

Identification de fissures planes avec des données manquantes par la méthode de l'écart à la réciprocité

R. Ferrier¹, P. Gosselet¹, M.L. Kadri²

¹ LMT, ENS Paris-Saclay, CNRS, {ferrier,gosselet}@lmt.ens-cachan.fr

² ENIT-Lamsin, mohamedlarbi.kadri@enit.utm.tn

Résumé — On s'intéresse dans cette contribution à l'identification de fissures internes dans des pièces mécaniques à partir de mesures des déformations de celles-ci sous des sollicitations quasi-statiques. On utilise pour ce faire la méthode de l'écart à la réciprocité. Une procédure sera proposée afin de se passer de la nécessité, très contraignante pour cette méthode, d'avoir des mesures sur tout le bord du domaine considéré. Cette procédure sera étudiée numériquement sur des données synthétiques dans des cas 2D et 3D.

Mots clés — identification de fissures, écart à la réciprocité, problèmes inverses.

1 Problème d'identification de fissures

Le problème de l'identification de fissures macroscopiques internes dans des pièces mécaniques revêt à la fois un intérêt technologique dans le cadre du contrôle non-destructif, et scientifique en tant que problème mal posé. Les technologies disponibles actuellement sont très majoritairement basées sur l'inversion d'équations de propagation, comme l'échographie [1], ou la tomographie [2]. En effet, la propagation des ondes donne lieu à des phénomènes de réflexion et de transmission partielle particulièrement propices à l'identification de défauts.

Pourtant, dans certains cas d'applications, on aimerait pouvoir détecter des fissures à partir de chargements statiques ou quasi-statiques subis par la pièce, par exemple parce que ce sont les chargements auxquels la pièce est naturellement soumise dans son utilisation.

Considérons le problème statique direct : soit un domaine Ω dans lequel se trouve une fissure plane Σ , de plan Π . L'intersection de Π avec Ω est notée ω , et le bord de Ω est noté $\partial\Omega$. Ces notations sont illustrées sur la figure 1.

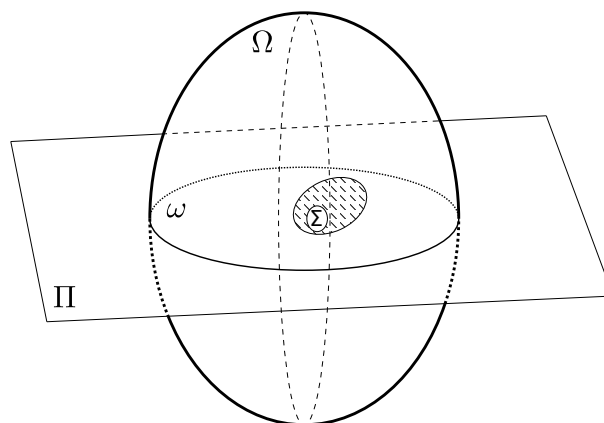


FIGURE 1 – Définition des éléments géométriques

Ce domaine est occupé par un solide élastique linéaire isotrope et homogène. Il est alors soumis séquentiellement à une série de chargements $(f_r)_{r=1..r_{max}}$ de Neumann auto-équilibrés. Si on note $(u_r)_{r=1..r_{max}}$ les champs déplacement solution, $\underline{\sigma}(u_r)$ la contrainte de Cauchy, \underline{g} l'opérateur de gradient symétrique et \mathbb{H} le tenseur de Hooke, le problème direct d'élasticité est représenté par les équations (1). On sait qu'il admet une solution unique pourvu que l'on interdise tout mouvement de corps rigide.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_r)) &= \underline{0} \text{ dans } \Omega \setminus \Sigma \\
\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_r) &= \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_r) \\
\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_r) \cdot \underline{n}_\Pi &= \underline{0} \text{ sur } \Sigma \\
\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_r) \cdot \underline{n} &= \underline{f}_r \text{ sur } \partial\Omega
\end{aligned} \tag{1}$$

Considérons à présent le problème inverse : on suppose que l'on connaît \underline{f}_r sur une partie Γ_n de $\partial\Omega$, et la trace de \underline{u}_r sur une partie Γ_d de $\partial\Omega$. On introduit de plus les complémentaires respectifs à $\partial\Omega$ de ces bords : $\Gamma_{\bar{n}}$ et $\Gamma_{\bar{d}}$. Le problème que l'on se pose est de reconstruire Σ à partir de ces données et de la connaissance du fait qu'il s'agit d'une surface plane.

Mathématiquement, le problème auquel on a affaire est un problème inverse elliptique, pour lequel plusieurs résultats théoriques ont déjà été obtenus. [3] a montré l'unicité de la solution dans le cadre de l'équation de Laplace bidimensionnelle, ainsi qu'un résultat de stabilité général. [4, 5] ont obtenu un résultat de stabilité de Lipschitz locale pour l'équation de Laplace et de l'élasticité 2D respectivement et dans le cas d'une fissure débouchante. De plus, dans [5], l'identifiabilité est montrée pour l'équation de l'élastostatique et des fissures non débouchantes à condition que le nombre de cas de chargement connus r_{max} soit supérieur ou égal à 2. Il est à noter que les résultats d'identifiabilité ne nécessitent la présence de mesure que sur une partie de la frontière du domaine.

Numériquement, plusieurs travaux ont montré que l'on pouvait reconstruire des fissures grâce à la minimisation d'une fonctionnelle de Kohn-Vogelius [6, 7]. Par la suite, il a été proposé, dans [8], un moyen astucieux d'utiliser la dérivée topologique de cette fonctionnelle pour obtenir une cartographie de petites fissures bien séparées. Dans le cas où le plan de fissure est *a priori* connu, il a été proposé [9] de résoudre un problème de Cauchy sur chaque semi-domaine. Une autre méthode, celle que l'on va considérer dans ce document, proposée dans [10, 11], consiste à tirer profit de la symétrie de l'opérateur d'élasticité (ou de l'opérateur de Laplace), et à écrire un écart à la réciprocité entre les données de Neumann et de Dirichlet sur le bord du domaine.

2 Méthode de l'écart à la réciprocité

Soit $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{v})$, la contrainte de Cauchy associée à un champ \underline{v} de $H^1(\Omega)$. En supposant que $\Gamma_d = \Gamma_n = \partial\Omega$, et en définissant $\mathcal{V} = \{\underline{v} \in H^1(\Omega), \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \in H_{div}(\Omega), \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{v})) = 0\}$, on peut introduire la fonctionnelle (2), qui sera appelée fonctionnelle d'écart à la réciprocité :

$$\begin{aligned}
\operatorname{RG}_r : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\
\underline{v} &\mapsto \operatorname{RG}_r(\underline{v}) = \int_{\partial\Omega} (\underline{f}_r \cdot \underline{v} - \underline{u}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) \cdot \underline{n}) \, dS
\end{aligned} \tag{2}$$

En notant $\llbracket \underline{u}_r \rrbracket$ le saut de déplacement sur le plan de la fissure, on peut alors montrer que RG_r respecte l'équation (3) :

$$\forall \underline{v} \in \mathcal{V}, \operatorname{RG}_r(\underline{v}) = \int_{\Sigma} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) : (\underline{n}_\Pi \otimes \llbracket \underline{u}_r \rrbracket) \, dS \tag{3}$$

On peut alors, en suivant la méthodologie proposée dans [10, 11], utiliser certains champs \underline{v} bien choisis pour trouver les paramètres définissant le plan contenant la fissure. Remarquons au passage que pour trouver la normale au plan de fissure, la procédure proposée impose d'utiliser 2 cas de chargement au moins, ce qui est cohérent avec le résultat d'identifiabilité.

On peut ensuite reconstruire le saut de déplacement $\llbracket \underline{u}_r \rrbracket$ dans ω , dont le support est Σ . Pour ce faire, on utilise une méthode de Galerkin sur l'équation (3) en injectant des fonctions-test \underline{v} particulières permettant une reconstruction du saut soit par série de Fourier, comme dans [11], soit par somme de polynômes, comme proposé dans [12].

La méthode de l'écart à la réciprocité présente l'avantage de ne nécessiter aucune résolution de problème direct, et la projection de Galerkin ne concerne qu'un nombre limité de fonctions-test et de reconstruction vivant uniquement sur la surface de fissure, ce qui permet d'envisager un traitement rapide des données.

Cependant, cette méthode présente plusieurs inconvénients qui la rendent difficile à appliquer dans un contexte expérimental et à fortiori industriel. La plus critique de ces limitations est la nécessité, pour écrire la réciprocité, d'avoir accès à des données de Dirichlet et de Neumann sur l'ensemble du bord du domaine considéré, ce qui est inenvisageable en pratique. En effet, on peut s'attendre à ce que sur certaines parties du bord, on n'ait pas accès à l'effort qui est appliqué, ou bien que le déplacement ne soit pas mesuré, ou pire, que ni l'un ni l'autre ne soient disponibles.

Pourtant, les résultats d'identifiabilité et même de stabilité ne nécessitent pas que les données de Dirichlet et Neumann soient disponibles à la fois sur l'ensemble du bord. Par conséquent, il a été proposé, par exemple dans [13], de résoudre au préalable un problème de complétion de données (problème de Cauchy) afin d'étendre les données sur l'ensemble du bord $\partial\Omega$. Cependant, ceci suppose que l'on connaisse une partie de Ω dans laquelle il n'y a pas de fissure. Or dans certains cas la forme de ce domaine rend le problème de complétion de données très instable. Par ailleurs, des travaux théoriques [14, 15] ont permis de montrer que la stabilité du problème de Cauchy n'est que logarithmique, tandis que, comme mentionné plus haut, la stabilité du problème d'identification de fissure est de Lipschitz, donc bien plus favorable. On propose donc dans cette contribution deux procédures techniquement très proches permettant d'identifier directement des fissures à partir des données par la méthode de l'écart à la réciprocité, et sans étape intermédiaire.

3 Utilisation de champs-test adaptés

Dans cette section, on propose de n'utiliser que des champs-test annulant les contributions à l'écart à la réciprocité des champs de déplacement et effort sur les parties du bord où ils sont inconnus, c'est à dire que l'on utilise des champs-test appartenant à l'espace \mathcal{V}_0 , décrit en (4).

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \underline{v} \in \mathcal{V}, \begin{array}{l} \underline{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\bar{d}} \\ \underline{\sigma}(\underline{v}) \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\bar{n}} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Cependant, dans ce contexte, l'obtention de champs permettant d'identifier le plan de fissure n'est pas possible dans le cas général. Par conséquent, une approche légèrement différente est proposée dans laquelle le saut de déplacement le long de la fissure sera identifié à partir de l'équation (3) avec une méthode de Petrov-Galerkin. On va écrire le problème de minimisation (5), portant sur $[[\underline{u}_r]]$ dans $H^{1/2,00}(\omega)$ et sur Π dans l'espace vectoriel des plans de \mathbb{R}^d (d étant la dimension de l'espace physique).

$$\min_{\Pi, ([[u_r]])_r} \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r_{max}} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Pi \cap \Omega} \underline{\sigma}(\psi_i) : (\underline{n}_{\Pi} \otimes [[u_r]]) \, dS - \left(\int_{\Gamma_n} \hat{\underline{f}}_r \cdot \psi_i \, dS - \int_{\Gamma_d} \hat{\underline{u}}_r \cdot \underline{\sigma}(\psi_i) \cdot \underline{n} \, dS \right) \right)^2 \quad (5)$$

Les champs-test $(\psi_i)_{i=1..n}$ sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 20 et appartenant à \mathcal{V}_0 . En pratique, on introduit un paramétrage de Π noté θ (2 paramètres pour une ligne en 2D, 3 pour un plan en 3D). Pour une position θ de Π , on note $\omega(\theta) = \Pi(\theta) \cap \Omega$, on maille cette surface et on définit des fonctions éléments finis $(\phi_j)_{j=1..m}$. Pour une mesure r , on cherche α^r le vecteur des déplacements nodaux de sorte que $[[u_r]] = \sum \alpha_j^r \phi_j$.

$$\begin{aligned} & \min_{\theta, (\alpha^r)_r} \Upsilon(\theta, (\alpha^r)_r) \\ \Upsilon(\theta, (\alpha^r)_r) &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r_{max}} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j^r \int_{\omega(\theta)} \underline{\sigma}(\psi_i) : (\underline{n}_{\Pi} \otimes \phi_j) \, dS \right. \\ & \quad \left. - \left(\int_{\Gamma_n} \hat{\underline{f}}_r \cdot \psi_i \, dS - \int_{\Gamma_d} \hat{\underline{u}}_r \cdot \underline{\sigma}(\psi_i) \cdot \underline{n} \, dS \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

En plus de rendre possible la génération de fonctions-test, la méthode de Petrov-Galerkin a pour avantage d'autoriser l'utilisation de fonctions locales pour la reconstruction, ce qui permet d'imposer facilement dans la résolution la non-interpénétration des lèvres de fissure et la nullité du saut de déplacement sur $\partial\omega(\theta)$, au travers de deux conditions notées $C\alpha^r \leq 0$ et $T\alpha^r = 0$, ce qui améliore la qualité de la reconstruction. Le problème de minimisation final (7) est écrit ci-après :

$$\min_{\theta, (T\alpha^r=0, C\alpha^r \leq 0)_r} \Upsilon(\theta, (\alpha^r)_r) \quad (7)$$

Remarque (Pondération des cas-test) On ne doit pas donner à tous les cas-tests le même poids dans la résolution. En effet, ceux qui conduisent à une ouverture de fissure moindre pour une amplitude d'effort similaire, et donc à un écart à la réciprocity moindre, ajoutent plus de bruit que d'information. Par conséquent, il est intéressant de pondérer l'importance relative des cas-test par un scalaire représentant l'amplitude de l'effort imposé. À noter toutefois que le fait que l'on ait affaire à des données incomplètes interdit de facto d'avoir accès à cette amplitude de façon exacte.

Plus de détails seront donnés lors de la présentation sur la mise en œuvre numérique de cette minimisation, qui conduit à reconstituer la ligne de la fissure, ainsi que sa forme.

Pour finir, on présente un résultat numérique d'identification. Il s'agit d'un domaine carré 2D en contraintes planes encastré sur sa face supérieure. 4 cas de chargement lui sont appliqués séquentiellement, comme montré sur la figure 2. Le déplacement est supposé mesuré sur tout le bord du domaine tandis que l'effort est connu sur toutes les faces excepté celle qui est encastrée. Un bruit blanc gaussien de 1 % est ajouté aux mesures. Les résultats de l'identification sont comparés à la référence sur la figure 3.

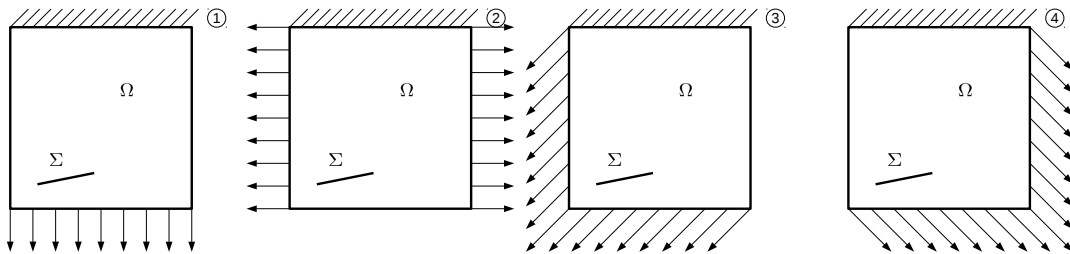


FIGURE 2 – Domaine étudié avec les cas de chargement

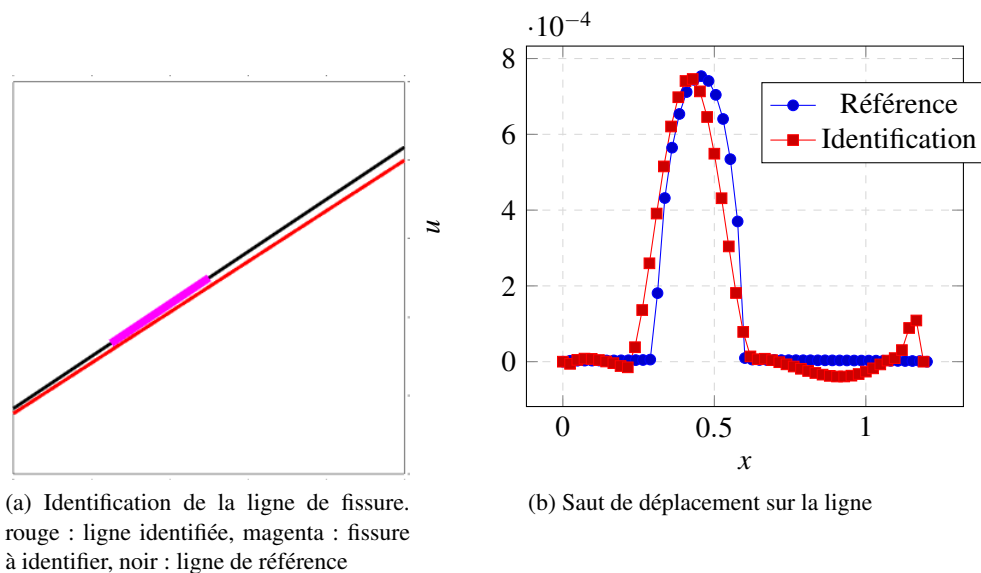


FIGURE 3 – Identification de fissure par sa ligne et le saut de déplacement le long de cette ligne

4 Extension de la procédure

Comme les fonctions-test utilisées sont polynomiales, on peut imposer leur nullité, ou celle de leur dérivée normale, sur des courbes d'équations polynomiales. Or dans certains cas, on peut avoir des données manquantes uniquement sur une petite partie d'un bord rectiligne. Il en résulte que la méthode

précédente demande d'oublier les données sur l'ensemble du bord, ce qui revient à gaspiller de l'information. C'est pour répondre à ce problème qu'une deuxième procédure sera présentée, qui peut être vue comme une extension de la précédente. Cette deuxième procédure sera mise en œuvre numériquement sur un cas tridimensionnel.

Références

- [1] Reginald C Eggleton and Francis J Fry. Ultrasonic imaging, July 12 1977. US Patent 4,035,839.
- [2] Julien Réthoré, Nathalie Limodin, Jean-Yves Buffière, Stéphane Roux, and François Hild. Three-dimensional analysis of fatigue crack propagation using x-ray tomography, digital volume correlation and extended finite element simulations. *Procedia Iutam*, 4 :151–158, 2012.
- [3] Avner Friedman and Michael Vogelius. Determining cracks by boundary measurements. *Indiana University Mathematics Journal*, 38(2) :497–525, 1989.
- [4] Stéphane Andrieux, Amel Ben Abda, and Mohamed Jaoua. On the inverse emergent plane crack problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21(10) :895–906, 1998.
- [5] Amel Ben Abda, Hend Ben Ameer, and Mohamed Jaoua. Identification of 2D cracks by elastic boundary measurements. *Inverse Problems*, 15(1) :67, 1999.
- [6] Fadil Santosa and Michael Vogelius. A computational algorithm to determine cracks from electrostatic boundary measurements. *International journal of engineering science*, 29(8) :917–937, 1991.
- [7] Kurt Bryan and Michael Vogelius. A computational algorithm to determine crack locations from electrostatic boundary measurements. the case of multiple cracks. *International journal of engineering science*, 32(4) :579–603, 1994.
- [8] Samuel Amstutz, Imene Horchani, and Mohamed Masmoudi. Crack detection by the topological gradient method. *Control and Cybernetics*, 34(1) :81–101, 2005.
- [9] Mohamed Larbi Kadri, Jalel Ben Abdallah, and Thouraya Nouri Baranger. Identification of internal cracks in a three-dimensional solid body via Steklov–Poincaré approaches. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(10) :674–681, 2011.
- [10] Stéphane Andrieux, Amel Ben Abda, and Huy Duong Bui. Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 324(12) :1431–1438, 1997.
- [11] Stéphane Andrieux, Amel Ben Abda, and Huy Duong Bui. Reciprocity principle and crack identification. *Inverse problems*, 15(1) :59, 1999.
- [12] Renaud Ferrier, Pierre Gosselet, and Mohamed Kadri. Planar crack identification via the reciprocity gap method with polynomial reconstruction. In *6th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6)*, 2018.
- [13] Stéphane Andrieux and Thouraya Nouri Baranger. Emerging crack front identification from tangential surface displacements. *Comptes Rendus Mécanique*, 340(8) :565–574, 2012.
- [14] Giovanni Alessandrini, Luca Rondi, Edi Rosset, and Sergio Vessella. The stability for the cauchy problem for elliptic equations. *Inverse problems*, 25(12) :123004, 2009.
- [15] Faker Ben Belgacem. Why is the Cauchy problem severely ill-posed? *Inverse Problems*, 23(2) :823–836, 2007.