

Optimisation topologique de Structures Adaptatives (Bi-stables) en Mécanique Non-Linéaire

G. Capasso¹, S. Coniglio^{2,3}, M.Charlotte², J. Morlier²

¹ DMSM, ISAE-SUPAERO, Toulouse, France, gabriele.capasso@student.isae-supaero.fr

² Univ Toulouse, ISAE Supaero-INSAMines Albi-UPS, CNRS UMR5312, Institut Clément Ader, Toulouse, France, {joseph.morlier; miguel.charlotte, simone.coniglio}@isae-supaero.fr

³ Airbus Operations SAS, 316 Route de Bayonne - 31300 Toulouse France

Résumé — Ce travail de recherche présente une méthodologie pour l'optimisation topologique de structures adaptatives. Elle utilise la mécanique non linéaire comme brique essentielle pour changer l'état de la structure sous une sollicitation donnée (bi-stable). L'originalité repose principalement sur un environnement de développement Matlab basé sur la méthode *SIMP*. Le cas test est l'optimisation d'un profil d'aile 2D pour un micro-drone.

Mots clés — optimisation topologique, structures adaptatives, mécanique nonlinéaire.

1 Introduction

L'optimisation topologique s'affirme actuellement comme une solution de conception calcul très intéressante à la fois par la communauté scientifique et les industriels. Il s'agit d'une méthode numérique capable de supprimer la masse localement dans une structure, afin de satisfaire un objectif et des contraintes [13]. Le principe de base est de paramétrer la topologie du domaine étudié à travers des grandeurs virtuelles. En particulier, les méthodes les plus utilisées sont classiquement les méthodes *SIMP* (ou *density-based method* [12]) et lignes de niveau (*level-set based method* [1]).

Une autre innovation conduit à étudier des structures adaptatives (*morphing*), dites aussi à géométrie variable. Plusieurs projets de recherche ([7, 2, 4, 6]) ont démontré les avantages des *ailes adaptatives* par rapport aux architectures classiques avec surfaces de contrôle. En outre, le concept peut être utilisé aussi dans des applications biomédicales. Récemment un exemple est donné par [5], où un inverseur géométrique a été utilisé comme prothèse de substitution des ligaments du genou. Ce type de structure subit, en général, des grandes déformations. Par conséquent, les effets non-linéaires ne peuvent pas être négligés.

Pionnier en la matière, Pedersen [11] a démontré, sur plusieurs cas tests simplifiés, l'influence de l'introduction d'une mécanique non-linéaire sur l'optimisation topologique. Notre travail reprend le problème d'optimisation topologique posé par Bhattacharyya [5], concernant l'optimisation d'un profil NACA constitué d'un matériau à comportement non-linéaire, en y rajoutant des critères de dimensionnement en contraintes, et permettant ainsi d'obtenir une structure prête pour fabrication.

2 Définition du problème

L'objectif de cette recherche est la conception de structures adaptatives liées au domaine aéronautique et plus particulièrement des prototypes de micro-drones. Il s'agit d'une aile à profil très déformable, dont les sections suivantes définissent les propriétés matériaux et géométriques.

2.1 Matériau

Le matériau adopté est une gomme dont la loi de comportement suit un modèle Neo-Hookeen [10]. En particulier, sa densité d'énergie potentielle interne est localement le suivant en tout point X du domaine matériel avant déformation Ω :

$$\Phi[u] = \frac{1}{2}\lambda_0[\log(J)]^2 - \mu_0 \log(J) + \frac{1}{2}\mu_0[\text{tr}(C) - 3] \quad (1)$$

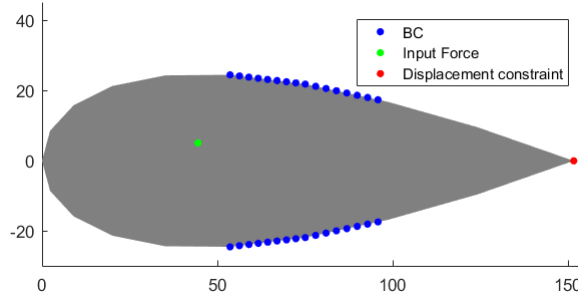


FIGURE 1 – Schéma du profil NACA 0033 sous sollicitation

Ici $J = \det(F)$ est le déterminant du gradient de déformation $F = I + \nabla u$, où I est le tenseur identité d'ordre 3 et u est le déplacement de X ; $tr(C)$ dénote la trace du tenseur de *Cauchy-Green* $C = F^T F$; les paramètres λ_0 et μ_0 représentent les constantes de Lamé du matériau.

2.2 Aile adaptative

La structure à analyser et optimiser est un profil NACA 0033. Son optimisation est notamment à effectuer sous l'action d'une force F horizontale sur la partie frontale, et de façon à obtenir un certain déplacement U_0 vertical négatif (i.e. vers le bas), au bord de fuite (cf. Fig. 1).

L'objectif est plus précisément de créer la structure la plus légère possible, en minimisant la masse (via la fraction volumique V) du domaine Ω ; le *volume fraction* V est défini comme le taux de remplissage du domaine, donc exprimable comme le rapport entre le volume du domaine non-vide et celui du domaine complet (vide et non-vide) Ω . La minimisation est réalisée additionnellement sous des contraintes de déplacement (minimal en valeur absolue) et de tenue en contraintes au sein de chaque élément, en bornant notamment les contraintes σ_{VMi} de *Von Mises* évaluées aux points de *Gauss* d'indices i . Ce problème est ainsi formalisé comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && V \\ \text{sous les contraintes :} &&& U_e \leq U_0 \\ &&& \sigma_{VMi} \leq \sigma_{lim} \quad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{2}$$

3 Méthodologie adoptée

Dans le cadre de ce projet de recherche un algorithme d'optimisation topologique dit *density-based* est utilisé et implémenté en *MATLAB*. Les méthodes utilisées sont présentées ci-après.

3.1 Algorithme SIMP

La méthode connue comme *Solid Isotropic Material with Penalization* (*SIMP*) est la brique de base du présent travail. Le domaine est discrétisé et l'analyse mécanique résolue par la méthode des éléments finis. En particulier on attribut à chaque élément une densité (virtuelle) $0 \leq \rho \leq 1$ qui décrit le taux de remplissage de l'élément. La finalité étant de calculer la distribution optimale des densités dans le domaine d'étude qui maximise (ou minimise) un certain objectif spécifique tout en respectant un ensemble de contraintes. On peut donc utiliser un optimiseur classique à base de gradient pour résoudre le problème d'optimisation sous contraintes.

Le pseudo-code décrivant la méthodologie *SIMP* montre la résolution itérative du problème d'optimisation topologique. En premier lieu on initialise l'optimiseur avec un vecteur des densités initiales. *SIMP* est une méthode "pixel-based" où les valeurs des densités varient continuellement entre 0 et 1. Un filtrage numérique est ensuite utilisé pour minimiser la sensibilité au maillage (*mesh-independency filter*). Ce concept amène à une distinction formelle entre densités numériques x et physiques ρ . Une fois initialisé, le filtre ne sera plus modifié.

À l'intérieur de la boucle principale, on trouve toutes les opérations nécessaires pour converger vers

Algorithm 1 Algorithme *SIMP*

Initialization :
Densities, mesh-independency filter
Main loop :
while convergence not reached **do**
FE Analysis
Objective and Constraints evaluation
Derivatives evaluation
Mesh-independency filter applied to sensitivity
MMA update of density
Mesh-independency filter applied to density
end while
Density results analysis

une solution optimale (optimum local). L'analyse par éléments finis est nécessaire à chaque itération pour pouvoir évaluer ensuite la valeur de l'objectif et/ou les contraintes du problème d'optimisation. En particulier, ici, les gradients sont évaluées à travers une méthode ajointe afin d'éviter des coûteuses différences finies.

À la fin de chaque itération, les densités sont mises-à-jour. L'optimisateur choisi est *Method of Moving Asymptotes (MMA)*, introduit pour la première fois par Svanberg [14] en 1987.

3.2 Paramétrage de la topologie

Une méthode basée sur la distribution de densité permet de décrire la topologie à travers la densité de chaque élément fini. On fait l'hypothèse que chaque densité affecte le module élastique de la façon suivante :

$$E = \rho^p E_0 . \quad (3)$$

Le paramètre p est un facteur de pénalisation généralement choisi égale à 3. Bien que la formulation (3) soit très simple, la garantie de la stabilité numérique n'est assurée que si $0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1$, la borne inférieure de ces relations d'inégalités permettant d'éviter la présence de zones à module élastique nul.

3.3 Analyse par éléments finis

Le problème de l'équilibre statique de la structure discrétisée par EF, sous chargement extérieure F_{ext} , est traité comme un autre sous-problème de minimisation de l'énergie potentielle totale du système mécanique par rapport aux déplacements nodaux U de la procédure EF. Cette énergie potentielle totale est donnée par la différence entre l'énergie interne de la structure (défini en Eq. (1)) et le travail de la force appliquée dont le vecteur de déplacements nodaux U_{app} est le dual :

$$E_{tot}[U] = \int \Phi[U] d\Omega - F_{ext} U_{app}$$

Variationnellement, la condition nécessaire de minimisation se traduit par la résolution de l'équation non-linéaire

$$R[U_F] = 0 \quad \text{avec} \quad R[U] \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\partial E_{tot}[U]}{\partial U} , \quad (4)$$

laquelle exprime le résidu R des forces généralisées via le gradient de E_{tot} par rapport aux déplacements nodaux U et U_F est une racine de R à identifier. Celle-ci peut être obtenue à l'aide d'un algorithme de résolution itératif d'analyse non-linéaire (Kim [8]) impliquant la hessienne de E_{tot} comme matrice de raideur tangentielle de la structure

$$K_T[U] \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\partial R[U]}{\partial U^T} \equiv \frac{\partial^2 E_{tot}[U]}{\partial U \partial U^T} .$$

Le schéma de résolution le plus commun est d'utiliser la méthode de Newton-Raphson. Dans un but d'implémentations simple et rapide de la méthode avec *MATLAB*, nous utilisons la fonction *fmincon* connu pour sa stabilité et robustesse.

3.4 Traitement des contraintes σ

On considère le second tenseur de contraintes de *Piola-Kirchoff* S , reliant les forces avec les surfaces, en considérant les deux dans le repère initial.

$$S = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial C} = \lambda_0 \log(J) C^{-1} + \mu_0 (I - C^{-1})$$

Le tenseur des contraintes de *Cauchy* est lui défini localement par :

$$\sigma = \frac{1}{J} F S F^T = \frac{1}{J} [\lambda_0 \log(J) I + \mu_0 (B - I)]$$

où B est le tenseur (à gauche) de *Cauchy-Green*, défini comme $B = F F^T$. La contrainte équivalente considérée dans ce travail est celle de *Von-Mises* et impliquant les contraintes de *Cauchy*. Toutefois, au lieu de considérer directement la contrainte locale, on applique une relaxation pour chaque élément :

$$\bar{g}_i = \rho_i \left(\frac{\sigma_{VMi}}{\sigma_{lim}} - 1 \right) \leq 0$$

Afin de rendre l'algorithme plus rapide, seule le maximum des contraintes équivalentes est pris en considération. Le *max* d'une fonction étant non-différentiable, on utilise l'approximation *lower bound* G_{KS}^l [9, 15] :

$$\max_i g_i \approx G_{KS}^l = \frac{1}{P} \log \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{P \bar{g}_i} \right)$$

3.5 Analyse de sensibilité adjointe

Dans cette section, l'évaluation des dérivées (gradients) de l'objectif et des contraintes à travers une méthode adjointe est décrite. L'objectif et les contraintes du problème d'optimisation dépendent, en générale, soit des densités ρ , soit des déplacements nodaux U_F solution du système d'Eq. (4). Le résidu est pris en compte dans le problème d'optimisation topologique via le Lagrangien suivant :

$$L[U, \rho, \lambda] = f[U, \rho] + \lambda^T R[U, \rho]$$

Ici f peut représenter soit une contrainte, soit l'objectif de la procédure d'optimisation topologique ; λ est le vecteur de multiplicateurs de *Lagrange* associé au vecteur résidu des forces généralisées $R[U]$; enfin $\{\cdot^T\}$ représente l'opérateur de transposition des matrices et vecteurs. On annule les influences réciproques entre ρ et U_F en posant :

$$\lambda^T = - \frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial R}{\partial U}^{-1} = - \frac{\partial f}{\partial U} K_T^{-1}$$

Finalement, on obtient (en simplifiant les notations de dépendance pour plus de visibilité) :

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial \rho} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial \rho} \quad (5)$$

Les gradients de l'objectif et des contraintes seront alors évalués en substituant dans l'Eq. 5 les expressions de V , U_e et G_{KS}^l .

4 Résultats et discussion

Dans cette section nous analysons les résultats relatifs au problème d'optimisation (2) du profil d'aile adaptative. Les paramètres utilisés sont reportés dans le tableau 1.

La topologie optimale est représentée en Figure 2. On peut distinguer quatre parties :

- *Front sector* : c'est le responsable de la redistribution des contraintes et le lien entre les deux régions où on impose les conditions aux limites ;

TABLE 1 – Paramètres par défaut du problème d’optimisation

Module d’Young E_0 [MPa]	15
Densité minimale ρ_{min}	0.1
Coefficient de Poisson ν	0.3
Lamé (constante 1) λ_0 [MPa]	8.65
Lamé (constante 2) μ_0 [MPa]	5.77
Contraintes mathématiques en déplacement U_0 [mm]	-21
Contraintes mathématiques en contraintes σ_{lim} [MPa]	1
Longueur de la corde c [mm]	150
Abscisse du point d’application de la force x_{app}/c	0.3
Ordonnée du point d’application de la force y_{app} [mm]	5
Intensité de la force appliquée F_{ext} [N/mm]	7
Direction de la force [rad]	0
Région d’application des conditions aux limites x/c [%]	35 – 65
Facteur de pénalisation p	3.0
Radius filter R_{min} [mm]	6.0

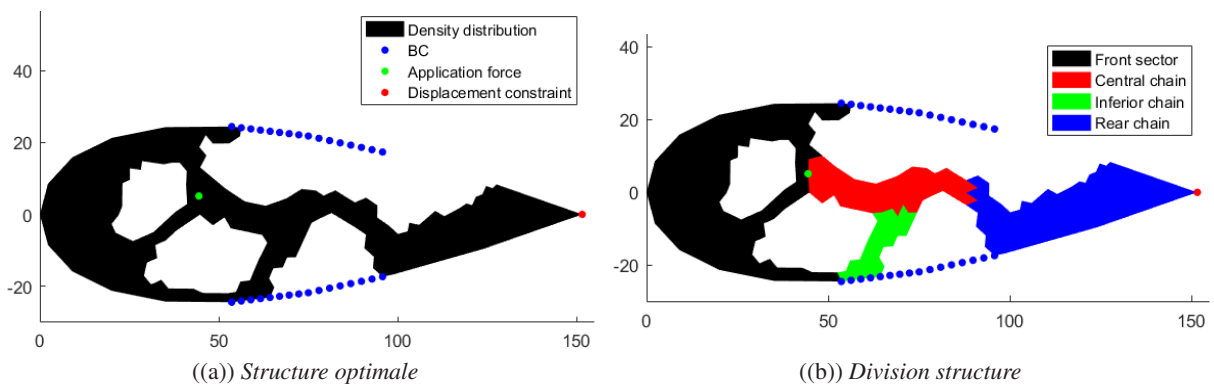


FIGURE 2 – Topologie optimale

- *Inferior chain* : il s'agit du lien entre structure centrale et conditions aux limites, qui garantie, donc, l'équilibre statique;
- *Rear chain* : ce secteur est le celui qui permet d'effectuer du mouvement, garantissant la fonction adaptative du profil;
- *Central chain* : cette partie est utilisé pour la transmission des efforts entre le point d'application de la force et la chaîne arrière; elle est aussi tenue en équilibre grâce à la chaîne inférieure.

La structure obtenue peut ensuite être imprimée en 3D par le processus de fabrication additive [5].

La structure déformée (sous chargement externe) ainsi que les distributions des contraintes microscopiques et macroscopiques sont visibles en Figure 3.

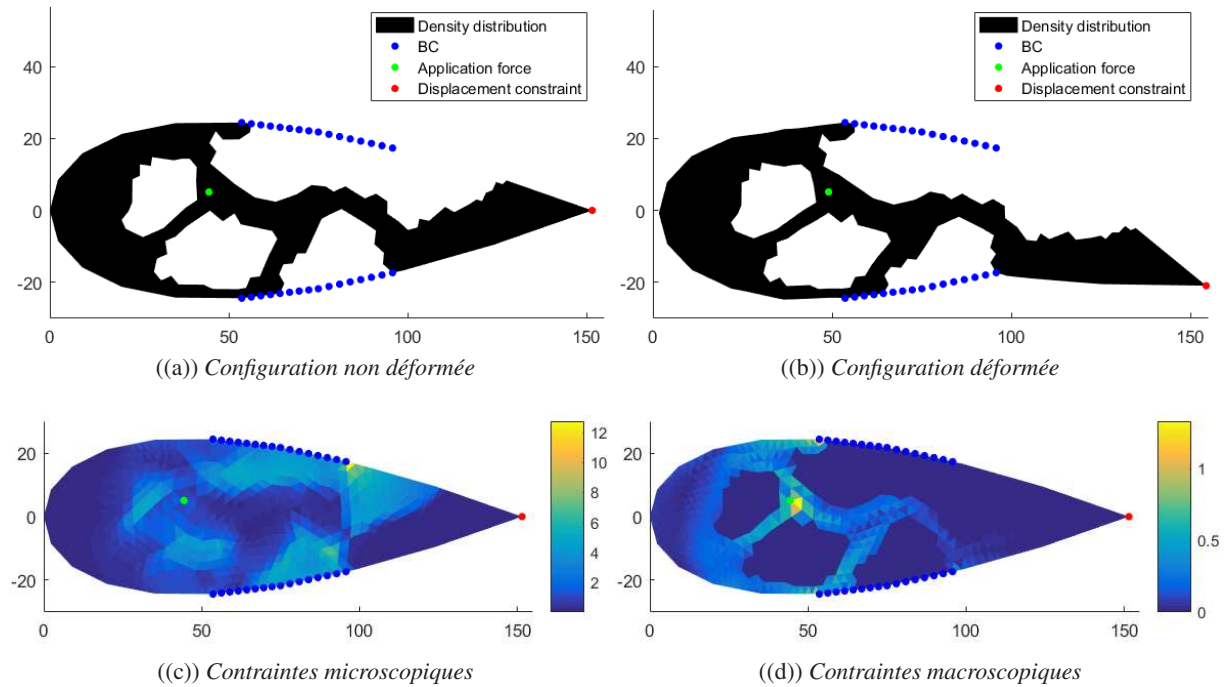


FIGURE 3 – Résultats relatifs à la structure optimale

Les différentes fonctions de chaque partie de la structure optimale obtenue ont été identifiées en partant de la configuration déformée via la distribution des contraintes macroscopiques.

La différence entre contraintes microscopiques et macroscopiques est bien visible en Figure 3.c et 3.d : la première distribution montre un pic dans les zones proches aux conditions aux limites, qui sont vides, donc pas réellement présentes dans la structure finale. Au contraire, les contraintes macroscopiques représentent bien ce qui l'état de déformation dans la structure finale.

En outre, la légère surcharge proche au point d'application de la force est certainement due à la combinaison de deux approximations : celle de la fonction de relaxation et celle de l'agrégation du maximum des contraintes.

5 Conclusions

Dans le cadre de ce projet de recherche, nous avons appliqué l'optimisation topologique sur un matériau suivant un comportement non-linéaire de type Néo-Hookéen. L'objectif principal est de concevoir un prototype d'aile de micro-drones à géométrie variable qui puisse se substituer l'architecture classique (ailerons). La principale nouveauté de ce travail est l'ajout de la contrainte de faisabilité (en contraintes de Von Mises), permettant d'obtenir une structure résistante aux efforts nominaux.

Les principaux résultats montrent une structure finale qui serait très compliquée à construire, mais qui constitue un point de départ pour la conception finale. Nous travaillons en parallèle sur des méthodes d'optimisation topologique explicite imbriquant dans la boucle de processus des contraintes issues de la fabrication additive. La fonction adaptative de l'aile peut être assurée par une structure très déformable, plutôt que par un mécanisme complexe et articulé. Ceci peut réduire les besoins de simulations

numériques complexes. L'application finale est la conception d'un système biomécanique bi-stable remplaçant les prothèses artificielles classiques. Les codes sont disponibles pour la communauté CSMA : <https://github.com/mid2SUPAERO/PIR-Gabriele-CAPASSO>

Références

- [1] G. Allaire and F. Jouve and A.-M. Toader, *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, Journal of computational physics, 194, 263 - 393, 2004
- [2] A. Airoidi, M. Crespi, G. Quaranti and G. Sala, *Design of a Morphing Airfoil with Composite Chiral Structure*, Journal of Aircraft, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 1008 - 1019, 2012
- [3] E. Andreassen, A. Clausen, M. Schevenels, B. S. Lazarov and O. Sigmund, *Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer Nature, 1-16, 2010
- [4] P. Bettini, A. Airoidi, G. Sala, L. Di Landro, M. Ruzzene and A. Spadoni, *Composite chiral structures for morphing airfoils : Numerical analyses and development of a manufacturing process*, Composites Part B : Engineering, Elsevier, 133-147, 2010
- [5] A. Bhattacharyya, C. Conlan-Smith and A. J. Kai, *Topology Optimization of a Bi-Stable Airfoil Using Nonlinear Elasticity*, 18th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2017
- [6] P. R. Budarapu, S. Sastry and R. Natarajan, *Design concepts of an aircraft wing : composite and morphing airfoil with auxetic structures*, Frontiers of Structural and Civil Engineering, Springer Nature, 394-408, 2016
- [7] S. M. Han, S. I. Kim and Y. Y. Kim, *Topology optimization of planar linkage mechanisms for path generation without prescribed timing*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer Nature, 501-517, 2017
- [8] N. H. Kim, *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Springer US, 2014
- [9] G. Kreiselmeier and R. Steinhauser, *Systematic control design by optimizing a vector performance index*, Computer aided design of control systems, 113 -117, 1980
- [10] R. W. Ogden, *Non-Linear Elastic Deformations*. Courier Corporation (2013). ISBN 978-0-486-31871-4.
- [11] C. B. W. Pedersen, T. Buhl and O. Sigmund, *Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 2683-2705, 2001
- [12] O. Sigmund, *A 99 line topology optimization code written in Matlab*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer Nature, 120-127, 2001
- [13] K. Suresh and A. M. Mirzendeheh, *A Hands-on Introduction to Topology Optimization*, Springer US, 2017
- [14] K. Svanberg, *The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 359-373, 1987
- [15] A. Verbart, M. Langelaar and F. van Keulen, *A unified aggregation and relaxation approach for stress-constrained topology optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer Nature, 663-679, 2016
- [16] D. Wagg, I. Bond, P. Weaver and M. Friswell, *Adaptive Structures – Engineering Applications*, John Wiley Sons Ltd, 2007