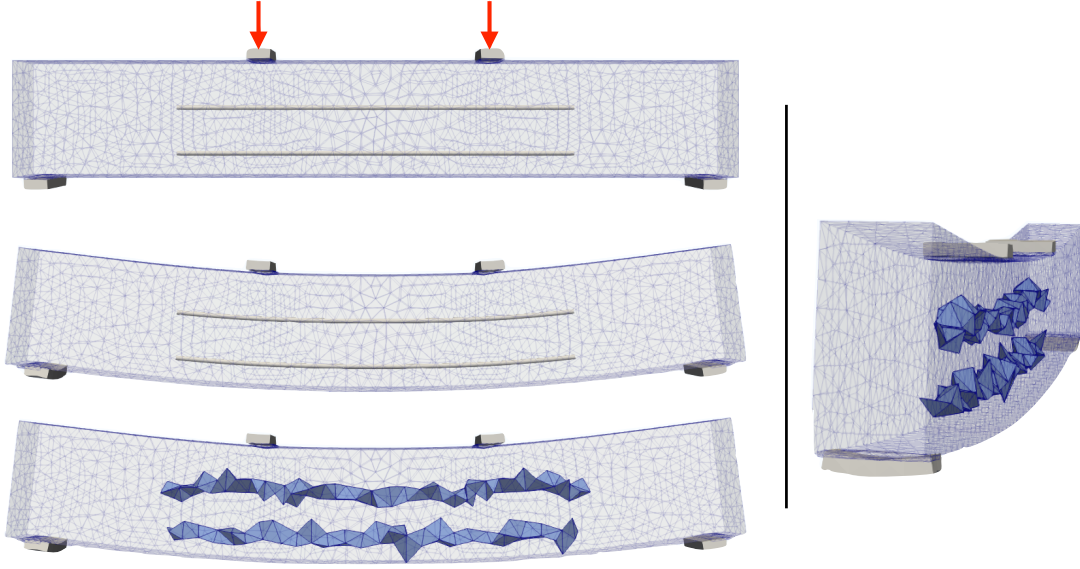


FIGURE 1 – Une poutre en flexion 4 points, renforcée par deux éléments élastiques avec couplage plastique rigide. La figure en bas à gauche et celle de droite représente le domaine fictif : l'ensemble des éléments tétraédriques coupés par une des fibres.

On intègre les équations du problème en temps par le schéma d'Euler implicite. \mathcal{T} est découpé en n_t pas de temps de longueur ΔT . La grille de temps résultant de ce procédé est $\mathcal{T}_{\Delta t} = \{t_0, t_1, \dots, t_{n_t}\}$.

Espaces éléments finis fictifs. Nous introduisons une triangulation \mathcal{T}_h du domaine (h est le diamètre de la plus petite sphère contenant les éléments de \mathcal{T}_h). Ω . L'espace élément fini $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}_m$ est défini par $\mathcal{U}_h := \{u \in C^0(\Omega) \mid u|_K \in \mathcal{P}^1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}$. Nous définissons également l'ensemble \mathcal{G}_h des éléments ayant une intersection non-nulle avec Γ_f : $\mathcal{G}_h := \{K \in \mathcal{T}_h \mid K \cap \Gamma_f \neq \emptyset\}$. Le domaine correspondant est $\Gamma_{f,h} := \bigcup_{K \in \mathcal{G}_h} K$. Les champs définis sur les fibres immergées seront approximés par la restriction des champs éléments finis "volumiques" à \mathcal{G}_h . Nous définissons l'espace élément fini étendu (au sens 1D étendu au volume des éléments avoisinant) \mathcal{W}_h par $\mathcal{W}_h := \{u \in C^0(\mathcal{G}_h) \mid u|_K \in \mathcal{P}^1(K) \forall K \in \mathcal{G}_h\}$. Les termes de régularisation de type pénalisation fantôme requièrent la définition de l'ensemble des facettes coupées : $\mathcal{F}_I := \{F = K \cap K' : K \in \mathcal{G}_h \text{ and } K' \in \mathcal{G}_h\}$

Formulation éléments finis stabilisée. Au temps t_n , $n > 0$, nous recherchons une solution approchée $u_h := (u_{m,h}, u_{f,h}, \lambda_h, \tilde{\lambda}_h, [\tilde{u}_h]) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{W}_h \times \mathcal{W}_h \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$. La dépendance au temps est omise, sauf pour les quantités au temps t_{n-1} , qui sont représentées par l'exposant $*$.

La formulation éléments finis proposées emploie une formulation mixte à deux échelles. L'espace \mathcal{Z} est décomposé de manière additive en la restriction de \mathcal{W}_h à Γ_h et l'espace supplémentaire correspondant. En suivant ce principe, la projection \mathcal{L}^2 stabilisée et étendue $\tilde{\lambda}_h \in \mathcal{W}_h$ du champ dual $\tilde{\lambda}_h \in \mathcal{Z}$ est défini par

$$\forall \delta \lambda_h \in \mathcal{W}_h, \quad (\lambda_h - \tilde{\lambda}_h, \delta \lambda_h)_{\mathcal{L}^2(\Gamma_h)} + s_{\heartsuit}(\lambda_h, \delta \lambda_h) = 0 \quad (7)$$

Le quintuplet solution $(u_{m,h}, u_{f,h}, \lambda_h, \tilde{\lambda}_h, [\tilde{u}_h])$ devra satisfaire les conditions de Dirichlet pour $u_{m,h}$ et la condition variationnelle suivante. Pour tout $(\delta u_{m,h}, \delta u_{f,h}) \in \mathcal{U}_h \times \mathcal{W}_h$,

$$a_h((u_{m,h}, u_{f,h}), (\delta u_{m,h}, \delta u_{f,h})) - (\lambda_h, [\delta u_h])_{\mathcal{L}^2(\Gamma_f)} = l_h((\delta u_{m,h}, \delta u_{f,h})). \quad (8)$$

Ce principe variationnel est complétement par une loi de type Signorini pour les quantitiés $\tilde{\lambda}_h$ axiales,

$$\text{locally in } \Gamma_f, \quad \begin{cases} f_f \left(\tilde{\lambda}_h^\Pi \right) \leq 0 \\ f_f \left(\tilde{\lambda}_h^\Pi \right) \cdot ([\tilde{u}_h]^\Pi - [\tilde{u}_h^*]^\Pi) = 0 \\ \text{sign} \left(\tilde{\lambda}_h^\Pi \right) ([\tilde{u}_h]^\Pi - [\tilde{u}_h^*]^\Pi) \leq 0, \end{cases} \quad (9)$$

et par $d - 1$ contraintes scalaires pour les directions normales aux fibres $\Pi_f^\perp [\tilde{u}_h] = 0$ (localement sur les fibres). Finalement, le système est fermé par la relation

$$(\lambda_h - \tilde{\lambda}_h) - \gamma([u_h] - [\tilde{u}_h]) = 0. \quad (10)$$

qui régularise les champs \tilde{u}_h en pénalisant leur distance aux quantités u_h correspondantes. Le paramètre $\gamma = \frac{1}{L} \left(\frac{EL^{d-2}k_f}{EL^{d-2}+k_f} \right)^{-1} \gamma_{nd}$, où E est le module de Young de la phase matricielle, L est une longueur caractéristique du problème, et γ_{nd} doit être strictement positif.

Dans la formulation précédente, les formes linéaire et bilinéaires introduites sont les suivantes

$$a_h((u_{m,h}, u_{f,h}), (\delta u_{m,h}, \delta u_{f,h})) = \int_{\Omega} \nabla_s u_{m,h} : C : \nabla_s \delta u_{m,h} dx + \int_{\Gamma_f} k_f \nabla_f u_{f,h} : \nabla_f \delta u_{f,h} dx + s_{\sharp,h}^{\heartsuit}(u_{f,h}, \delta u_{f,h}) \quad (11)$$

$$l_h((\delta u_{m,h}, \delta u_{f,h})) = \int_{\Omega} f_d \cdot \delta u_{m,h} dx + \int_{\partial\Omega_n} t_d \cdot \delta u_{m,h} \quad (12)$$

2.2 Stabilisation par intégration sur domaines fictifs et pénalisation fantôme

Sans stabilisation (*i.e* définition de $s_{\sharp,h}^{\heartsuit}$, $s_{\heartsuit,h}$ et raccord mixte (10)), la formulation CutFEM 1D-3D proposée souffre de plusieurs sources d'instabilités numériques :

1. Certains éléments peuvent avoir une intersection de mesure très faible avec l'une des fibres, conduisant à une perte de contrôle du champ déplacement étendu $u_{f,h}$ des fibres (étendu de 1D à 3D).
2. La cinématique étendue des fibres, et celle des multiplicateurs de Lagrange correspondant, permettent la représentation de modes de déformation linéaires à énergie nulle.
3. Des modes oscillants peuvent apparaître dans le champ de multiplicateurs de Lagrange λ_h si la formulation ne respecte pas la condition LBB.

Nous proposons les termes de régularisation suivants :

$$s_{\sharp,h}^{\heartsuit}(u_{f,h}, \delta u_{f,h}) = \beta k_f h^{2-d} \sum_{F \in \mathcal{F}_I} \int_F ([\nabla_f \Pi_f u_{f,h}] \cdot n_F) ([\nabla_f \Pi_f u_{f,h}] \cdot n_F) dx + \zeta k_f h^{1-d} \int_{\mathcal{G}_h} \nabla_f^\perp u_{f,h} : \nabla_f^\perp \delta u_{f,h} dx \quad (13)$$

où n_F représente le vecteur normal à la facette de l'élément. Le premier terme permet de résoudre le problème de coupure avec faible support, en accord avec la pénalisation fantôme classique [5]. Nous choisissons, comme souvent, $\beta = 0.1$. Notons que seule la partie axiale du champ est régularisée. Régulariser la partie normale, qui n'est pas associée à une énergie de déformation des fibres, conduit à des résultats de qualité dégradée. Le second paramètre permet de bloquer les modes à énergie nulle. Notons le lien avec la formulation proposée dans [2]. Typiquement, $\zeta = 10^{-5}$ est suffisant. L'opérateur gradient orthogonal est défini par $\nabla_f^\perp u_{f,h} = \nabla_f u_{f,h} - \sum_{i=1}^d (\nabla_f(u_{f,h} \cdot e_i) \cdot t_f) e_i \otimes t_f$.

Nous procédons de la même manière pour régulariser le champ des multiplicateurs de Lagrange, *i.e.*

$$s_{\heartsuit,h}(\lambda_h, \delta \lambda_h) = \beta \lambda \frac{EL^{d-2}k_f}{EL^{d-2}+k_f} h^{4-d} \sum_{F \in \mathcal{F}_I} \int_F ([\nabla_f \Pi_f \lambda_h] \cdot n_F) ([\nabla_f \Pi_f \lambda_h] \cdot n_F) dx + \zeta \lambda \frac{EL^{d-2}k_f}{EL^{d-2}+k_f} h^{3-d} \int_{\mathcal{G}_h} \nabla_f^\perp \lambda_h : \nabla_f^\perp \delta \lambda_h dx \quad (14)$$

Comme montré dans [11] dans le cadre du contact unilatéral entre solides déformables, le premier terme permet de contrôler les oscillations numériques des multiplicateurs de Lagrange. Le facteur d'échelle en h est différent, car $S_{\heartsuit,h}$ est chargé de régulariser un complément de Schur.

3 Solver itératif LaTIn avec avec découplage algorithmique.

Pour résoudre le système d'équations éléments fini d'écrit précédemment, nous développons un algorithme LaTIn [9, 10] dédié qui nous permettra notamment (i) d'intégrer la loi de plasticité "parfaitement rigide" sans nécessiter de régularisation élastique supplémentaire, et (ii) de séparer les problèmes de fibres et matrices, permettant ainsi de mieux contrôler le conditionnement des systèmes algébriques linéaires.

Les variables primales/duales d'intérêt sont $F_h = (F_{m,h}, F_{f,h}) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{W}_h$, qui représentent $F_{m,h} \equiv \lambda_h$ et $F_{f,h} \equiv -\lambda_h$, et $W_h = (W_{m,h}, W_{f,h}) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{W}_h$ qui représente la restriction de u_h à la bande d'éléments \mathcal{G}_h . Une itération de LaTIn est composée des étapes décrites ci-dessous.

Etape linéaire. Connaissant $S^{k-\frac{1}{2}} := \left(W_h^{k-\frac{1}{2}}, F_h^{k-\frac{1}{2}} \right)$, nous cherchons $S^k := \left(W_h^k, F_h^k \right)$ satisfaisant (8), où nous imposons que $W_h^k = u_h^k$ dans \mathcal{G}_h . Pour fermer le système d'équations, nous satisférons également la direction de descente

$$\begin{cases} \left(F_{m,h}^k - F_{m,h}^{k-\frac{1}{2}} \right) + \gamma \left(W_{m,h}^k - W_{m,h}^{k-\frac{1}{2}} \right) = 0 \\ \left(F_{f,h}^k - F_{f,h}^{k-\frac{1}{2}} \right) + \gamma \left(W_{f,h}^k - W_{f,h}^{k-\frac{1}{2}} \right) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Notons que par construction, les problèmes linéaires associés aux fibres et à la matrice sont découplés. Le paramètre scalaire $\gamma = \frac{\gamma_{nd}}{E}$ a été introduit précédemment.

Etape locale. Connaissant $S^k := \left(W_h^k, F_h^k \right)$, nous cherchons $S^{k+\frac{1}{2}} := \left(W_h^{k+\frac{1}{2}}, F_h^{k+\frac{1}{2}} \right)$ satisfaisant (7), (9), (10), où nous introduisons $\tilde{W}_h^{k+\frac{1}{2}} = \left(\tilde{W}_{m,h}^{k+\frac{1}{2}}, \tilde{W}_{f,h}^{k+\frac{1}{2}} \right) \in \mathcal{Z}^2$ et $\tilde{F}_h^{k+\frac{1}{2}} = \left(\tilde{F}_{m,h}^{k+\frac{1}{2}}, \tilde{F}_{f,h}^{k+\frac{1}{2}} \right) \in \mathcal{Z}^2$ et remplaçons toutes les occurrences de u_h par W_h , et de λ_h par $F_{m,h}$. Nous imposons également que $F_{m,h}^{k+\frac{1}{2}} + F_{f,h}^{k+\frac{1}{2}} = 0$ dans \mathcal{G}_h et que (7) s'applique à $F_{m,h}^{k+\frac{1}{2}}$ et à $F_{f,h}^{k+\frac{1}{2}}$. Pour fermer le système d'équations, nous introduisons la direction de recherche montante

$$\begin{cases} \left(F_{m,h}^{k+\frac{1}{2}} - F_{m,h}^k \right) - \gamma \left(W_{m,h}^{k+\frac{1}{2}} - W_{m,h}^k \right) = 0 \\ \left(F_{f,h}^{k+\frac{1}{2}} - F_{f,h}^k \right) - \gamma \left(W_{f,h}^{k+\frac{1}{2}} - W_{f,h}^k \right) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Comme montré dans [11], l'étape locale régularisée est simplement une étape locale LaTIn classique, suivie d'une étape de régularisation linéaire globale (inversions d'une matrice de mass stabilisée correspondant au domaine fictif des fibres).

4 Exemples numériques

4.1 Poutre en béton renforcée par des fibres elastomères actives

Motivation Une des application motivant le travail numérique décrit dans cet article est illustré sur la figure 2.

Résultats Le problème étudié est représenté sur la Figure 1. On s'assure *a priori* que les domaines fictifs des différentes fibres ont une intersection vide, de façon à ne pas créer de couplage artificiel. Les 4 supports ne transmettent que des efforts normaux en compression (contact unilatéral parfait, traité par

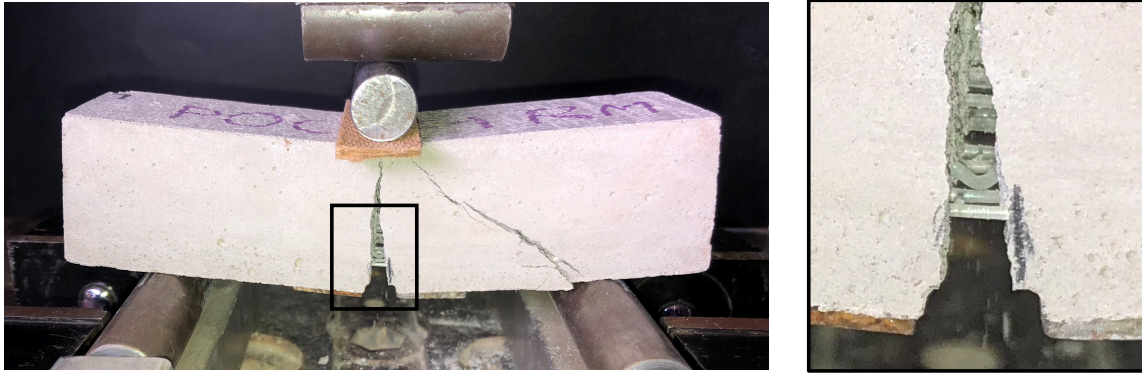


FIGURE 2 – Béton auto-cicatrisant. Les fibres en polymère se contractent lorsqu’elles sont chauffées au-dessus d’une température critique, générant des efforts de tension permettant de contrôler les ouvertures de fissures.

la méthode LaTIn-CutFEM proposée dans [11]). Nous utilisons le code CutFEM [6] développée par S. Claus et A. Massing et basée sur la bibliothèque d’outils éléments finis FEniCS [17] pour générer nos résultats.

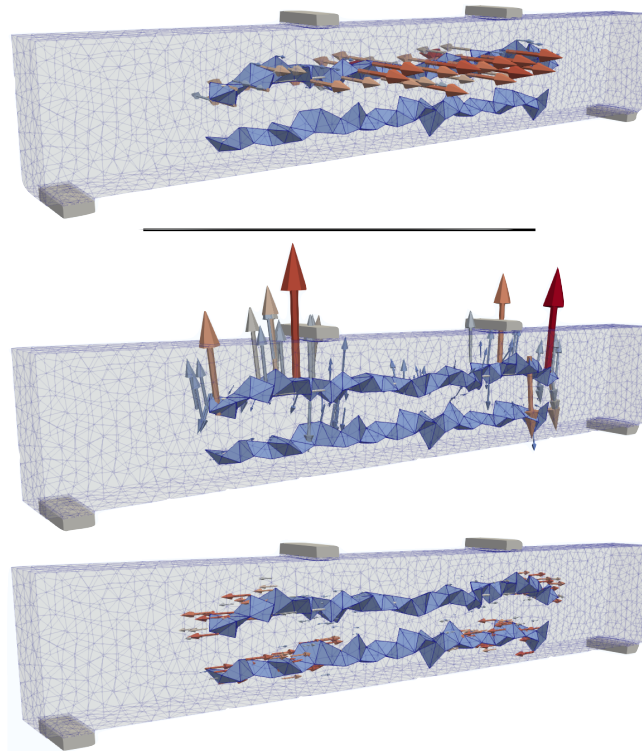


FIGURE 3 – Effet des termes de stabilisation de type “intégration sur le domaine fictif”.

Sur la Figure 3, en haut, on peut voir un mode de déformation non contrôlé apparaissant quand ζ est proche de zéro. Une petite valeur non nulle de ce paramètre permet de stabiliser la formulation, comme la montre la déformée du domaine fictif sur la Figure 3, en bas. La même observation est faite pour les multiplicateurs de Lagrange, dont l’amplitude explose quand ζ_λ est très petit (Figure 3, au milieu). Le contrôle des modes correspondant permet d’obtenir un belle distribution d’efforts purement axiale, représentée par les flèches, sur l’ensemble du domaine fictif, indiquant que le problème est numériquement bien posé (les multiplicateurs doivent s’annuler des les directions normales aux fibres, car il n’y a pas d’opposition à la satisfaction des contraintes de continuité cinématique correspondantes).

La restriction des multiplicateurs aux fibres 1D est représentés sur la figure 4. On décrit ces efforts à deux instants de la simulation en temps. Nous voyons au premier temps que la fibre du bas est chargée en traction pure, et que l’effort correspondant est borné (par le paramètre Y du modèle de plasticité),

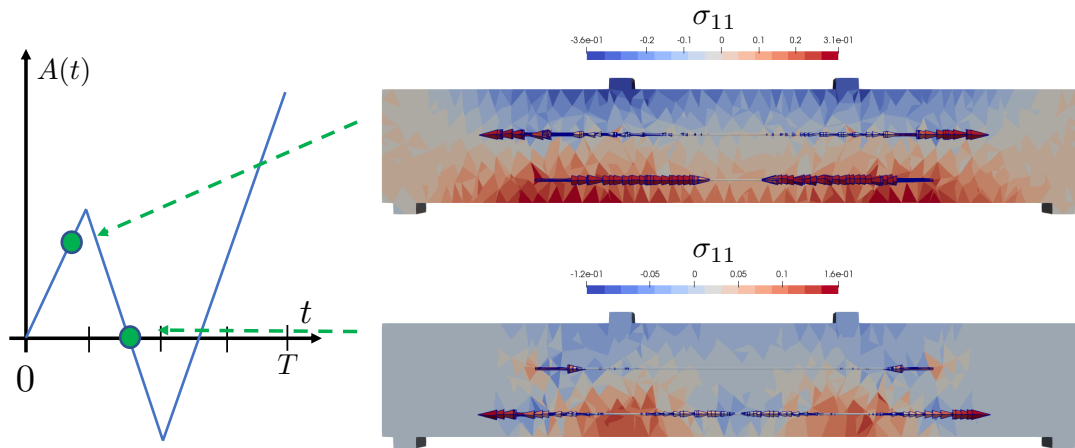


FIGURE 4 – Multiplicateurs de Lagrange, écoulement plastique et contraintes résiduelles.

indiquant qu'un écoulement plastique à lieu. Lors du retour à l'état neutre du système, on observe un état d'efforts résiduels dans les fibres et de contraintes résiduelles dans le matériau élastique.

4.2 Tests virtuels de rupture de matériaux : bétons à renforts fibreux courts

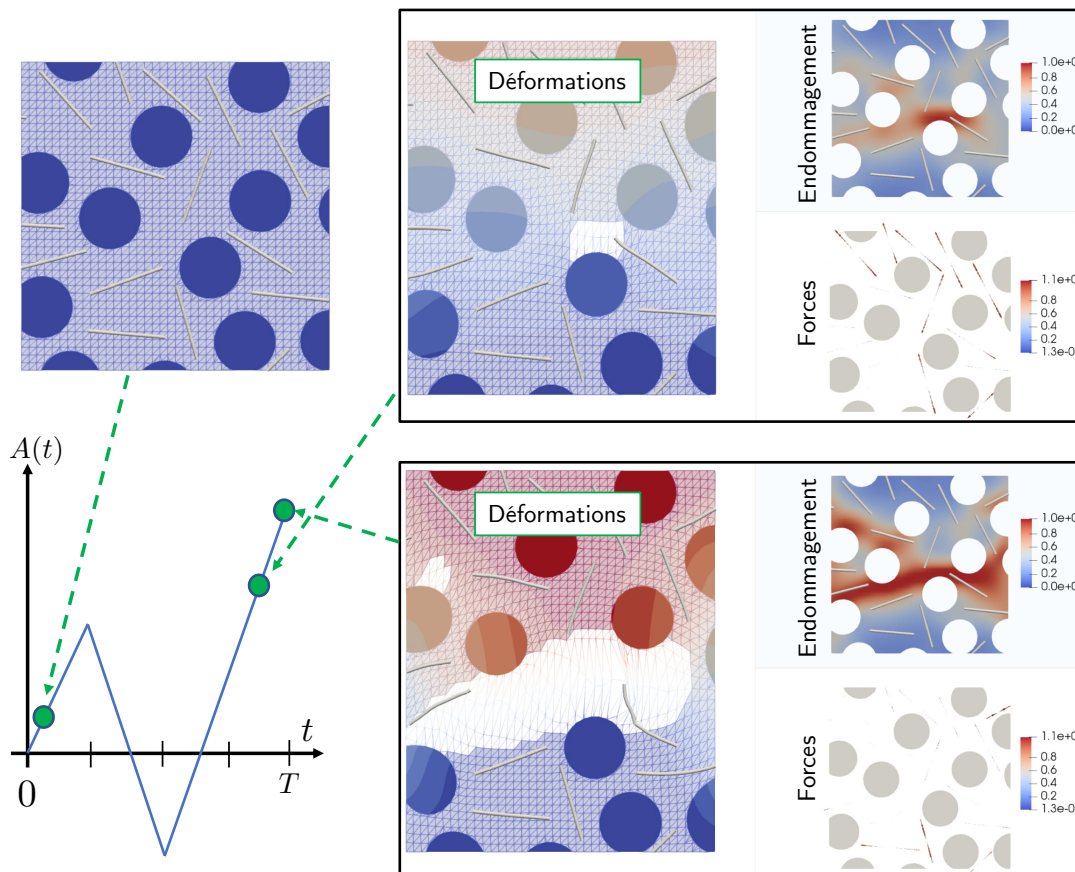


FIGURE 5 – Modèle numérique de l'endommagement dans un d'un béton à renfort fibreux.

Nous étendons la méthode au traitement de la rupture des matériaux composites particulières à renforcement fibreux courts et aléatoires. Le couplage entre matrice endommageable et inclusions parfaitement élastiques est réalisé par l'approche LaTIn-CutFEM [11]. Les fibres sont toujours élastiques, avec couplage inélastique rigide avec la matrice. L'endommagement est traité par le modèle à champ de phase décrit dans [18]. Les résultats présentés sur la Figure 5 indiquent que le couplage entre la méthode de variété immergée présentée précédemment et l'approche CutFEM-LaTIn multi-domaine ne pose pas de

difficulté particulière.

Références

- [1] B. Lé, G. Legrain, N. Moës. *Mixed dimensional modeling of reinforced structures. Finite Elements in Analysis and Design*, Finite Elements in Analysis and Design, 2017.
- [2] E. Burman, P. Hansbo, M.G. Larson, A. Massing, *Cut finite element methods for partial differential equations on embedded manifolds of arbitrary codimensions*, ArXiv e-prints, 2016.
- [3] F. Duboef, E. Béchet. *Embedded solids of any dimension in the X-FEM. Part I—Building a dedicated P1 function space* Finite Elements in Analysis and Design 130, 2017.
- [4] A. Hansbo, P. Hansbo, *A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 193(33-35) :3523–3540, 2004.
- [5] E. Burman, *Ghost penalty*, Comptes Rendus Mathématique, 348(21-22) :1217–1220, 2010.
- [6] E. Burman, S. Claus, P. Hansbo, M.G. Larson, A. Massing, *CutFEM : Discretizing geometry and partial differential equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 104(7) :472–501, 2015.
- [7] S. Claus, S. Bigot, P. Kerfriden, *A CutFEM method for Stefan-Signorini problems with application in pulsed laser ablation*, SIAM Journal on Scientific Computing, 2018.
- [8] F. Chouly, P. Hild, *A Nitsche-based method for unilateral contact problems : Numerical analysis*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 51(2) :1295–1307, 2013.
- [9] P. Ladevèze, A. Nouy, O. Loiseau, *A multiscale computational approach for contact problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191 :4869–4891, 2002.
- [10] O. Allix, P. Kerfriden, P. Gosselet, *On the control of the load increments for a proper description of multiple delamination in a domain decomposition framework*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 83 :1518–1540, 2010.
- [11] S. Claus, P. Kerfriden, *A stable and optimally convergent LaTin-CutFEM algorithm for multiple unilateral contact problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 113(6) :938–966, 2018.
- [12] E. Burman, P. Hansbo, M. Larson. *Augmented lagrangian finite element methods for contact problems*, ArXiv e-prints, 2016.
- [13] José Manuel Navarro-Jiménez, Manuel Tur, José Albelda, and Juan José Ródenas, *Large deformation frictional contact analysis with immersed boundary method*, Computational Mechanics, pages 1–18, 2018.
- [14] C D’Angelo, A Scotti, *A mixed finite element method for Darcy flow in fractured porous media with non-matching grids*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis 46 (2), 465-489, 2012
- [15] L. Formaggia, A. Fumagalli, A. Scotti, P. Ruffo, *A reduced model for Darcy’s problem in networks of fractures*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 48(4), 1089-1116, 2014.
- [16] E. Burman, P. Hansbo, M.G. Larson, K. Larsson, *Cut Finite Elements for Convection in Fractured Domains*, Computers and Fluids, 2018.
- [17] M.S. Alnaes, J. Blechta, J. Hake, A. Johansson, B. Kehlet, A. Logg, C. Richardson, J. Ring, M.E. Rognes, G.N. Wells, *The FEniCS Project Version 1.5*, Archive of Numerical Software, vol. 3, 2015.
- [18] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker, *Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 83(10) :1273–1311, 2010.